مسائل ریاضی کنکورها

ترجمه: پرویز شهریاری

مسابقات ورودی
دانشگاههای شوروی
۱۹۷۷ - ۸۲
با حل

مسایل ریاضی کنکورها

(امتحان‌های ورودی سال‌های ۸۲-۱۹۷۷ دانشگاه دولتی مسکو)

(شامل مسأله‌های جبر، حساب، هندسه ـ مسحطه وفضایی ومثلثات)

با حل و جواب

یوری والانتینوویچ نسترنکو
میخائیل کانستانتی نوویچ یوتاپوف
سلاو نیکولایه‌ویچ اولخ‌نیک

ترجمهٔ پرویز شهریاری

تهران ـ ۱۳۶۶

این کتاب شامل مساله‌هـای امتحان‌های
ورودی سال‌هـای ۱۹۷۷تا ۱۹۸۱ دانشکده‌های:
مکانیک ریاضی ، ریاضیات محاسبه‌ای و سیبرنتیک ، فیزیک ، شیمی، زیست‌شناسی ، ارتباط‌ها ، جغرافی ، زمین‌شناسی (بخش‌هـای ژئوفیزیک و زمین‌شناسی عمومی)، اقتصاد (بخش‌های اقتصاد سیاسی و برنامه‌ریزی‌اقتصادی) روان‌شناسی‌وفلسفه ازدانشگاه دولتی مسکو و حل آن‌ها می‌باشد.

فهرست

پیشگفتار ۷

مقدمهٔ حل مسأله‌ها ۲۳۳–۲۴۵

ـ معادلهٔ یك مجهولی ۲۳۳

ـ نامعادله‌های یك مجهولی ۲۳۸

ـ معادله‌های جبری ودستگاه معادله‌های جبری ۲۴۲

۱. دانشکدهٔ مکانیك وفیزیك

صورت مسأله‌ها ۱۱–۲۹

حل مسأله‌ها ۲۴۲–۲۸۸

۲. دانشکدهٔ ریاضیات محاسبه‌ای وسیبرنتیك

صورت مسأله‌ها ۲۹–۵۱

حل مسأله‌ها ۲۷۸–۳۴۳

۳. دانشکدهٔ فیزیك

صورت مسأله‌ها ۵۱–۷۶

حل مسأله‌ها ۳۴۴–۳۸۷

۴. دانشکدهٔ شیمی

صورت مسأله‌ها ۷۶–۹۳

حل مسأله‌ها ۳۸۸–۴۲۵

۵. دانشکدهٔ زیست شناسی

صورت مسأله‌ها ۹۳–۱۰۹

حل مسأله‌ها ۴۲۵–۴۵۹

۶. دانشکدهٔ ارتباط‌ها

صورت مسأله‌ها ۱۱۰–۱۲۲

حل مسأله‌ها ۴۶۰–۴۸۴

۷. دانشکدهٔ جغرافیا

صورت مسأله‌ها ۱۲۲–۱۳۸

حل مسأله‌ها ۴۸۴–۵۰۷

۸. دانشکدهٔ زمین‌شناسی (بخش ژئوفیزیك)

صورت مسأله‌ها ۱۳۸–۱۵۵

حل مسأله‌ها ۵۰۷–۵۴۰

۹. دانشکدهٔ زمین‌شناسی (بخش زمین‌شناسی عمومی)

صورت مسأله‌ها ۱۵۵–۱۵۸

حل مسأله‌ها ۵۴۱–۵۷۱

۱۰. دانشکدهٔ اقتصاد (بخش اقتصاد سیاسی)

صورت مسأله‌ها ۱۷۱–۱۸۵

حل مسأله‌ها ۵۷۱–۵۹۵

۱۱. دانشکدهٔ اقتصاد (بخش برنامه‌ریزی وسیبرنتیك اقتصادی)

صورت مسأله‌ها ۱۸۵–۲۰۲

حل مسأله‌ها ۵۹۵–۶۲۶

۱۲. دانشکدهٔ روانشناسی

صورت مسأله‌ها ۲۰۲–۲۲۰

حل مسأله‌ها ۶۲۶–۶۵۸

۱۳. دانشکدهٔ زبانشناسی

صورت مسأله‌ها ۲۲۰–۲۲۹

حل مسأله‌ها ۶۵۸–۶۸۶

ضمیمه

صورت‌مسأله‌هاوحل ۶۸۷–۷۱۰

پیش‌گفتار

این کتاب شامل دو بخش است: در بخش اول صورت بیش از ۱۵۰۰ مسأله‌ای داده شده است که در امتحان‌های ورودی سال‌های ۱۹۷۷ تا ۱۹۸۱ سیزده دانشکدهٔ دانشگاه دولتی مسکو داده شده است. در بخش دوم راه حل این‌مسأله‌ها و یا راهنمائی و پاسخ آن‌ها داده شده است. درآخر کتاب‌هم، مساله‌های امتحان‌های ورودی برخی ازگروه‌ها در سال ۱۹۸۲ آمده است تا وسیله‌ای برای خودآزمایی باشد.

مسأله‌ها بی‌اندازه متنوع‌اند و، طبیعی است، که برای همهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی ــ اعم از رشته‌های ریاضی ــ فیزیك و یا علوم تجربی می‌توانند مفید باشد و، ضمناً می‌تواند به‌عنوان منبعی، مورد استفاده دبیران ریاضی قرارگیرد.

*

نشانه‌گذاری‌های این کتاب، همان‌هاست که به‌طورمعمول، درکتاب‌های درسی دبیرستانی وجود دارد:

مقدار زاویهٔ ABC را با $\widehat{ABC}$ ؛

مقدار پاره خط AB را با $|AB|$ ؛

مجموعهٔ‌همهٔ‌مقدارهای x راکه‌درنابرابری $a \leqslant x \leqslant b$ صدق می‌کنند، با $[a،b]$ ؛

حداکثر و حداقل مقدار $f(x)$ را دربازهٔ $[a،b]$، به

ترتیب با $\max f(x)$ و $\min f(x)$ ؛

مجموعهٔ همهٔ مقدارهای x راکه در نابرابری‌های $a<x<b$، $a<x\leqslant b$ و $a\leqslant x<b$ صدق کنند، به‌ترتیب با (a,b)، $(a,b]$ و $[a,b)$؛

لگاریتم اعشاری را با lg ، لگاریتم طبیعی را با ln و لگاریتم درمبنای a را با log_a ؛

نشان داده‌ایم وغیره.

*

در بخش حل مسأله‌ها، تنها مسأله‌های گروه اول حل شده‌اند و برای مسأله‌های گروه‌های دیگر، تنها به ذکر پاسخ قناعت شده است، تا هم از حجم کتاب کاسته شود و هم راهی برای کار خود دانش‌آموزان باقی بماند.

اگرچه کوشش شده است تا ساده‌ترین راه حل، در این کتاب، ارائه شود، ولی، همان طورکه قانون ریاضیات است، بسیاراحتمال داردکه دانش‌آموزان و یا دبیران ریاضی بتوانند برای برخی از آن‌ها راه حل‌های بهتر و روشن‌تری پیداکنند و، به‌همین مناسبت، توصیهٔ ما به‌همهٔ دانش‌آموزان این است‌که ابتدا، بدون مراجعه به‌بخش حل، تمامی تلاش خود را برای حل آن‌ها به‌کار برند و، تنها برای اطمینان از درستی راه حل خود و یا احیاناً پیداکردن راه حلی‌که به‌ذهن آن‌ها نرسیده است، به‌حل مربوط مراجعه کنند.

*

وظیفهٔ خود می‌دانم‌که از آقای حسن نیک‌بخت‌که در تصحیح وتطبیق مطالب زحمت بسیارکشیده‌اند تشکرنمایم، وهمچنین‌از کارکنان«حروفچینی مهدی»، که‌چنین‌متن‌پاکیزه‌ای راحروفچینی کرده‌اند، سپاسگزارم.

بخش اول

مسأله‌ها

§ ۱. دانشکدهٔ مکانیك ـ ریاضی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. همهٔ عددهای a ($a>0$) را طوری پیدا کنید که برای هر کدام از آن‌ها داشته باشیم:

$$\int_0^a (2-4x+3x^2)dx \leqslant a$$

۲. طول ساق‌های یك ذوزنقه، برابر است با ۳ و ۵. می‌دانیم که می‌توان دایره‌ای در ذوزنقه محاط کرد. پاره خطی که وسط دوساق را به‌هم وصل کرده است، مساحت ذوزنقه را ، به‌نسبت ۵:۱۱ تقسیم کرده است. مطلوب است طول هر یك از دو قاعدهٔ ذوزنقه.

۳. ثابت کنید که برای تابع $f(x)=\cos x \sin 2x$ ، نابرابری زیر درست است:

$$\min f(x) > -\frac{7}{9}, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}$$

۵. قاعدهٔ هرم SABC ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است ، کـه طول ضلع آن برابر است با $4\sqrt{2}$. یال جانبی SC، برقاعدهٔ هرم عمود است وطولی برابر ۲ دارد. مطلوب است اندازهٔ زاویه و فاصلهٔ بین دوخط متنافری که ، یکی از آن‌ها از نقطهٔ S و وسط یال BC و دیگری از نقطهٔ C و وسط یال AB می گذرد.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$x \leqslant ۳ - \frac{۱}{x-۱}$$

۷. این معادله را حل کنید:

$$۳^{\frac{۱}{۲}+\log_{۳}\cos x} + ۶^{\frac{۱}{۲}} = ۹^{\frac{۱}{۲}+\log_{۹}\sin x}$$

گروه دوم

۱. مطلوب است محاسبهٔ همهٔ مقدارهای α ، که برای هر کدام از آن‌ها داشته باشیم:

$$\int_{۱}^{۲}(\alpha^{۲}+(۴-۴\alpha)x+۴x^{۳})dx \leqslant ۱۲$$

۲. پاره خط میانهٔ یك ذوزنقه، برابر است با ۵ (پاره‌خط میانهٔ ذوزنقه، پاره‌خطی است که وسط دو ساق آن را به‌هم وصل می‌کند). در ذوزنقه، می‌توانیم دایره‌ای محاط کنیم. خط میانه، ذوزنقه‌را به‌دو قسمت تقسیم می‌کند که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۷:۱۳ است. طول ارتفاع ذوزنقه را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید که برای تابع $f(x) = \sin x \sin ۲x$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\max f(x) < ۰/۷۷, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲y^{۳}+۲x^{۲}+۳x+۳=۰ \\ ۲z^{۳}+۲y^{۲}+۳y+۳=۰ \\ ۲x^{۳}+۲z^{۲}+۳z+۳=۰ \end{cases}$$

۵. قاعدهٔ هرم SABC ، عبارت است از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC ، که طول وتر آن AB ، برابر است با $۴\sqrt{۲}$. یال جانبی SC از هرم ، برصفحهٔ قاعدهٔ آن عمود است و طولی برابر ۲ دارد. مطلوب است زاویه و فاصلهٔ بین دوخط متنافری که ، یکی ازآن‌ها ازنقطهٔ S و وسط یال AC و دیگری از نقطهٔ C و وسط یال AB می گذرد.

۶. نامعادلهٔ $x+۳ < -\frac{۱}{x+۱}$ را حل کنید.

۰۷ این معادله را حل کنید:

$$\text{۵}^{\frac{۱}{۲}}+\text{۵}^{\frac{۱}{۲}+\log_{۵}\sin x}=\text{۱۵}^{\frac{۱}{۲}+\log_{۱۵}\cos x}$$

گروه سوم

۰۱ عددهای $b\ (b>۱)$ را طوری پیدا کنید که، برای هر یک از آن‌ها، داشته باشیم:

$$\int_{۱}^{b}(b-۴x)dx\geqslant ۶-۵b$$

۰۲ طول ساق‌های یک ذوزنقه برابر است با ۶ و ۱۰. می‌دانیم که می‌توان دایره‌ای در ذوزنقه محاط کرد. خط میانهٔ ذوزنقه، آن‌را به‌دو قسمت تقسیم می کند که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با ۱۱:۵. طول هر یک از دو قاعدهٔ ذوزنقه را پیدا کنید.

۰۳ ثابت کنید که برای تابع $f(x)=\cos^{۲}x\sin x$، این نابرابری برقرار است:

$$\min f(x)>-\frac{۷}{۱۸},\quad x\in[-\pi,\pi]$$

۰۴ این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸=۰\\ z^{۳}-۶y^{۲}+۱۲y-۸=۰\\ x^{۳}-۶z^{۲}+۱۲z-۸=۰\end{cases}$$

۰۵ قاعدهٔ هرم $HPQR$، عبارت است ازمثلث متساوی‌الاضلاع PQR که‌طول ضلع آن برابر است با $۲\sqrt{۲}$. یال جانبی HR برصفحهٔ قاعده عمود است و طولی برابر ۱ دارد. مطلوب است مقدار زاویه و طول فاصلهٔ بین دو خط راست متنافری که، یکی از آن‌ها ازنقطهٔ H و وسط یال QR، و دیگری از نقطهٔ R و وسط یال PQ گذشته باشد.

۰۶ نامعادلهٔ $x\leqslant ۷-\frac{۱۶}{x+۱}$ را حل کنید.

۰۷ این معادله را حل کنید:

$$2-6^{\frac{1}{2}+\log_6 \sin x}=2^{\frac{1}{2}+\log_2 \cos x}$$

گروه چهارم

۱. عددهای q را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، داشته باشیم:

$$\int_0^1 (q+(4-q)x+4q^2x^3)dx \leqslant \frac{17}{2}q-14$$

۲. طول خط میانهٔ یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، برابر است با ۱۰. در ذوزنقه، می‌توان دایره‌ای محاط کرد. خط میانهٔ ذوزنقه، آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند، به نحوی که نسبت مساحت‌های این قسمت برابر ۷:۱۳ می‌باشد. طول ارتفاع ذوزنقه را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید که برای تابع $f(x)=\cos x \sin^2 x$، نابرابری زیر برقراراست:

$$f(x)<0/39, \quad x\in[-\pi,\pi]$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y^3+2x^2+6x+12=0 \\ z^3+2y^2+6y+12=0 \\ x^3+2z^2+6z+12=0 \end{cases}$$

۵. قاعدهٔ هرم HPQR، عبارت است از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین PQR که طول وتر PQ آن، برابر است با $2\sqrt{2}$. یال جانبی HR برصفحهٔ قاعده عمود وطول آن برابر ۱ می‌باشد. مطلوب‌است اندازهٔ زاویه و فاصلهٔ بین خط‌های راست متنافری که، یکی از آن‌ها، از نقطهٔ H ووسط یال PR، و دیگری ازنقطهٔ R و وسط یال PQ گذشته است.

۶. نامعادلهٔ $x+7<-\frac{16}{x-1}$ را حل کنید.

۷. این معادله را حل کنید:

$$3^{-\frac{1}{2}}+6^{-\frac{1}{2}+\log_6 \sin x}=2^{-\frac{1}{2}+\log_2 \cos x}$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. تفاضل $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$، عددی است درست، آن‌را پیدا کنید.

۲. همهٔ ریشه‌های این معادله را، که در بازهٔ [۲ ، ۳] قرار دارند، پیدا کنید:

$$\int_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)dx=\sin\alpha$$

۳. از رأس‌های A و C، ازمثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع‌های AP و CQ را برضلع‌های BC و AB رسم کرده‌ایم. می‌دانیم که، مساحت مثلث ABC برابر ۱۸، مساحت مثلث BPQ برابر ۲ وطول پاره خط PQ برابر $2\sqrt{2}$ است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر یك از آن‌ها، دستگاه نامعادله‌های زیر، دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant\dfrac{1-a}{a+1} \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2 \end{cases}$$

۵. حجم هرم ABCD برابراست با ۵. ازوسط یال‌های AD و BC، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که یال CD را در نقطهٔ M قطع کرده است. ضمناً می‌دانیم که، نسبت طول پاره خط DM به طول پاره خط MC برابر است با $\frac{2}{3}$. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مقطع هرم با صفحهٔ مذکور، به‌شرطی که فاصلهٔ رأس هرم ازاین صفحه، برابر ۱ باشد.

۶. همهٔ جواب‌های معادلهٔ زیر را در بازهٔ $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$، پیدا کنید:

$$4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$$

گروه دوم

۱. تفاضل $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$، عددی است درست؛ آن را پیدا کنید.

۰۲ همهٔ جواب‌های این معادله را پیدا کنید، که دربازهٔ $\left[-\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۲}\right]$ واقع باشند:

$$\int_{-u}^{u} cos(x+۲u^۲-u)dx = -sin ۲u$$

۰۳ در مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC ، از رأس‌های A و C ، ارتفاع‌های AP و CQ را برضلع‌های BC و AB رسم کرده‌ایم. مطلوب است طول ضلع AB ، به‌شرطی که بدانیم، محیط مثلث ABC برابر ۱۵ ، محیط مثلث BPQ برابر ۹، وشعاع دایرهٔ محیطی مثلث BPQ ، برابر $\frac{۹}{۵}$ است.

۰۴ همهٔ مقدارهای پارامتر b را طوری پیدا کنیدکه، برای هر کدام از آن‌ها، دستگاه نامعادله‌های زیر، دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} ۵x^۲-۴xy+۲y^۲ \geqslant ۳ \\ ۷x^۲+۴xy+۲y^۲ \leqslant \frac{۲b-۱}{۲b+۵} \end{cases}$$

۰۵ هرم ABCD داده شده‌است. از نقطه‌های K و N وسط یال‌ها، AB و CD، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که یال‌های BC و AD را، به‌ترتیب، در L و M قطع کرده است. مطلوب است حجم هرم ABCD ، به‌شرطی که مساحت مثلث MNK برابر ۳ ، نسبت حجم هرم ACDL به حجم هرم ABCD برابر ۰/۹ وفاصلهٔ رأس D تا صفحهٔ KLMN ، برابر ۳ باشد.

۰۶ همهٔ ریشه‌های این معادله را ، دربازهٔ $\left[\frac{۹}{۴}, ۳\right]$ پیدا کنید:

$$log_۲|tg x| + log_۴ \frac{cos x}{۲cos x + sin x} = ۰$$

گروه سوم

۰۱ تفاضل $\sqrt{|۲۰\sqrt{۷}-۵۳|} - \sqrt{۲۰\sqrt{۷}+۵۳}$ ، عددی است درست، آن را پیدا کنید.

۰۲ همهٔ جواب‌های این معادله را، در بازهٔ [۲ ، ۳] پیداکنید:

$$\int_{0}^{2\beta} \sin(x-\beta^2)dx = \sin 2\beta$$

۳. درمثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC ، ارتفاع‌های AP و CQ را از رأس‌های A و C برضلع‌های BC و AB رسم کرده‌ایم. می‌دانیم، مساحت‌مثلث ABC برابر ۶۴ ، مساحت چهار ضلعی AQPC برابر ۴۸ وشعاع دایـرهٔ محیطی مثلث ABC برابـر $\frac{16}{\sqrt{3}}$ است. طول پاره‌خط PQ را پیدا کنید.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر α را طوری پیداکنیدکه، بـرای هرکدام از آن‌ها، دستگاه نامعادله‌های زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} 5x^2+7xy+2y^2 \geqslant \dfrac{3\alpha+1}{\alpha+2} \\ 3x^2+xy+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

۵. درهرم ABCD، از نقطه‌های K و N، وسط یال‌های AD و BC، صفحه‌ای گذرانده‌ایم تا یال AB را در نقطهٔ M و یال CD را درنقطهٔ L قطع کند. مساحت چهارضلعی KLMN برابر ۱۶ ونسبت طول پاره‌خط AM به‌طول پاره‌خط MB برابر ۰/۵ است. فاصلهٔ رأس A تا صفحهٔ KLMN راپیدا کنید، به‌شرطی‌که حجم چندوجهی NACLK برابر ۸ باشد.

۶. همهٔ جواب‌های این‌معادله را، دربازهٔ $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$ پیدا کنید:

$$9^{\sin^2 x} - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} = 6$$

گروه چهارم

۱. تفاضل $\sqrt{24\sqrt{3}+43} - \sqrt{|24\sqrt{3}-43|}$ عددی است‌درست، آن‌را پیدا کنید.

۲. همهٔ جواب‌های معادلهٔ زیر را، دربازهٔ $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right]$، پیداکنید:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{v} \sin(x-v^2)dx = -\cos v$$

۳. در مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC، که طول ضلع AC از آن برابر است با ۶، ارتفاع‌های AP و CQ را، برضلع‌های BC و AB فرودآورده‌ایم. مطلوب است مساحت چهار ضلعی AQPC ، به شرطی که مساحت مثلث BPQ برابر ۱ و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر $\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$ باشد.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر c را طوری پیدا کنید که، برای هر یک از آن‌ها، دستگاه نامعادله‌های زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} ۳x^۲ - ۸xy - ۸y^۲ \geqslant ۲ \\ x^۲ - ۴xy + ۲y^۲ \leqslant \frac{c+۱}{۱+۲c} \end{cases}$$

۵. هرم ABCD مفروض است. از نقطه‌های K و M، وسط یال‌های AB و CD صفحه‌ای عبور داده‌ایم که یال‌های BC و AD را، به ترتیب، در نقطه‌های K و N قطع کرده است. فاصلهٔ رأس B تا این صفحه، برابر است با ۲. قطرهای چهار ضلعی KLMN در نقطهٔ Q به‌هم برخورده‌اند و ، ضمناً ، نسبت طول پاره خط KQ به‌طول پاره خط QM برابر است با ۰/۲. مساحت چهار-ضلعی KLMN را محاسبه کنید، به‌شرطی که حجم هرم BKMC برابر ۱۲ باشد.

۶. همهٔ جواب‌های این معادله را، در بازهٔ [۴ , ۳/۳] پیدا کنید:

$$۲\log_{۵}|\cot g\,x| - \log_{\frac{۱}{۵}} \frac{\sin x}{۵\sin x - ۴\cos x} = ۰$$

۱۹۷۹

گروه اول

۱. همهٔ جواب‌های این معادله را، با شرط $\cos x \geqslant ۰$، پیدا کنید:

$$۱ - ۵\sin x + ۲\cos^۲ x = ۰$$

۲. پاره خط KL قطر یک دایره است. از دوانتهای K و L آن، دو خط راست گذرانده‌ایم که دایره را، به‌ترتیب، درنقطه‌های P و Q ـ واقع دریک‌طرف خط راست KL ـ قطع کرده‌اند. مطلوب است شعاع دایره، به‌شرطی که

و نقطهٔ برخورد خط‌های راست KP و QL ، $\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}$ ، از نقطه‌های P و Q، به فاصلهٔ واحد باشد.

۳. می‌نیمم تابع $y(x)=x^3-2x|x-2|$ را در بازهٔ $[0 , 3]$ و همچنین، حداکثر مقدار آن را، در این بازه، پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $\frac{1+\log_2(2+x)}{x}>\frac{6}{2x+1}$ را حل کنید.

۵. قاعدهٔ هرم ABCD ، عبارت است از مثلث ABC ، که در آن $\hat{A}=\frac{2}{\pi}$ ، $\hat{C}=\frac{\pi}{6}$ و $|BC|=2\sqrt{2}$. طول یال‌های AD ، BD و CD باهم برابرند. کره‌ای به‌شعاع واحد، بریال‌های AD و BD، برامتداد یال CD از طرف نقطهٔ D و برصفحهٔ ABC مماس است. مطلوب است محاسبهٔ طول پاره خط مماسی که از نقطهٔ A بر کره رسم می‌شود.

۶. این دستگاه نامعادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases}\frac{2}{2x-y}-\frac{3}{x-2y}=\frac{1}{2}\\[2mm] \frac{2}{2x-y}-\frac{1}{x-2y}=\frac{1}{18}\end{cases}$$

گروه دوم

۱. مطلوب‌است همهٔ جواب‌های معادلهٔ $2\cos 2x-4\cos x=1$ که درنامعادلهٔ $\sin x\geqslant 0$ صدق کنند.

۲. در مثلث PQR ، اندازهٔ زاویهٔ QPR برابر است با $\frac{\pi}{3}$. از رأس‌های P و R عمودهایی، به ترتیب، برضلع‌های QR و PQ فرودآورده‌ایم. نقطهٔ برخورد این عمودها، به فاصلهٔ واحد از رأس‌های P و R قرار دارد. طول هریك از ضلع‌های مثلث PQR را پیدا کنید.

۳. نقطهٔ ماکزیمم تابع $y(x)=-5x^3+x|x-1|$ را دربازهٔ $[0 , 2]$ و همچنین، حداقل مقدار آن را در این بازه پیدا کنید.

۴. نامعادلـه $\frac{۱۰}{۲x-۱} > \frac{۶-۳^{x+۱}}{x}$ را حل کنید.

۵. قاعدهٔ هرمی، مثلث ABC است که، در آن، $|AB|=|AC|=۱ ، \hat{A}=\frac{۲\pi}{۳}$

رأس D این هرم، از رأس‌های A و B به یك فاصله است. کـره‌ای بر یال CD و امتداد یال‌های AD و DB ، ازطرف نقطهٔ D، و صفحهٔ ABC مماس است. نقطهٔ تماس با صفحهٔ قاعدهٔ هرم وتصویر قائم رأس D براین صفحه، روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع شده‌اند. مطلـوب است محاسبهٔ طول یال‌های AD ، BD و CD.

۶. این دستگاه نامعادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{۲}{۳x-y}-\frac{۵}{x-۳y}=۳ \\ \frac{۱}{۳x-y}+\frac{۲}{x-۳y}=\frac{۳}{۵} \end{cases}$$

گروه سوم

۱. همهٔ جواب‌هـای معادلـهٔ $۴-۵cos x-۲sin^۲ x=۰$ را، کـه بـا شرط $sin x \geqslant ۰$ سازگارند، پیدا کنید.

۲. پاره خط AB قطریك دایره است. از دوانتهای A و B ، خط‌هـای راستی گذرانده‌ایم که محیط دایره را، به ترتیب، در نقطه‌های C و D ـ واقع در یك طرف خط راست ABـ قطع کنند. نقطهٔ O ، محل برخورد این دو خط راست، از دو انتهای قطر AB به‌یك فاصله است. شعاع دایره را پیداکنید، به شرطی که داشته بـاشیم: $|CD|=۱$ و $\widehat{OCD}=\frac{\pi}{۳}$.

۳. نقطهٔ می‌نیمم تابع $y(x)=۴x^۳-x|x-۲|$ و، حداکثـر مقدار آن را دربازهٔ $[۰ ، ۳]$ پیدا کنید.

۴. نامعادله $\frac{۶}{۲x-۱} < \frac{۲+log_۳ x}{x-۱}$ را حل کنید.

۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR ، قاعدهٔ هرم $PQRS$ را تشکیل می‌دهد. وتر QR مثلث قاعده، برابر ۲ وضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ PQ برابر ۱ است. طول

یال‌های PS ، QS و RS با یکدیگر برابرند. کرهٔ به‌شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$ بر یال RS و امتداد یال‌های PS و QS ، از طرف S ، و صفحهٔ PQR مماس است. طول پاره‌خط مماسی را که از Q بر کره رسم می‌شود، پیدا کنید.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{1}{2x-3y}+\frac{2}{3x-2y}=\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2x-3y}-\frac{4}{3x-2y}=1 \end{cases}$$

گروه چهارم

۱. همهٔ جواب‌های معادلهٔ $8\sin x+5=2\cos 2x$ را ، با شرط $\cos x \geqslant 0$ ، به‌دست آورید.

۲. در مثلث ABC ، اندازهٔ زاویهٔ BAC ، برابر است با $\frac{\pi}{6}$. از رأس‌های A و C ، بترتیب، عمودهایی برضلع‌های BC و AB فرود آورده‌ایم. نقطهٔ برخورد این عمودها، از دو رأس A و C، به‌فاصله‌ای برابر ۱ قراردارد. طول ضلع‌های مثلث ABC را محاسبه کنید.

۳. نقطهٔ ماکزیمم تابع $y(x)=-x^3+3x|x-3|$ وهمچنین، حداقل‌مقدار این تابع را، دربازهٔ $[0 ، 4]$ پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $\frac{2^{x+1}-7}{x-1}<\frac{10}{3-2x}$ را حل کنید.

۵. قاعدهٔ هرمی، عبارت است از مثلث PQR، که درآن داریم : $|PR|=2$، $\widehat{Q}=\frac{\pi}{4}$ و $\hat{R}=\frac{\pi}{3}$. رأس، S هرم، از نقطه‌های P و Q به‌یك‌فاصله‌است. کره‌ای بریال‌های PS، QS وامتداد یالRS ، از طرف نقطهٔ S ، و صفحهٔ PQR مماس‌است. نقطهٔ تماس کره‌با صفحهٔ‌قاعدهٔ هرم‌وتصویرقائم S بر این صفحه، روی‌محیط دایرهٔ محیطی PQR قراردارند. طول یال‌های PS، QS و RS رامحاسبه کنید.

۶. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{10}{x-y} = 1 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ را حل کنید.

۳. دریك ذوزنقه، طول پاره‌خط میانه (که وسط دوساق را به‌هم وصل‌می‌کند)، برابر ۴ و زاویه‌های‌کنار یکی ازقاعده‌ها، برابر ۴۰درجه و ۵۰ درجه‌اند. طول هریك از دو قاعدهٔ ذوزنقه را محاسبه‌کنید، به‌شرطی‌که پاره خطواصل بین وسطهای دو قاعده، برابر ۱ باشد.

۴. مماس بـر نمودار تابع $y(x)=\sqrt[3]{x^2}$ طوری است‌که طول c نقطهٔ تماس، به‌بازهٔ $\left[1 , \frac{1}{2}\right]$ تعلق‌دارد. به‌ازای چه‌مقداری از c، مساحت مثلث‌محدود به‌این مماس، محور Ox و قائم $x=2$، به‌حداقل مقدار خود می‌رسد؟ این مساحت حداقل چقدر است؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید‌که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، نامعادلهٔ زیر یك جواب داشته باشد:

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3 \geqslant 0$$

۶. معادلهٔ $\frac{\cos x}{1-\sin x}=1+\sin x$ را حل کنید.

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1 \\ 5x^6-8x^3\sqrt{y}+2y=2 \end{cases}$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $(۹-x^۲)\sqrt{۲-x}=۰$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sin x=\sqrt{۵}\cos\frac{x}{۲}$ را حل کنید.

۳. دایرهٔ به‌شعاع ۳، درمثلث ABC محاط و بر ضلع BC در نقطهٔ D مماس است. دایرهٔ به‌شعاع ۴، برامتدادضلع‌های AB و AC وبرخود ضلع BC، در نقطهٔ E مماس است. مطلوب است محاسبهٔ طول پاره خط ED، به‌شرطی که اندازهٔ زاویهٔ BCA برابر $\frac{۲}{۳}\pi$ باشد.

۴. مماس بر نمودار تابع $y(x)=\frac{۱}{x^۲}$ چنان است که c، طول نقطهٔ تماس، دربازهٔ [۵ ، ۹] قراردارد. به‌ازای چه مقداری از c، مساحت مثلث محدود به‌این مماس، محور Ox و قائم $x=۴$، به‌حداقل مقدار خود می‌رسد؟ این مقدار حداقل مساحت چقدر است؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به ازای هریك از آن‌ها، معادلهٔ زیر، دارای سه جواب باشد:

$$۴^{-|x-a|}\log_{\sqrt{۳}}(x^۲-۲x+۳)+$$
$$+۲^{-x^۲+۲x}\log_{\frac{۱}{۳}}(۲|x-a|+۲)=۰$$

۶. معادلهٔ $\frac{\sin ۲x}{۱+\sin x}=-۲\cos x$ را حل کنید.

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{x^۲+۴xy-۳y^۲}=x+۱\\ x-y=۱\end{cases}$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $(۱۶-x^۲)\sqrt{۳-x}=۰$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sin x=\sqrt{۶}\sin\frac{x}{۲}$ را حل کنید.

۳. در مثلث PQR ، اندازهٔ زاویـهٔ QRP برابر است با $\frac{\pi}{3}$. مـطلوب است محاسبه فاصلهٔ بین نقطه‌هـای تماس ضلع QR با دایرهٔ محاطی خارجی ، به شعاع ۲، مماس برامتداد ضلع‌های PQ و PR.

۴. مماس برنمودار تابع $y(x)=\frac{1}{x^2}$ چنان است که ، c ، طول نقطهٔ تماس آن، به بازهٔ [۵ ، ۴] تعلق دارد. به‌ازای چه مقداری از c ، مساحت مثلث محدود بـه این مماس، محور Ox و قائم ۱ = x ، به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟ این مقدار حداکثر مساحت، چقدر است؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر یك از آن‌ها،معادلهٔ زیر دارای سه جواب باشد:

$$9^{a^2}\log_2(|x^2-4x+3|+1)+$$
$$+3^{2a-|x^2-4x+3|}\log_2\left(\frac{1}{1+3a+2a^2}\right)=0$$

۶. معادلهٔ $\frac{\sin x}{1+\cos x}=1-\cos x$ را حل کنید.

۷. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{x}-y^5=2\\ 2y^{10}-3y^5\sqrt{x}+3x=20\end{cases}$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$ را حل کنید.

۳. درذوزنقه‌ای، دو زاویهٔ مجاور به‌یکی ازقاعده‌ها برابر۲۰ درجه و ۷۰درجه و طول پاره خطی که وسط دوقاعده را به‌هم وصل می‌کند، برابر ۲ می‌باشد. مطلوب است طول قاعده‌های ذوزنقه ، به‌شرطی که طول خط میانهٔ آن برابر ۴ باشد.

۴. مماس برنمودار تابع $y(x)=\sqrt[5]{x}$ طوری است که ، c ، طول نقطهٔ تماس

آن در بازهٔ $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right]$ قرار دارد. برای چه‌مقداری از c، مساحت مثلث محدود به این مماس، محور Ox و قائم $x=1$، حداقل خواهد شد؟ این حداقل مساحت را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر یك از آن‌ها، این نامعادله دارای یك جواب باشد:

$$\log_a 5+\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{ax^2+2x+6}+1)\cdot\log_a(ax^2+2x+7)\leqslant 0$$

۶. معادلهٔ $\frac{\sin 2x}{1-\cos x}=2\sin x$ را حل کنید.

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 2(y-1)=\sqrt{10x^2-xy-2y^2} \end{cases}$$

۱۹۸۱

گروه اول

۱. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geqslant 0$$

۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0 \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0 \end{cases}$$

۳. در دو ظرف مختلف، محلولی از یك نمك را ریخته‌ایم، ضمناً، درظرف اول ۵ کیلوگرم و درظرف دوم ۲۰ کیلوگرم ریخته شده است. ضمن تبخیر آب، درصد نمك درظرف اول p برابر و درظرف دوم q برابرشده است. دربارهٔ عددهای p و q، تنها می‌دانیم که: $pq=9$. حداکثر مقدار آبی که ممکن

است ازاین دوظرف، روی هم، بخار شده باشد، چقدر است؟

۴. ذوزنقهٔ ABCD ، با قاعده‌های BC و AD ، دردایره‌ای محاط است. روی کمان CD ، نقطهٔ E را انتخاب و به همهٔ رأس‌های ذوزنقه وصل کرده‌ایم. می‌دانیم که: $\widehat{CED} = ۱۲۰^\circ$ و $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = a$. مطلوب است محاسبهٔ نسبت محیط مثلث ABE به‌شعاع دایرهٔ محاطی آن.

۵. نقطه‌های B و C روی وجه‌های یک‌زاویهٔ دووجهی، با یال AD ، قراردارند. پاره خط DE ، باصفحهٔ مثلث ABC موازی است. درهرم BCDE، کره‌ای محاط کرده‌ایم. نسبت فاصلهٔ مرکز این کره تاخط راست DE ، به‌فاصلهٔ خط راستDE تاصفحهٔ ABC، برابر است با k. B' را تصویر نقطهٔ B برصفحهٔ CDE می گیریم می‌دانیم که: $tg\widehat{B'DE} : tg\widehat{BDE} = l$. ازوسط پاره خط AD ، صفحهٔ P را موازی صفحهٔ ABC می گذرانیم. مطلوب است محاسبهٔ مساحت‌مقطع صفحه P با چندوجهی ABCDE — که ازهرم‌های ABCD و BCDE تشکیل شده است، به شرطی که مساحت وجه ABC برابر S و مجموع مساحت‌های همهٔ وجه‌های هرم BCDE برابر σ باشد.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $\frac{[log_{\sqrt{۲}}(x-۳)]^۲}{x^۲-۴x-۵} \geqslant ۰$ را حل کنید.

۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{cos ۲x} \cdot cos y = ۰ \\ ۲ sin^۲ x - cos\left(۲y - \frac{\pi}{۳}\right) = ۰ \end{cases}$$

۳. دردو ظرف مختلف، مخلوطی ازآب وماسه ریخته‌ایم: در ظرف اول ۱۰۰۰ کیلو گرم ودرظرف دوم ۱۹۶۰ کیلو گرم. به هردوظرف آب اضافه‌می کنیم تا درصد ماسه درظرف‌اول k مرتبه ودرظرف دوم l مرتبه‌کمترشود. دربارهٔ عددهای k و l تنها می‌دانیم: $kl = ۹ - k$. حداقل مقدار آبی راکه دردو ظرف ، روی هم، ریخته‌ایم، پیدا کنید.

۴. پنج ضلعی ABCDE در دایره‌ای محاط شده است. می‌دانیم: $BD \| AE$ ، $\widehat{CAE} = ۲\widehat{CEA}$ ، $\widehat{CBD} - \widehat{CDB} = \alpha$. مطلوب است

محاسبهٔ نسبت محیط مثلث ACE برشعاع دایرهٔ محیطی آن.

۵. پاره خط FG با صفحهٔ پنج‌ضلعی محدب ABCDE موازی است، ضمناً دو نقطهٔ A و G دردو سمت مختلف‌صفحهٔ CBF قرار دارند. درهرم BCFG، کره‌ای محاط کرده‌ایم. نسبت فاصلهٔ مرکز این کره تا خط راست FG ، به فاصلهٔ خط‌راست FG تا صفحهٔ ABCDE برابراست با k. زاویهٔ دووجهی هرم BCFG ، با یال BF ، برابر است با α. می‌دانیم که : $sin\widehat{CFB}$: $sin\widehat{CFG}=1$ ازوسط پاره‌خط AF، صفحه‌ای موازی با صفحهٔ ABCDE گذرانده‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مقطع این صفحه با چند وجهی ABCDEFG ،که از هرم FABCDE به‌رأس F و هرم BCFG تشکیل شده است، به شرطی که مساحت چندوجهی ABCDE برابر S و مجموع مساحت‌های همهٔ وجه‌های هرم BCFG برابر σ باشد.

گروه سوم

۱. نامعادلهٔ $\frac{\sqrt{log_{۲}(x-۱)}}{x^{۲}-۳x-۴}\geqslant ۰$ را حل کنید.

۲. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} cos\,x\sqrt{cos\,y}=۰ \\ cos\,۲x-۲\,cos^{۲}y+۲=۰ \end{cases}$$

۳. در دو بشکه محلول نمك ریخته‌ایم: در اولی ۱۶ کیلو گرم و در دومی ۲۵ کیلو گرم. درهردوبشکه آب می‌ریزیم تاجایی‌که درصد نمك درظرف اول m بار و در ظرف دوم n بار کمتر شود. دربارهٔ عددهای m و n فقط می‌دانیم: $mn=m+n+۳$. حداقل مقدارآبی را ،که دردو بشکه روی هم ریخته‌ایم، پیدا کنید.

۴. دایره‌ای برمثلث ABC محیط شده است. AD و BE را دو وتر موازی فرض کنید. می‌دانیم: پاره خط‌های BC و AD متقاطع‌اند، $\widehat{ECD}=\alpha$ و $\widehat{BAC}=۲\widehat{ABC}$ مطلوب است محاسبهٔ نسبت محیط مثلث ABC، به شعاع دایرهٔ محاطی آن.

۵. درهرم CDEF، یال EF، برصفحهٔ CDF عموداست، چهارضلعی ABCD،

برصفحه‌ای قراردارد که باخط راست EF موازی‌است. درهرم EABCD، با قاعدهٔ چهارضلعی ورأس E، کره‌ای محاط کرده‌ایم. نسبت فاصلهٔ مرکز کره تا خط راست AB ، به‌فاصلهٔ نقطهٔ E تا صفحهٔ ABCD برابر با l ، ونسبت طول پاره‌خط EF ، به‌فاصلهٔ نقطهٔ E تا صفحهٔ ABCD برابر k است. نقطهٔ C' را تصویر نقطهٔ C بر صفحهٔ ABE بگیرید. می‌دانیم که : $tg\,\widehat{C'AB} : tg\,\widehat{CAB} = m$. از وسط پاره خط AE، صفحهٔ P را موازی صفحهٔ BCD رسم می کنیم. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مقطع صفحهٔ P با چندوجهی ABCDEF ــ که ازهرم‌های CDEF و EABCD تشکیل شده است ــ به‌شرطی که مساحت مثلث CDF برابر S ومجموع مساحت‌های همهٔ وجه‌های هرم EABCD برابر σ باشد.

گروه چهارم

۱. نامعادلهٔ $\frac{\sqrt{2x-3}}{\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x+3)} \geqslant 0$ را حل کنید.

۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin 2y - 1} \cdot \sin x = 0 \\ \cos^2 2\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - 2\sin 3x = 0 \end{cases}$$

۳. در دومخزن، مخلوطی از آب و یك آمیزه داریم:درمخزن اول ۹۰۰ کیلو گرم و در مخزن دوم ۱۶۰۰ کیلو گرم. در هردو مخزن آن قدر آب ریخته‌ایم تا درصد آمیزه در مخزن اول r بار و درمخزن دوم s بار پایین بیاید. دربارهٔ عددهای sr ، تنها می‌دانیم: $2rs = 18 - r$. حداقل مقدار آبی که ، روی هم، دردو مخزن ریخته‌ایم ، چقدر است؟

۴. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط شده است، به نحوی که وتر DE موازی با AB و متقاطع با BC شده است. می‌دانیم $\widehat{ACE} = 60^\circ$ و $2\widehat{BDC} + 3\widehat{CBD} = \alpha$. مطلوب است نسبت شعاع دایرهٔ محاطی مثلث BCD برشعاع دایرهٔ محاطی همین مثلث.

۵. چندوجهی ABCDE ، از هرم‌های ABCD و BCDE تشکیل شده است،

ضمناً، خط راست DE با صفحهٔ ABC موازی است. در هرم BCDE کره‌ای محاط کرده‌ایم؛ نسبت فاصلهٔ مرکز این کره تا خط راست DE، به فاصلهٔ خط راست DE تا صفحهٔ ABC، برابر است با k_1. درهرم ABCD هم کرهٔ دیگری محاط کرده‌ایم؛ نسبت فاصلهٔ مرکز آن تا خط راست OB، به فاصلهٔ خط راست DE تا صفحهٔ ABC، برابر است با k_2. زاویهٔ دو وجهی هرم BCDE، با یال AD، برابر β است؛ و می‌دانیم: $sin\widehat{CAD}:sin\widehat{BAC}=1$. از وسط پاره خط AD، صفحهٔ P را موازی با صفحهٔ ABC رسم کرده‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مقطع چندوجهی ABCDE با صفحهٔ P، به‌شرطی که مجموع مساحت‌های همهٔ وجه‌های هرم BCDE برابر σ_1 و مجموع مساحت‌های همهٔ وجه‌های هرم ABCD برابر σ باشد.

§ ۲. دانشکدهٔ ریاضیات محاسبه‌ای و سیبرنتیک

۱۹۷۷

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $۲^{۲x+۱}-۲۱\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x+۳}+۲\geqslant ۰$ را حل کنید.

۲. در مثلثی که یکی اززاویه‌های آن برابر است با تفاضل دوزاویهٔ دیگر، طول ضلع کوچکتر برابر است با ۱ و مجموع مساحت‌های مربع‌هایی که روی دوضلع دیگرساخته شده است، براراست با دوبرابر مساحت دایرهٔ محیطی مثلث. طول ضلع بزرگتر مثلث را پیدا کنید.

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} sin^{۲}(-۲x)-(۳-\sqrt{۲})tg۵y=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \\ tg^{۲}۵y+(۳-\sqrt{۲})sin(-۲x)=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \end{cases}$$

۴. شهرهای A ، B ، C و D چنان‌اند که چهارضلعی ABCD ، محدب است و به‌وسیلهٔ جاده‌های مستقیم AB ، BC ، CD ، AD و AC به‌هم مربوط شده‌اند. طول این جاده‌ها، به‌ترتیب برابراست با ۶ ، ۱۴ ، ۵ ، ۱۵ و ۱۵ کیلومتر. ازیکی ازاین شهرها ، در یك لحظه، سه جهان‌گرد خارج شدند ، که بدون توقف و باسرعت‌های ثابتی حرکت می‌کردند. مسیر این سه‌جهان‌گرد باهم فرق‌دارند و، ضمناً، هرمسیر شامل سه‌جاده است و ازهمهٔ شهرها می‌گذرد. جهان‌گردان اول و دوم ، قبل‌از عبور ازجادهٔ سوم مسیر خود، در یکی ازشهرها به هم رسیدند، و جهان‌گرد سوم ، یك ساعت زودترازجهان‌گردی‌که ، بعدازهمه، مسیر خود را به‌پایان رساند، مسیر خود را تمام‌کرد. سرعت حرکت هر یك ازجهان‌گردان‌را پیداکنید، به‌شرطی‌که سرعت سومی بیشتر از سرعت دومی و به‌اندازهٔ $\frac{1}{2}$ کیلومتر کمتر از سرعت اولی است. ضمناً، سرعت هرسه جهان‌گرد در فاصله بین ۵ کیلومتر تا ۸ کیلومتر درساعت قرار دارد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر α $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ را طوری پیداکنید‌که ، برای هر یك از آن‌ها ، حداقل مقدار تابع

$$f(x)=2x^4+4x^3(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin 2\alpha$$

در فاصلهٔ $-\sin\alpha \leqslant x \leqslant \cos\alpha$ به‌حداقل مقدار خود برسد.

۶. در هرم SABC ، خط راستی‌که یال‌های AC و BS را قطع می‌کند و برآن‌ها عمود است ، ازوسط یال BS می‌گذرد. وجه ASB باوجه BSC هم‌ارز است، ولی مساحت وجه ASC دو برابر مساحت وجه BSC است. نقطهٔ M در داخل هرم واقع است ومجموع فاصله‌های آن ازدو رأس B و S برابر با مجموع فاصله‌های آن از همهٔ وجه‌های هرم. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ M را تارأس B پیداکنیم، به‌شرطی‌که $AC=\sqrt{6}$ و $BS=1$ باشد.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $3^{4-3x}-35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6 \geqslant 0$ را حل کنید.

۲. در مثلثی‌که، یکی از زاویه‌های آن برابر است با مجموع دو زاویهٔ دیگر، طول ضلع کوچکتر برابر است با ۲ ونسبت مساحت مثلث به محیط دایرهٔ

محیطی آن برابر است بـا $\frac{۱}{۴}$ طول ضلع بزرگتر مثلث را پیدا کنید.

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \cos^{۲}۴x+\frac{\sqrt{۲۶}-۲}{۲}tg(-۲y)=\frac{\sqrt{۲۶}-۱}{۴} \\ tg^{۲}(-۲y)-\frac{\sqrt{۲۶}-۲}{۲}\cos۴x=\frac{\sqrt{۲۶}-۱}{۴} \end{cases}$$

۴. مرکزهای P ، Q ، R و S ، طوری قراردارند که مرکز R در داخل مثلث PQS قرارگرفته است؛ این مرکزها به‌وسیلهٔ جاده‌های مستقیم PQ ، QS، SP ، PR و QR به‌هم وصل‌شده‌اند. طول این جاده‌ها، به ترتیب، برابرند ۴۰۰ ، ۶۰۰ ، ۳۰۰ ، ۸۰ و ۴۰۰ کیلومتر. سه اتـومبیل، در یك زمان، از یکی از این مرکزها حرکت کـردند؛ حرکت آن‌ها بدون تـوقف است و سرعت‌هایی ثابت دارند. مسیر همهٔ اتومبیل‌ها بایکدیگر متفاوت است؛ ضمناً، هر مسیر شامل سه جاده است و از همهٔ مرکزها عبور می‌کند. اتـومبیل دوم، قبل از عبور از جادهٔ سوم مسیر خود، با اتومبیل سوم، در یکی از مرکزها، به‌هم می‌رسند. اتومبیل‌های اول و دوم، مسیر خود را در یك مرکز به‌پایان رساندند؛ ضمناً، اولی مسیر خود را، یك ساعت دیرتر از اتومبیلی تمام کرد که قبل ازهمه به‌پایان مسیرخود رسیده بود. مطلوب است سرعت اتومبیل‌ها، به‌شرطی‌که سرعت دومی در هـر ساعت ۱۰ کیلومتر بیشتر از سرعت اولی است و، ضمناً، سرعت همهٔ اتومبیل‌ها در فاصلهٔ بین ۹۵ کیلومتر در ساعت و ۱۲۵ کیلومتر در ساعت قرارداد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر α $\left(\frac{\pi}{۴}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$ را طوری پیدا کنیدکه، برای هر کدام از آن‌ها، حداکثر مقدار تابع

$$f(x)=x^{۴}-۲x^{۲}\sin^{۲}\alpha-۲(۱+\cos\alpha)^{۳}$$

در فاصلهٔ $-(۱+\cos\alpha)\leqslant x\leqslant ۱+\cos\alpha$ به‌حداقل‌مقدار خود برسد.

۶. در هرم SABC ، وجه‌ـهای ASC ، BSC و ASB هم‌ارزند. مجموع فاصله‌های از وسط یال BC تا وجه‌های ASB و ASC برابر $\frac{۲}{۳}$ ارتفاعی از هرم است از رأس S رسم شده بـاشد. نقطهٔ M در داخل هـرم، طوری

قرار گرفته است که نصف مجموع فاصله‌های آن از رأس‌های A ، B و C ، برابر است با مجموع فاصله‌های آن از همهٔ وجه‌های هرم. مطلوب است مساحت کل هرم، به‌شرطی که بدانیم، یال AS برابر $\sqrt{\frac{۳۱}{۱۱}}$ است.

گروه سوم

۱. نامعادلهٔ $۴^{۵+۴x} - ۱۵\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳+۴x} + ۸ \geqslant ۰$ را حل کنید.

۲. در مثلثی، که یکی از زاویه‌های آن برابر تفاضل دوزاویهٔ دیگر است، طول ضلع بزرگتر برابر ۴ ومجموع مساحت دایرهٔ محیطی مثلث با مساحت‌مربعی که روی ضلع کوچکتر ساخته می‌شود، برابر ۲۵ است. طول ضلع کوچکتر را پیدا کنید.

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} sin^{۲}۳x+(۴-\sqrt{۳})cotg(-۷y)=۲\sqrt{۳}-\frac{۳}{۴} \\ cotg^{۲}(-۷y)+(۴-\sqrt{۳})sin۳x=۲\sqrt{۳}-\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

۴. شهرهای A ، B ، C و D طوری قرار گرفته‌اند که چهارضلعی ABCD، یك چهار ضلعی محدب است؛ این شهرها به وسیلهٔ جاده‌های مستقیم AB ، BC، CD ، AD و BD به‌هم مربوط شده‌اند. طول این‌جاده‌ها، به‌ترتیب، برابرند با ۱۵ ، ۵۷ ، ۱۹ ، ۲۹ و ۴۰ کیلومتر. از یکی ازاین شهرها، سه دوچرخه‌سوار، بدون توقف وبا سرعت‌هایی ثابت، حرکت کردند. مسیر هردوچرخه‌سوار از سه جاده تشکیل شده است، از همهٔ شهرها می‌گذرد و طول تمامی مسیر هم از ۱۰۰ کیلومتر تجاوز نمی‌کند. دوچرخه سوار سوم، مسیرخود را $\frac{۵}{۸}$ ساعت زودتر از اولی و $\frac{۲}{۵}$ ساعت دیرتر از دومی، به‌پایان‌رسانید. سرعت دوچرخه‌سوارها را پیدا کنید، به شرطی که سرعت دومی بیشتر از سرعت اولی و به اندازهٔ یك کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت سومی است؛ ضمناً، سرعت همهٔ دوچرخه‌سوارها در محدودهٔ از ۱۵ کیلومتر در ساعت تا ۱۹ کیلومتر در ساعت قرار دارد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant 0\right)$ را طوری پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، حداکثر مقدار تابع

$$f(x)=-9x^4+12x^3(\cos\alpha+\sin\alpha)-9x^2\sin 2\alpha$$

در فاصلهٔ $-\cos\alpha\leqslant x\leqslant-\sin\alpha$، به‌حداکثر مقدار خود برسد.

۶. در هرم SABC ، خط راستی که یال‌های SC و AB را قطع می‌کند و بر آن‌ها عمود است (عمود مشترك این دو خط متنافر) ، از وسط یال SC می‌گذرد. مساحت وجه ASC ، برابر نصف مساحت وجه ABC است. روی وجه BSC ، نقطه M را انتخاب کرده‌ایم؛ مجموع فاصله‌های این نقطه ازدو رأس S و C، برابر است با مجموع فاصله‌های آن از همهٔ بقیهٔ وجه‌های هرم. مطلوب است محاسبهٔ حجم هرم، به‌شرطی که بدانیم:

$AB=2\sqrt{3}$ و $AS=\sqrt{35}$.

گروه چهارم

۱. نامعادلهٔ $5^{5-4x}-2\left(\frac{1}{5}\right)^{3-4x}-5\geqslant 0$ را حل کنید.

۲. مساحت مثلثی، که یکی از زاویه‌های آن برابر مجموع دو زاویهٔ دیگراست، برابر است با مساحت مربعی که روی ضلع کوچکتر ساخته شده است. طول ضلع کوچکتر مثلث را پیدا کنید، به‌شرطی که محیط دایرهٔ محیطی آن برابر ۶ باشد.

۳. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\cos^2(6x)+(\sqrt{5}-1)\cot g(-9y)=\dfrac{2\sqrt{5}-1}{4}\\[2ex]\cot g^2(-9y)+(\sqrt{5}-1)\cos(6x)=\dfrac{2\sqrt{5}-1}{4}\end{cases}$$

۴. مرکزهای K ، L ، M و N طوری قرارگرفته‌اند که مرکز N در داخل مثلث KLM واقع شده است، این مرکزها، به وسیلهٔ جاده‌های مستقیم KL، LM ، MK ، NM و NL به‌هم وصل شده‌اند. طول این جاده‌ها، به‌ترتیب، برابرند با ۱۳۰ ، ۱۴۰ ، ۱۱۰ ، ۹۰ و ۸۰ کیلومتر. در یك لحظه، سه اتومبیل از یکی از مرکزها، بدون توقف و با سرعت‌هایی ثابت، آغاز به حرکت

کردند. مسیر اتومبیل‌ها با هم فرق دارد و ضمناً، هر مسیر از سه‌جاده تشکیل شده است که ازهمهٔ مرکزها می‌گذرند. اتومبیل اول، مسیر خود را همراه با اتومبیل دوم، در یك‌جاده آغازکرد و هنوز بیش از یك چهارم مسیرخود را در جادهٔ دوم طی نکرده بود که با اتومبیل سوم ــ که آن هم جادهٔ دوم مسیر خودرا طی می‌کرد، ملاقات کرد. اتومبیل‌دوم، مسیر خودرا سه ساعت‌زودتر از اتومبیلی به پایان رسانید، که بعد از همه، به انتهای خود رسید. مطلوب است سرعت اتومبیل‌ها، به شرطی که سرعت اولی $\frac{۲}{۳}$ سرعت سومی و ۱۰ کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت دومی باشد. ضمناً، سرعت همهٔ اتومبیل‌ها، در محدودهٔ از ۳۵ کیلومتر تا ۶۵ کیلومتر در ساعت قراردارد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر $\alpha\left(-\frac{\pi}{۴}\leqslant\alpha\leqslant ۰\right)$ را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، حداقل مقدار تابع

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}x^{۴}+x^{۲}\cos^{۲}\alpha+(۱-\sin\alpha)^{۳}$$

دربازهٔ $-(۱-\sin\alpha)\leqslant x\leqslant ۱-\sin\alpha$ به‌حداکثر مقدار خود برسد.

۶. درهرم $SABC$ ، وجه‌های ASC و BSC هم‌ارزند ومجموع مساحت‌های وجه‌های ASB و ABC ، سه برابر مساحت وجه ASC است، شعاع کرهٔ محاطی هرم، برابر است با یك هشتم مجموع فاصله‌های از مرکز کره تا رأس‌های A و B. مطلوب‌است زاویهٔ دو وجهی بین‌وجه‌های ASB و ABC.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $(x-۱)\sqrt{x^{۲}-x-۲}\geqslant ۰$ را حل کنید.

۲. نقطه‌های می‌نیمم این تابع را به‌دست آورید:

$$f(x)=\sqrt{۳}\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲}-\frac{x-۳}{۲}$$

۳. معادلهٔ خط راستی را پیداکنیدکه از نقطه با مختصات $\left(۲\ ,\ \frac{۱}{۲}\right)$ بگذرد،

برنمودار تابع $y(x)=-\frac{x^{2}}{2}+2$ مماس باشد و نمودار تابع $y(x)=\sqrt{4-x^{2}}$ را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند.

۴. مجموعهٔ A ، از عددهای طبیعی مختلفی تشکیل شده است. تعداد عضوهای مجموعهٔ A ، از هفت بیشتر است. کوچکترین مضرب مشترك همهٔ عددهای عضو A، برابراست با ۲۱۰. برای‌هردوعدد عضو A، بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك، از واحد بیشتر است. حاصل‌ضرب همهٔ عددهای عضو A، بر ۱۹۲۰ بخش‌پذیر است و، ضمناً ، مربع هیچ عدد درستی نیست. عضوهای مجموعهٔ A را پیدا کنید.

۵. چهارضلعی محدب ABCE ، قاعدهٔ هرم ABCEH را تشکیل می‌دهد و به‌وسیلهٔ قطر BE به‌دو مثلث با مساحت‌های برابر، تقسیم می‌شود. طول یال AB برابر واحد است و طول‌های دو یال BC و CE بزابرند. مجموع طول‌های دویال AH و EH برابراست با $\sqrt{2}$. حجم هرم برابر $\frac{1}{6}$ است. مطلوب است شعاع کره‌ای که بزرگترین حجم را در میان همه‌کره‌هایی که‌در هرم جا می‌گیرند، داشته باشد.

۶. این معادله را حل کنید:

$$(1+tg^{2}2x)\left(sin\frac{21}{4}x\,cos\frac{7}{4}x+sin\frac{5}{4}x\,cos\frac{x}{4}\right)=$$
$$=séc^{2}2x\left(sin\frac{x}{4}\,cos\frac{5}{4}x-sin\frac{7}{4}x\,cos\frac{21}{4}x\right)$$

۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC با قاعدهٔ AB ، زاویهٔ B برابر است با $arctg\,\frac{8}{15}$. دایرهٔ به‌شعاع‌واحد در زاویهٔ C محاط شده‌است که برضلع CB در نقطهٔ M مماس است و از قاعده، پاره خط KE را جدا می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ مساحت KMB ، به شرطی که $MB=\frac{15}{8}$ باشد و نقطه‌های A ، K ، E و B ، به‌همین ردیف، در روی قاعده قرارگرفته باشند.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $(x-3)\sqrt{x^{2}+x-2}\geqslant 0$ را حل کنید.

۲. نقطه‌های ماکزیمم این تابع را پیدا کنید:

$$f(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}sin۲x+\frac{۱}{۴}cos۲x+\frac{۵-x}{۲}$$

۳. معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که از نقطهٔ با مختصات (۳ ، ۱) عبور می‌کند، بر نمودار تابع $y(x)=۸\sqrt{x}-۷$ مماس است و نمودار تابع $y(x)=x^۲+۴x-۱$ را در دو نقطهٔ مختلف قطع می‌کند.

۴. مجموعهٔ A ، شامل عددهای طبیعی مختلفی است. تعداد عضوهای مجموعهٔ A، از هشت کمتر نیست. کوچکترین مضرب مشترك همهٔ عضوهای مجموعهٔ A، برابر است با ۴۶۲. هردو عدد عضو A، کوچکترین مضرب مشترکی کوچکتر از ۲۵۰ دارند. اگر حاصل‌ضرب همهٔ عددهای عضو A را در ۹ ضرب کنیم، مکعب یك عدد درست به‌دست می‌آید. عضوهای مجموعهٔ A را پیدا کنید.

۵. چهارضلعی محدب MBKH ، قاعدهٔ هرم MBKHE را تشکیل می‌دهد و، در آن، زاویهٔ رأس M برابر $\frac{\pi}{۲}$ وزاویه‌ای که قطرBH بایال BK می‌سازد، برابر $\frac{\pi}{۴}$ است؛ طول یال MB هم برابر واحد است. مساحت مثلث BKH، برابر است با دوبرابر مساحت مثلث MBH. مجموع طول یال‌های BE و HE برابر است با $\sqrt{۳}$. حجم هرم برابر $\frac{۱}{۴}$ است. می‌خواهیم شعاع کره‌ای را محاسبه کنیم که، از بین همهٔ کره‌هایی که درهرم MBKHE جامی گیرند، بیشترین حجم را داشته باشد.

۶. این معادله را حل کنید:

$$\left(۱+tg^۲\frac{x}{۲}\right)\left(sin۴x\,cos۵x-sin\frac{x}{۲}cos\frac{۵}{۲}x\right)=$$

$$=séc^۲\frac{x}{۲}\left(sin\frac{۵}{۲}x\,cos\frac{x}{۲}-sin۵x\,cos۴x\right)$$

۷. در مثلث متساوی‌الساقین MPK با قاعدهٔ MP ، زاویهٔ P برابر است با

$\operatorname{arc}tg\frac{۵}{۱۲}$. دایره‌ای که در زاویهٔ K محاط شده است، برضلع KP درنقطهٔ A مماس است وپاره‌خط HE را ازقاعده جدا می کند مطلوب است‌مساحت مثلث HAE ، به شرطی‌که مرکز دایره، به فاصلـهٔ $\frac{۱۳}{۲۴}$ از رأس K باشد و، ضمناً، داشته باشیم: $AP=\frac{۶}{۵}$.

گروه سوم

۰۱ نامعادلهٔ $(x+۲)\sqrt{x^۲-۲x-۳}\geqslant ۰$ را حل‌کنید.

۰۲ نقطه‌های ماکزیمم این تابع را پیدا کنید:

$$f(x)=\sqrt{۳}\cdot \sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}+\frac{\sqrt{۳}\cdot x-۷}{۲}$$

۰۳ معادلهٔ خط راستی را پیداکنیدکـه از نقطهٔ با مختصات (۱۰ ، ۵) بگذرد، برنمودار تابع $y(x)=-\frac{x^۲}{۴}+۲x+۶$ مماس باشد و نمـودار تـابع $y(x)=۶+\sqrt{۸x-x^۲}$ رادر دو نقطهٔ متمایز قطع‌کند.

۰۴ عضوهای مجموعـهٔ A عبارتند از چند عدد طبیعی مختلف، تعداد عضوهـای مجموعهٔ A ، از هفت بیشتر است . کوچکترین مضرب مشترك عددهای عضو A، برابر است با ۳۹۰. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هـردو عدد عضو A، از واحد بزرگتراست. حاصل‌ضرب‌همهٔ عددهای‌عضو A، بر ۱۶۰ بخش‌پذیر نیست و، ضمناً، توان‌چهارم هیچ عدد درستی هم نمی‌باشد. عضوهای‌مجموعهٔ A را پیدا کنید.

۰۵ چهار ضلعی محدب THPC ، قاعدهٔ هرم THPCK را تشکیل می‌دهد، و به‌وسیلهٔ قطـر HC ، به دو مثلث هم‌ارز تقسیم می‌شود. طول یال TH برابر ۴ و $\cot g\widehat{HCP}=\sqrt{۲}$. مجموع طول دویال TK و CK برابر است با۴. حجم هرم برابر $۵\frac{۱}{۳}$ می‌باشد. شعاع کـره‌ای را پیداکنید کـه، در میان هم کره‌هایی‌که در هرم THPCK جامی گیرند، حداکثر حجم را داشته باشد.

۰۶ این معادله را حل کنید:

$$(1+cotg^2 x)\left(\sin\frac{3}{2}x\cos 2x-\sin\frac{x}{4}\cos\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=cosec^2 x\left(\sin\frac{9}{4}x\cos\frac{x}{4}+\sin 2x\cos\frac{3}{2}x\right)$$

۷. دایرهٔ محیطی مثلث AMB را رسم کرده‌ایم و می‌دانیم که، مرکز آن، به فاصلهٔ ۱۰ از ضلع AM قرار گرفته است. امتداد ضلع AM از طرف رأس M، از مماس در نقطهٔ B بر دایره، پاره خط CB را برابر ۲۹ جدا می‌کند. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلث CMB، به‌شرطی که زاویهٔ ACB برابر $\operatorname{arctg}\frac{20}{21}$ باشد.

گروه چهارم

۱. نامعادلهٔ $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\geqslant 0$ را حل کنید.

۲. نقطه‌های می‌نیمم این تابع را به‌دست آورید:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{1-\sqrt{3}\cdot x}{2}$$

۳. معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که از نقطهٔ به مختصات $\left(0\ ,\ \frac{1}{4}\right)$ بگذرد، بر نمودار تابع $y=3\sqrt{x}-\frac{5}{2}$ مماس باشد و نمودار تابع $y(x)=x^2+6x$ را در دو نقطهٔ جداگانه قطع کند.

۴. مجموعهٔ A، شامل چند عدد طبیعی است. تعداد عضوهای مجموعه، از هشت کمتر نیست. کوچکترین مضرب مشترك همهٔ عددهای عضو A، برابر است ۲۳۰. هیچ دو عضوی از A، نسبت به‌هم اول نیستند. مجموع همهٔ عددهای عضو A، برابر است با ۷۵۵. حاصل ضرب همهٔ عددهای عضو A، توان چهارم هیچ عدد درستی را تشکیل نمی‌دهد. عضوهای مجموعهٔ A را پیدا کنید.

۵. چهارضلعی محدب ABMC، قاعدهٔ هرم ABMCP را تشکیل می‌دهد. زاویهٔ رأس A از این چهارضلعی برابر است با $\frac{\pi}{2}$ زاویه‌ای که قطر CB با

یال BM می‌سازد، برابر است با $\frac{\pi}{۶}$؛ طول یال AB برابر واحد است. مساحت‌مثلث BMC، دوبرابر مساحت‌مثلث ABC است. مجموع‌طول‌های دو یال BP و CP برابر است با $\sqrt{۷}$. حجم هرم برابر $\frac{۳}{۴}$ است. از بین همهٔ کره‌هایی کــه در هرم ABMCP جا می گیرند، شعاع کره‌ای را به دست آورید که دارای حجم حداکثر است.

۶. این معادله را حل کنید:

$$\sin^{۲}۵x\left(\sin ۷x\cos x-\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{۳}{۲}x\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{۳}{۲}x\cos\frac{x}{۲}+\sin x\cos ۷x}{۱+\cot g^{۲}۵x}$$

۷. دایرهٔ به‌شعاع ۱، برمثلث APK محیط شده‌است. امتدادضلع AP ازطرف رأس P، از مماس بردایره درنقطهٔ K، پاره خط BK را، به‌طول ۷، جدا کرده است. مساحت مثلث APK را پیدا کنید، به شرطی که زاویهٔ ABK برابر $\operatorname{arctg}\frac{۲}{۷}$ باشد.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. نقطه‌هــای اکستره‌مم (مـاکزیمم یا می‌نیمم) تـابــع زیـر را، در بازهٔ $\left(-۵ , \frac{۱}{۵}\right)$ پیدا کنید:

$$f(x)=x^{۳}+۶x^{۲}-۳x+۳$$

۲. معادلهٔ $۲۵^{۳x-۴}=۵^{|۴x-۶|}$ را حل کنید.

۳. چهارضلعی ABCD، دردایره‌ای محاط شده‌است. قطرهای این چهارضلعی، برهم عمود، و درنقطهٔ E به‌هم می‌رسند. خط راستی که از نقطهٔ E می گذرد

و بر AB عمود است، ضلع CD را درنقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که EM ، میانهٔ مثلث CED است و طـول آن را پیدا کنید ، بـه شرطی کـه

$|AD| = ۸^{cm}$ ، $|AB| = ۴^{cm}$ و $\widehat{CDB} = \alpha$.

۴. همهٔ ریشه‌های صحیح این معادله را پیدا کنید:

$$\cos\left[\frac{\pi}{۸}\left(۳x - \sqrt{۹x^۲ + ۱۶۰x + ۸۰۰}\right)\right] = ۱$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ

$$\left(a - x^۲ - \cos\frac{۱۱\pi x}{۴}\right)\sqrt{۸ - ax} = ۰$$

در بازهٔ $[-۲ ، ۳]$ ، به‌تعداد فرد ، ریشه‌های متمایز داشته باشد.

۶. یك تصاعدعددی و یك تصاعد هندسی داده شده‌است. جملهٔ اول تصاعدعددی برابر ۳ و قدر نسبت آن برابر ۶ می‌باشد. جملهٔ اول تصاعد هندسی برابر ۳ و قدر نسبت آن برابر $\sqrt{۲}$ است. کـدام بزرگترند: مجموع شش جملهٔ اول تصاعد عددی ، یا مجموع هشت جملهٔ اول تصاعد هندسی؟

گروه دوم

۱. نقطه‌های اکسترمم این تابع را ، در بازهٔ $\left(-۴ ، \frac{۸}{۵}\right)$ پیدا کنید:

$$f(x) = -x^۳ - ۳x^۲ + ۱۸x - ۲$$

۲. معادلهٔ $۹^{۲x-۲} = ۳^{|۳x-۴|}$ را حل کنید.

۳. قطرهای چهـار ضلعی $MNPQ$ برهم عمود و در نقطهٔ F یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط راستی که از نقطهٔ F و وسط ضلع NP گذشته است MQ را درنقطهٔ H قطع‌می‌کند. ثابت‌کنید که FH ارتفاع مثلث MFQ است وطول آن را پیدا کنید ، بـه شرطی کـه $|PQ| = ۶^{cm}$ ، $|NF| = ۵^{cm}$ و $\widehat{MQN} = \alpha$.

۴. همهٔ ریشه‌های صحیح این معادله را به‌دست‌آورید:

$$\cos\left[\frac{\pi}{۱۰}\left(۳x - \sqrt{۹x^۲ + ۸۰x - ۴۰}\right)\right] = ۱$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، تعداد جواب‌های معادله

$$\left(a-۳x^{۲}+\cos\frac{۹\pi x}{۲}\right)\sqrt{۳-ax}=۰$$

در بازهٔ [۵ ، ۱ −]، فرد باشد.

۶. جملهٔ اول یک تصاعد عددی برابر ۶ و قدر نسبت آن برابر ۲ می‌باشد. همچنین، جملهٔ اول یک تصاعد هندسی برابر ۳ و قدر نسبت آن برابر $\sqrt{۳}$ است. کدام بیشترند: مجموع هشت جملهٔ تصاعد عددی یا مجموع شش جملهٔ تصاعد هندسی؟

گروه سوم

۱. نقطه‌های اکسترمم تابع زیر را، در بازهٔ $\left(-\frac{۶}{۵}\ \text{و}\ ۴\right)$ پیدا کنید.

$$f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}-۱۲x-۴$$

۲. معادلهٔ $۲۵^{|۱-۲x|}=۵^{۴-۶x}$ را حل کنید.

۳. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است؛ قطرهای آن برهم عمود و در نقطهٔ E به‌هم می‌رسند. خط راستی که از نقطهٔ E می گذرد و بر BC عمود است، ضلع AD را درنقطهٔ M قطع می کند. ثابت کنید که EM میانهٔ مثلث AED است و طول آن‌را پیدا کنید، به‌شرطی که $|AB|=۷^{cm}$، $|CE|=۳^{cm}$ و $\widehat{ADB}=\alpha$.

۴. همهٔ ریشه‌های درست این‌معادله را پیدا کنید:

$$\cos\left[\frac{\pi}{۲}\left(۳x+\sqrt{۹x^{۲}+۲۲۴x+۱۴۱۶}\right)\right]=۱$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید، به‌نحوی که، برای هریک از آن‌ها، معادلهٔ

$$\left(a-x^{۲}+\cos\frac{۱۳\pi x}{۴}\right)\sqrt{۸+ax}=۰$$

در بازهٔ [۲ ,۵ −]، به‌تعداد فرد، ریشه‌های متمایز داشته‌باشد.

۶. در یک تصاعد عددی، جملهٔ اول برابر ۳ و قدر نسبت برابر ۳؛ و در یک تصاعد

هندسی، جملهٔ اول برابر ۵ وقدر نسبت برابر $\sqrt{۲}$ است. کدام بزرگترند: مجموع هفت‌جملهٔ اول تصاعد عددی یامجموع شش‌جملهٔ اول تصاعدهندسی؟

گروه چهارم

۱. نقطه‌های اکسترمم تابع زیر را در بازهٔ $\left(۵\ ,\ -\frac{۳}{۵}\right)$ پیدا کنید:

$$f(x)=-x^{۳}+۶x^{۲}+۹x+۱$$

۲. معادلهٔ $۹^{|۳x-۱|}=۳^{۸x-۲}$ را حل کنید.

۳. درچهارضلعی محاطی MNPQ ، دوقطر برهم عموداند و در نقطهٔ F به‌هم رسیده‌اند. خط‌راستی که ازنقطهٔ F و وسط‌ضلع MN گذشته‌است، ضلع PQ را درنقطهٔ H قطع می‌کند. ثابت‌کنید، FH ارتفاع مثلث PFQ است و طول آن‌را، باشرط $|MN|=۴^{cm}$ ،$|MQ|=۷^{cm}$ و $\widehat{MPQ}=\alpha$ ، پیدا کنید.

۴. همهٔ ریشه‌های درست این‌معادله را پیدا کنید:

$$\cos\left[\frac{\pi}{۴}\left(۳x-\sqrt{۹x^{۲}-۱۶x-۸۰}\right)\right]=۱$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که ، برای هرکدام ازآن‌ها ، تعداد جواب‌های معادلهٔ:

$$\left(a-۵x^{۲}-\cos\frac{۱۵\pi x}{۲}\right)\sqrt{۵+ax}=۰$$

در بازهٔ $[۱\ ,\ -۳]$، عددی فرد باشد.

۶. یك‌تصاعد عددی ویك تصاعد هندسی داده شده است. درتصاعد عددی،جملهٔ اول برابر ۸ وقدر نسبت برابر ۷ ، ودر تصاعد هندسی ، جملهٔ اول برابر ۱ وقدر نسبت برابر $\sqrt{۳}$ است. کدام بزرگتر است : مجموع پنج جملهٔ اول تصاعد عددی، یا مجموع هشت جملهٔ اول تصاعد هندسی؟

۱۹۸۰

گروه اول

۱. اگر داشته‌باشیم $\sin\alpha=\frac{۱}{۳}$ ، مطلوب است محاسبهٔ $\cos ۲\alpha$.

۲. معادلهٔ $\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$ را حل کنید.

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، از رأس زاویهٔ قائمهٔ B، ارتفاع BD را بر وتر AC رسم کرده‌ایم . می‌دانیم: $|AB| = 13$ و $|BD| = 12$. مساحت مثلث ABC را به‌دست‌آورید.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها ، معادلهٔ زیر دارای دوریشهٔ متمایز باشد:

$$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$$

۵. دونقطه، با سرعت‌های ثابتی، روی محیط دودایره حرکت می کنند ؛ این دو دایره در یك صفحه قرار دارند و مرکز آن‌ها مشترك است. حرکت یکی از نقطه‌ها درجهت حرکت عقربه‌های ساعت و حرکت دیگری در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌است. درلحظهٔ آغاز حرکت، دونقطه ومرکز مشترك دایره‌ها، روی یك‌خط راست قرار دارند وفاصلهٔ بین‌دونقطه برابر است با $\frac{16}{7}$ سانتیمتر. بعد از آغاز حرکت، فاصلهٔ بین‌نقطه‌ها، ابتداکاهش می‌یابد و بعد از ۱۱ ثانیه برابر $\frac{\sqrt{207}}{7}$ سانتیمتر می‌شود. به‌جزاین، درمحدودهٔ ۱۱ ثانیه ، دو لحظه وجود داردکه فاصلهٔ بین‌دونقطه برابر $\frac{\sqrt{158}}{7}$ سانتیمتر می‌شود ودر فاصلهٔ زمانی بین این‌دولحظه، دیگر هرگز فاصلهٔ بین دونقطه برابر $\frac{\sqrt{158}}{7}$ نمی‌شود. کمترین فاصلهٔ بین دو نقطه را پیداکنید.

۶. در هرم SABC ، مجموع طول یال‌هایی که دریك رأس به‌هم می‌رسند، در هرحالت، برابر یك‌عدد است. مقدار زاویهٔ منفرجهٔ بین یال‌های SB و AC برابر است با $\arc\cos\left(-\frac{1}{3}\right)$. شعاع کرهٔ محاط درهرم، برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{13}$ و $|SA|^2+|SC|^2=12$. مطلوب است حجم هرم SABC ، به‌شرطی که بدانیم، این‌حجم، از $\frac{5}{3}$ تجاوز نمی کند.

۱. اگر داشته باشیم: $\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$، مقدار $\cos ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

۲. معادلهٔ $\sin ۲x - \sqrt{۲}\sin x = ۰$ را حل کنید.

۳. ارتفاع AH را، از رأس زاویهٔ قائمهٔ A در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، بر وتر BC رسم کرده‌ایم. می‌دانیم: $|AC| = ۵$ و $|HC| = ۳$. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلث ABC.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ

$$(۲a-۱)x^۲ + ax + ۲a - ۳ = ۰$$

بیش از یک ریشه نداشته باشد.

۵. دو نقطه با سرعت‌هایی ثابت، روی محیط‌های دو دایرهٔ متفاوت، ولی هم‌مرکز و واقع بر یک صفحه، حرکت می‌کنند. حرکت نقطه‌ها، یکی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و دیگری در خلاف این جهت، انجام می‌گیرد. در ابتدای حرکت، پاره‌خط‌هایی که هر یک از دو نقطه را به مرکز مشترک دایره وصل می‌کنند، برهم عمودند و فاصلهٔ بین دو نقطه برابر است با $\sqrt{۱۰}$ متر. بعد از آغاز حرکت، فاصلهٔ بین نقطه‌ها ابتدا بزرگ می‌شود و بعد از ۸ دقیقه به $\frac{\sqrt{۲۵۰+۲۷\sqrt{۱۹}}}{۵}$ متر می‌رسد. علاوه بر آن، در محدودهٔ این ۸ دقیقه، دو لحظه وجود دارد که فاصلهٔ بین نقطه‌ها برابر $\sqrt{\frac{۷۷}{۵}}$ متر می‌شود و، ضمناً، در فاصلهٔ زمانی بین این دو لحظه، دیگر هرگز فاصلهٔ بین دو نقطه، برابر $\sqrt{\frac{۷۷}{۵}}$ متر نمی‌شود. محیط دایرهٔ بزرگتر را پیدا کنید.

۶. در هرم SABC، حاصل‌ضرب طول یال‌های وارد بر یک راس، مقداری است ثابت و برای هر راس، با یک عدد بیان می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ بین یال SA و وجه ABC برابر است با $\arcsin\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$، و فاصلهٔ بین یال‌های SC و AB برابر است با ۱. مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی هرم، به‌شرطی که بدانیم، این مساحت از ۴ کمتر نیست و داریم:

$$۳|SA|^۲ + |SC|^۲ = ۳|SB|^۲$$

۱. اگر داشته باشیم: $sin\alpha=\frac{۲}{۳}$ ، مطلوب است محاسبهٔ $cos ۲\alpha$.

۲. معادلهٔ $sin ۲x+\sqrt{۲}\,cos x=۰$ را حل کنید.

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $\left(B=\frac{\pi}{۲}\right)$ ، ارتفاع BK را بروتر AC رسم کرده‌ایم. می‌دانیم $|AK|=۵$ و $|AB|=۱۳$. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید، طوری که، برای هریك از آن‌ها ، معادلهٔ زیر دارای دوریشهٔ متفاوت باشد:

$$(۲a+۱)x^۲-ax+a-۲=۰$$

۵. دو نقطه روی محیط دو دایرهٔ مختلف هم‌مرکز و واقع بر یك صفحه، با سرعت‌های ثابت حرکت می‌کنند. یکی از حرکت‌ها در جهت، و دیگری در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. در لحظهٔ آغاز حرکت، دو نقطه و مرکز مشترك دایره‌ها، روی یك‌خط راست قراردارند. با آغازحرکت، ابتدا فاصلهٔ بین نقطه‌ها کم‌شد و بعد از ۷ دقیقه به ۵ متر رسید. بعد ازمدتی، درلحظهٔ t (t، معلوم نیست) ، دوباره فاصلهٔ بین دونقطه برابر ۵ متر شد. ضمناً ، در فاصلهٔ زمانی بین این‌لحظه، دیگر فاصلهٔ بین دونقطه، هرگز برابر ۵ متر نشده است. ۱۰/۵ دقیقه بعد از لحظهٔ t ، فاصلهٔ بین دو نقطه برابر ۳ مترشد. مساحت لوزی که قطرهای آن برابر باشعاع‌های دایره‌های مفروض باشد، ۲ متر مربع است. تانژانت زاویهٔ حادهٔ لوزی‌را پیدا کنید.

۶. درهرم SABC ، مجموع یال‌های هریك از چهار وجه، مقداری ثابت و برای هرچهار وجه یکی است. مقدار زاویهٔ بین دو وجه SCB و ACB برابر $arc\ cos\ \frac{۳۱}{۴۹}$ و طول ارتفاع مثلث ABC ، که از B بر AC فرودآید، برابر با $\frac{۷}{\sqrt{۵}}$ است. مطلوب است حجم هرم SABC به‌شرطی که داشته‌باشیم:

$$|SA|^۲-|SB|^۲=۵$$

۱. اگر داشته باشیم $cos\alpha = \frac{۳}{۴}$، مقدار $cos ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

۲. معادلهٔ $sin ۲x + \sqrt{۳} sin x = ۰$ را حل کنید.

۳. ارتفاع CN را بروتر AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC رسم کرده‌ایم. می‌دانیم: $|BC| = ۵$ ، $|CN| = ۴$. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ

$$(a+۱)x^۲ - ax + (a-۳) = ۰$$

بیش از یك ریشه نداشته باشد.

۵. دونقطه، روی محیط دو دایرهٔ مختلف، که در یك صفحه واقع‌اند و دارای مرکز مشترکی هستند، با سرعت‌های ثابت و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت می‌کنند. در لحظهٔ آغاز حرکت، دونقطهٔ مفروض و مرکز مشترك دودایره، بریك خط راست واقع‌اند. بعد از آغاز حرکت، فاصلهٔ بین دونقطه افزایش می‌یابد و بعد از ۳ ثانیه به $\frac{۳}{۲}$ سانتیمتر می‌رسد. سپس، بازهم، فاصلهٔ بین دونقطه، افزایش خود را ادامه می‌دهد تا برای نخستین‌بار به ۲ سانتیمتر برسد؛ درجریان ۳ ثانیه بعدی، فاصلهٔ بین‌دونقطه از ۲ سانتیمتر کمتر نمی‌شود، ولی بعد از آن، دوباره از ۲ سانتیمتر کمتر می‌شود. مساحت لوزی که، طول قطرهای آن برابر محیط دایره‌های مفروض باشد، برابراست با $۲\pi^۲$ سانتیمترمربع. تانژانت زاویهٔ منفرجهٔ لوزی‌را پیدا کنید.

۶. درهرم SABC ، حاصل‌ضرب طول یال‌های هریك ازچهاروجه، مقداری است ثابت و، برای هرچهاروجه، یکی است. طول ارتفاع هرم، که از S برقاعدهٔ ABC فرودآمده، برابر است با $۲\sqrt{\frac{۱۰۲}{۵۵}}$ ومقدارزاویهٔ CAB برابر است با $\arccos\left(\frac{۱}{۶}\sqrt{\frac{۱۷}{۲}}\right)$. حجم هرم SABC را پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$|SA|^۲ + |SB|^۲ - ۵|SC|^۲ = ۶۰$$

۱۹۸۱

گروه اول

۱. سه‌ماشین علف‌چینی در زمینی به‌مساحت ۲۵ هکتار، به‌کار مشغول‌اند. ماشین اول، در هرساعت ۳ هکتار، دومی b هکتار کمتر از اولی و سومی $۲b$ هکتار بیشتر از اولی درو می‌کنند. ابتدا دو ماشین اولی ودومی، با هم، کار راآغازکردند و ۱۱ هکتار علف را چیدند، سپس، برای علف‌چینی بقیهٔ زمین، دو ماشین اولی وسومی به‌کار مشغول شدند. مقدار b $(۰ < b < ۱)$ را طوری پیدا کنید که تمامی‌کار در ۴ ساعت به‌پایان برسد، به‌شرطی که، کار بدون وقفه ادامه داشته باشد.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳x-۵}}=(۳x-۵)^{\log_{\frac{۱}{۲۵}}(۲+۵x-x^۲)}$$

۳. در مثلث ABC، مقدار زاویهٔ BAC برابر $\frac{\pi}{۳}$، طول وارتفاع وارد ازرأس C بر ضلع AB برابر $\sqrt{۳}$ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر ۵ سانتیمتر است. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلع‌های‌مثلث .

۴. برای هرمقدار پارامتر a ، همهٔ x هایی را پیدا کنید که در برابری زیر صدق کنند:

$$[۱+(a+۲)^۲]\log_۳(۲x-x^۲)+[۱+(۳a-۱)^۲]\log_{۱۱}\left(۱-\frac{x^۲}{۲}\right)=$$
$$=\log_۳(۲x-x^۲)+\log_{۱۱}\left(۱-\frac{x^۲}{۲}\right)$$

۵. همهٔ جواب‌های این‌معادله را ، باشرط $|x| \leqslant ۲\pi$، پیدا کنید:

$$|\sin(۲x-۱)|=\cos x$$

۶. در هرم $SABC$، مساحت وجه ASB برابر $\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}$ ومقدار زاویهٔ BCS برابر $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{۲۳۱}}{۳۷}$ است و، ضمناً: $|AS|=|SB|$ و $|SC|\cdot|AC|=۲۰$ می‌دانیم، عمودهایی که از مرکز دایرهٔ محاطی هروجه، برآن وجه اخراج

شود، در یک‌نقطه به‌هم می‌رسند. حجم هرم SABC را پیدا کنید.

گروه دوم

۱. سه‌ماشین خاک برداری، برای کندن گودال مربوط به‌پی‌ساختمانی به‌حجم ۳۴۰ متر مکعب مشغول به‌کارند. در هرساعت، ماشین اولی می‌تواند ۴۰ مترمکعب زمین را خاک‌برداری کند، دومی c مترمکعب کمتر از اولی وسومی $2c$ متر مکعب بیشتر از اولی. ابتدا ماشین‌های اول ودوم باهم، به‌کار مشغول شدند و ۱۴۰ مترمکعب خاک‌برداری کردند. بعد، ماشین‌های اول و سوم، با هم، کار را ادامه دادند. مقدار c $(0<c<15)$ را طوری پیدا کنید که همهٔ کار در ۴ ساعت تمام شود، به‌شرطی که‌کار، بدون وقفه، ادامه داشته‌باشد.

۲. مطلوب است حل معادلهٔ

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=(2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)}$$

۳. درمثلث ABC، طول ضلع BC برابر ۲ سانتیمتر، طول ارتفاع وارد ازراس C برضلع AB برابر $\sqrt{2}$ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، برابر $\sqrt{5}$ سانتیمتر است. طول ضلع‌های AB و AC مثلث را محاسبه کنید، به‌شرطی که ABC، زاویه‌ای حاده باشد.

۴. برای هریک از مقدارهای پارامتر a، همهٔ x ها را طوری پیدا کنید که در برابری زیر صدق کنند:

$$[1+(3a+4)^2]\log_2(-2x-x^2)+[1+(a-2)^2]\log_7\left(1-\frac{x^2}{3}\right)=$$

$$=\log_7\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+\log_2(-2x-x^2)$$

۵. همهٔ جواب‌های این معادله را، که با شرط $|x|\leqslant\frac{3}{2}\pi$ سازگارند، پیدا کنید:

$$|\cos x|+\sin(2x+3)=0$$

۶. در هرم MNPQ، طول میانه‌ای از وجه MNQ که از راس N گذشته است، برابر $\sqrt{17}$، مقدار زاویهٔ بین یال PQ ووجه MPN برابر است با $\arcsin\frac{1}{4}\sqrt{\frac{71}{5}}$. به‌جزآن

$$|PQ|=|QN|-\frac{۱}{۲}|MP|;\ |MP|=|NP|\ ;\ |MQ|>\frac{۳}{۲}|PN|$$

می‌دانیم، مرکزهای دایره‌های محاطی هردووجه، بایکی از یال‌های هرم در یك صفحه قراردارند. مطلوب‌است طول ارتفاع هرم MNPQ که ازراس N گذشته است.

گروه سوم

۱. سه‌اتومبیل در حمل ۴۲ تن بار شرکت دارند. در هرساعت، اتومبیل اول می‌تواند ۵ تن بار را جابه‌جا کند، دومی d تن کمتر از اولی وسومی ۲d تن بیشتر از اولی. ابتدا، دو اتومبیل اول ودوم شروع به‌کار و ۱۸ تن بار را با هم، حمل کردند. بقیهٔ بار را، اولی وسومی باهم جابه‌جا کردند. مقدار d ($۰<d<۲$) را طوری پیدا کنید که تمامی بار در مدت ۴ ساعت منتقل شود، به‌شرطی که، کار بدون وقفه، انجام گیرد.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۴x-۳}}=(۴x-۳)^{\log_{\frac{۱}{۹}}(۲+۵x-x^۲)}$$

۳. در مثلث ABC ، طول ضلع AB برابر ۵ سانتیمتر، اندازهٔ زاویهٔ ABC برابر $\frac{\pi}{۳}$ و شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر $\frac{۷\sqrt{۳}}{۳}$ است. مطلوب است طول ضلع‌های AC و BC از این مثلث.

۴. برای هریك از مقدارهای پارامتر a ، همهٔ x هایی‌راپیداکنید که دربرابری زیر صدق می‌کنند:

$$[۱+(\alpha-۱)^۲]\log_۶(۴x-۴x^۲)+[۱+(۴\alpha+۳)^۲]\log_۵(۱-۳x^۲)=$$
$$=\log_۶(۴x-۴x^۲)+\log_۵(۱-۳x^۲)$$

۵. همهٔ جواب‌های این‌معادله را پیداکنید که باشرط $|x|\leqslant ۲\pi$ سازگارباشند:

$$|\cos(۲x-۳)|=\sin x$$

۶. در هرم SABC ، طول ارتفاعی از وجه ABC که از راس B گذشته است، برابر $\frac{\sqrt{۳۵}}{۶}$ وحجم هرم SABC برابر $\frac{\sqrt{۱۱۹}}{۱۲}|AB|^۳$ است.

به‌جز آن می‌دانیم: $|CS|=|AB|+|AC|$ ، $|AS|=|SB|$. در هر یك از وجه‌ها ، از نقطهٔ برخورد نیمسازها ، عمودی بر آن وجه اخراج کرده‌ایم . می‌دانیم که این عمودها، در یك‌نقطه به‌هم می‌رسند. مساحت وجه SBC را محاسبه‌کنید.

گروه چهارم

۱. سه‌تراکتور باید زمینی به‌مساحت ۴۰ هکتار را شخم بزنند . در هر ساعت، تراکتور اول ۳ هکتار زمین را شخم می‌زند، دومی a هکتار کمتر و سومی ۲a هکتار بیشتر ازاولی. ابتدا، تراکتورهای اول و دوم باکار همزمان، ۲۰ هکتار از زمین را شخم زدند . سپس ، در بقیهٔ زمین ، هرسه تراکتور با هم به‌کار پرداختند. مقدار a ($0<a<2$) را طوری پیداکنیدکه، به‌ازای آن، شخم تمامی زمین در ۶ ساعت به‌پایان برسد، با این شرط که‌کار، بدون وقفه، ادامه داشته‌باشد.

۲. این معادله را حل‌کنید :

$$\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=(2x-3)^{\log_{\frac{1}{16}}(9x-x^2+1)}$$

۳. در مثلث ABC ، طول ضلع‌های AB و AC ، به‌ترتیب $\sqrt{10}$ سانتیمتر و $\sqrt{2}$ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر $\sqrt{5}$ سانتیمتر است . مطلوب است محاسبهٔ طول ضلع BC و اندازهٔ زاویهٔ ACB ، به‌شرطی که زاویهٔ ACB حاده باشد.

۴. برای هرمقدار از پارامتر a ، همهٔ x هایی را پیداکنید که در این برابری صدق‌کنند:

$$\begin{aligned}&[1+(3a-2)^2]\log_3(-4x-4x^2)+\\&\quad+[1+(a+1)^2]\log_7(1-2x^2)=\\&\quad=\log_3(-4x-4x^2)+\log_7(1-2x^2)\end{aligned}$$

۵. همهٔ جواب‌های این‌معادله را پیداکنید (با شرط $|x|\leqslant\frac{3}{2}\pi$):

$$|\sin x|+\cos(2x+1)=0$$

۶. در هرم MNPQ ، طول نیمساز زاویهٔ MPQ برابر $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و فاصلهٔ بین وسط یال‌های MP و NQ برابر $\frac{\sqrt{145}}{12}$ است. به‌جز آن،

$$|MP| = |PN| \text{ ، } |PN| + |QN| = ۲|PQ|$$

a مرکز دایرهٔ محاطی هروجه را به‌رأسی که براین وجه واقع نیست وصل کرده‌ایم؛ می‌دانیم که این سه‌خط راست ، از یك‌نقطه می گذرند. حجم هرم MNPQ را پیدا کنید.

۳§. دانشکدهٔ فیزیك

۱۹۷۷

گروه اول

۱. معادلهٔ $sin^۲x = \frac{۳}{۴}$ را حل کنید .

۲. مساحت شکل محدود به‌خط $y = ۰$ و منحنی $y = ۲۰ - ۲x^۲ - ۶x$ را پیدا کنید.

۳. مطلوب است جمله‌های منفی دنبالهٔ

$$x_n = \frac{A^۴_{n+۴}}{P_{n+۲}} - \frac{۱۴۳}{۴P_n} \quad (n = ۱،۲،۳،...)$$

که درآن ، $A^۴_{n+۴}$ تعداد ترتیب‌ها (جایگشت‌ها) و $P_{n+۲}$ و P_n تعداد تبدیل‌ها (جاوشتش‌ها) است.

۴. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی داریم که هم‌می‌توان دایره درآن‌محاط وهم‌دایره‌ای برآن محیط کرد. نسبت‌ارتفاع ذوزنقه، به‌شعاع دایرهٔ محیطی آن، برابراست با $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$. زاویه‌های ذوزنقه را پیدا کنید.

۵. طول یال مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ $(AA_۱ \| BB_۱ \| CC_۱ \| DD_۱)$ برابر است با ۱. روی یال $AA_۱$، نقطهٔ E را طوری انتخاب کرده‌ایم که‌طول پاره‌خط AE برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد. همچنین ، روی یال BC، نقطهٔ F را طوری گرفته‌ایم که طول پاره‌خط BF برابر $\frac{۱}{۴}$ بشود. صفحهٔ α رااز مرکز مکعب ودونقطهٔ E

و F گذرانده‌ایم. فاصلهٔ راس B_1 تاصفحهٔ α را پیدا کنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنیدکه، برای هرکدام از آن‌ها، عددهای x و y، که دردستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

صدق می‌کنند، ضمناً با نامعادلهٔ $x>y$ هم‌سازگار باشند.

۷. نامعادلهٔ $\log_7 x-\log_x\left(\frac{1}{7}\right)\geqslant 2$ را حل کنید.

گروه دو

۱. معادلهٔ $tg^2x=\frac{1}{3}$ را حل کنید.

۲. مساحت محصور بین منحنی $y=5x-x^2+14$ وخط $y=0$ را محاسبه کنید.

۳. در دنبالهٔ زیر، چند عدد منفی وجود دارد:

$$x_n=C_{n+5}^4-\frac{195C_{n+3}^n}{16n+1}\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

که درآن، C_{n+5}^4 و C_{n+3}^n تعداد ترکیب‌ها (همگیری‌ها) است.

۴. محیط دایرهٔ محیطی یک‌مثلث متساوی‌الساقین، دوبرابر محیط دایرهٔ محاط در این مثلث است. زاویه‌های مثلث‌را پیدا کنید.

۵. طول یال مکعب $KLMNK_1L_1M_1N_1$ $(KK_1\|LL_1\|MM_1\|NN_1)$ برابر است با ۱ واحد. روی یال MM_1، نقطهٔ A وروی یال K_1N_1، نقطه B را طوری انتخاب کرده‌ایم کـه طول پاره‌خط AM برابر $\frac{3}{5}$ و طول پاره‌خط K_1B برابر $\frac{1}{3}$ باشد. ازمرکز مکعب ونقطه‌های A و B، صفحهٔ α راگذرانده‌ایم. تصویر راس N برصفحهٔ α را، نقطهٔ P می‌گیریم. طول پاره‌خط BP را پیدا کنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر b را طوری پیدا کنیدکه ، برای هریک از آن‌هـا ،

عددهای x و y ، که دردستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} ۲x+y=b+۲ \\ x-y=b \end{cases}$$

صدق می‌کنند، ضمناً با نامعادلهٔ $x-y<۰$ هم‌سازگار باشند.

۷. نامعادلهٔ $۲\log_۵\sqrt{x}-۲\geqslant \log_x\left(\frac{۱}{۵}\right)$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\cos^۲x=\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

۲. مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های زیررا پیداکنید:

$$y=۰ \text{ ، } y=۲۴-۲x-۲x^۲$$

۳. چند جملهٔ مثبت، در این دنباله وجود دارد؟

$$x_n=\frac{۱۹۵}{۴P_n}-\frac{A_{n+۳}^۳}{P_{n+۱}} \quad (n=۱،۲،۳،...)$$

که درآن، $A_{n+۳}^۳$ تعداد ترتیب‌ها و P_n و $P_{n+۱}$ تعداد تبدیل‌ها است.

۴. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی داریم که هم محاطی است و هم محیطی. مساحت دایرهٔ محیطی‌آن،۱۲ برابر مساحت دایرهٔ محاطی‌آن‌است. زاویه‌های ذوزنقه را پیداکنید.

۵. طول یال مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ $(AA_۱\|BB_۱\|CC_۱\|DD_۱)$ برابر است با ۱. نقطهٔ E را روی یال BC و نقطهٔ F را روی یال $C_۱D_۱$ طوری انتخاب‌کرده‌ایم که طول پاره‌خط BE برابر $\frac{۱}{۴}$ و طول پاره‌خط $FD_۱$ برابر $\frac{۲}{۵}$ باشد. ازمرکز مکعب ونقطه‌های E و F، صفحهٔ α را عبورداده‌ایم. مطلوب است فاصلهٔ راس $A_۱$ تا صفحهٔ α.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر c را طوری پیداکنیدکه، برای هریك ازآن‌ها، عددهای x و y که دردستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x+7y=c \\ 2x-y=5 \end{cases}$$

صدق می‌کنند، در نامعادلهٔ $x>y-2$ هم صادق باشند.

۷. نامعادلهٔ $\log_x\left(\frac{1}{4}\right)+\log_4\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant -2$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\cot g^2 x=3$ را حل کنید.

۲. مساحت شکل محدود به‌نمودار منحنی‌های زیررا به‌دست‌آورید:

$$y=3x+18-x^2 ,\ y=0$$

۳. در دنبالهٔ زیر، چندجملهٔ مثبت وجود دارد؟

$$x_n=C_{n+5}^4-\frac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}} \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

که درآن C_{n+5}^4 تعداد ترکیب‌ها و P_{n+5} و P_{n+2} تعداد تبدیل‌ها است.

۴. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقینی ، یک‌چهارم شعاع دایرهٔ محیطی آن است. زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

۵. طول یال مکعب $KLMNK_1L_1M_1N_1 (KK_1\|LL_1\|MM_1\|NN_1)$ برابر است با ۱. نقطهٔ A را روی یال KL ونقطهٔ B را روی یال MM_1 طوری انتخاب کرده‌ایم که پاره‌خط AL برابر $\frac{3}{4}$ وپاره‌خط MB برابر $\frac{3}{5}$ باشد. از مرکز کره ونقطه‌های A و B ، صفحهٔ α را عبور داده‌ایم. طول پاره‌خط BP را پیدا کنید، به‌شرطی‌که P تصویر نقطهٔ N برصفحهٔ α باشد.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید، به‌نحوی که، برای هر کدام از آن‌ها، عددهای x و y، که دردستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x-2y=2a \\ 3x+5y=4 \end{cases}$$

صدق می‌کنند، با نابرابری $x+y>0$ هم سازگار باشند.

۷. نامعادلهٔ $log_x ۳ - ۴ \geqslant ۴ log_{\frac{۱}{۳}} x$ را حل کنید.

گروه پنجم

۱. معادلهٔ $sin^۲ x = \frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

۲. مساحت شکل محصور به‌نمودار این تابع‌ها را پیدا کنید:

$$y = ۰ ، \qquad y = ۱۴ - ۲x^۲ - ۱۲x$$

۳. جمله‌های مثبت این دنباله‌را به‌دست آورید:

$$x_n = \frac{۶۳}{۴P_n} - (n+۱)\frac{A^۲_{n+۲}}{P_{n+۱}} \quad (n = ۱،۲،۳،...)$$

که در آن، $A^۲_{n+۲}$ تعداد ترتیب‌ها، P_n و $P_{n+۱}$ تعداد تبدیل‌ها است.

۴. نسبت محیط دایرهٔ محیطی به‌محیط دایرهٔ محاطی یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، برابر است با $۲\sqrt{۵}$. زاویه‌های ذوزنقه را پیدا کنید.

۵. طول یال مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱ (AA_۱ \| BB_۱ \| CC_۱ \| DD_۱)$ برابر است با ۱. نقطهٔ E را روی یال AB و نقطهٔ F را روی یال $CC_۱$ طوری انتخاب کرده‌ایم که طول پاره‌خط BE برابر $\frac{۲}{۵}$ وطول‌پاره‌خط FC برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد. صفحهٔ α رااز مرکز کره‌ونقطه‌های E و F گذرانده‌ایم. فاصلهٔ راس A ازصفحهٔ α را پیدا کنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر b را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها ، عددهای x و y ، که در دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} ۳x + y = b \\ x + ۲y = ۲b + ۱ \end{cases}$$

صدق می‌کنند، ضمناً در نامعادلهٔ $x > ۳y$ هم صدق کنند.

۷. نامعادلهٔ $log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{x}\right) + log_x ۳ \geqslant ۲$ را حل کنید.

گروه ششم

۱. معادلهٔ $tg^{2}x=1$ را حل کنید.

۲. مساحت شکل محصور به‌نمودار این تابع‌هارا پیدا کنید:

$$y=x-x^{2}+20 \qquad y=0$$

۳. در دنبالهٔ زیر، چند جملهٔ مثبت وجود دارد؟

$$x_n=C_{n+3}^{2}-\frac{48}{187}C_{n+4}^{n} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

که درآن، C_{n+3}^{2} و C_{n+4}^{n}، عبارتند از تعداد ترکیب‌ها.

۴. مساحت دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقینی، ۳۶ برابر مساحت دایرهٔ محاطی این مثلث است. زاویه‌های مثلث‌را پیدا کنید.

۵. طول‌یال‌مکعب $KLMNK_1L_1M_1N_1(KK_1\|LL_1\|MM_1\|NN_1)$ برابر است با ۱. روی‌یال KL نقطهٔ A وروی‌یال MM_1 نقطهٔ B راانتخاب کرده‌ایم، به‌نحوی که طول پاره‌خط KA برابر $\frac{1}{4}$ و طول پاره‌خط M_1B برابر $\frac{2}{5}$ باشد. از مرکز مکعب و نقطه‌های A و B، صفحهٔ α را گذرانده‌ایم. اگر تصویر راس K_1 را برصفحهٔ α، نقطهٔ P بگیریم، طول پاره‌خط AP را پیدا کنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر c را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، عددهای x و y که در دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}3x-2y=1\\ x+5y=2c\end{cases}$$

صدق می‌کنند، در نامعاله $y>x+1$ هم صادق باشند.

۷. نامعادلهٔ $\log_{3}\sqrt{x}+2 \geqslant \log_{x}\left(\frac{1}{3}\right)$ را حل کنید.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلهٔ $2\sin x+3\sin 2x=0$ را حل کنید.

۲. اکسترمم‌های این تابع را بررسی کنید:

$$y(x)=\sqrt{۲x^{۲}-x+۲}$$

۳. خط راست l، از نقطه‌های $A(۱،۲،۳)$ و $B(۴،۶،۹)$ می‌گذرد. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که در نقطهٔ A برخط راست l عمود باشد.

۴. معادلهٔ $log_{۲}(۳^{x}-۸)=۲-x$ را حل کنید.

۵. هرم منتظم DABC مفروض است (D، راس و ABC، قاعده). می‌دانیم: $|AB|=a$ و $|AD|=b$. هرم را باصفحهٔ α، موازی یال‌های AD و BC قطع کرده‌ایم. صفحهٔ α را درچه فاصله‌ای از یال AD باید رسم کرد تا مساحت مقطع هرم با این صفحه، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

۶. دایره‌ای به‌قطر AB داده شده است. دایرهٔ دوم، به‌مرکز نقطهٔ A، دایرهٔ اول‌را در نقطه‌های C و D وقطر AB را درنقطهٔ E قطع کرده است. روی کمان CE ــ که شامل نقطهٔ D نیست ــ نقطهٔ M را، غیر از C و E، انتخاب کرده‌ایم. نیم‌خط BM، دایره اول را در نقطهٔ N قطع می‌کند. می‌دانیم: $|CN|=a$، $|DN|=b$. مطلوب است محاسبهٔ $|MN|$.

۷. سنگ‌معدن، ۴۰٪ ناخالصی و فلزی که از گداختهٔ آن به‌دست می‌آید، ۴٪ ناخالصی دارد. از ۲۴ تن‌سنگ‌معدن، چقدر فلز به‌دست می‌آید.

۸. نامعادلهٔ $\frac{۲}{x+۲}<\frac{۱}{x-۳}$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $۲cos۲x-۳cosx+۲=۰$ را حل کنید.

۲. اکسترمم تابع $y(x)=(۲x-۱)e^{۳x}$ را بررسی کنید.

۳. زاویهٔ حادهٔ دووجهی بین‌صفحه‌های $x+۲y-z=۱$ و $۲x+y-z=۲$ را پیدا کنید.

۴. معادلهٔ $log_{۷}(۶+۷^{-x})=۱+x$ را حل کنید.

۵. مثلث متساوی‌الاضلاع KLM، قاعدهٔ هرم NKLM را تشکیل می‌دهد. ارتفاعی از هرم که از راس N رسم شود، از وسط یال LM می‌گذرد. می‌دانیم: $|KL|=a$، $|KN|=b$. هرم را باصفحهٔ β، موازی یال‌های KN و LM قطع می‌کنیم. صفحهٔ β در چه فاصله‌ای از راس N باشد تا

مساحت مقطع هرم با این‌صفحه، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۶. دایرهٔ به‌قطر PQ مفروض است. دایرهٔ دیگری به مرکز Q ، دایرهٔ اول را در نقطه‌های S و T وقطر PQ را در نقطهٔ A قطع می‌کند ؛ AB قطر دایرهٔ دوم است. روی کمان SB ــ که شامل نقطهٔ T نیست ــ نقطهٔ C را، غیر ازنقطه‌های S و B ، انتخاب می کنیم. پاره‌خط PC دایرهٔ اول را در نقطهٔ D قطع می کند. می‌دانیم: $|SD|=n$ و $|DC|=m$. مطلوب است $|DT|$.

۷. از ۳۸ تن مادهٔ خام نوع‌دوم،که ۲۵٪ ناخالصی‌دارد، بعد از به‌عمل‌آوردن، ۳۰ تن مادهٔ خام نوع اول به‌دست‌آمده است. ناخالصی مادهٔ خام نوع اول، چند درصد است؟

۸. نــامعادلهٔ $\frac{۱}{۱-x}<\frac{۳}{x+۳}$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $۳\cos x+۲\sin ۲x=۰$ را حل کنید.

۲. تابع $y(x)=\sqrt{۱-۲x+۳x^۲}$ را، از نظر اکسترممم، بررسی کنید.

۳. خــط راست l ، از نقطه‌های $C(۳،-۲،۱)$ و $D(-۱،۲،۳)$ می گــذرد. معــادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ D بگذرد و برخط راست l عمود باشد.

۴. معادلهٔ $\log_۲(۲^x-۷)=۳-x$ را حل کنید.

۵. هرم منتظم $BCDE$ مفروض است (B راس و CDE قــاعده). می‌دانیم $|CD|=a$ ، $|BC|=b$. هرم‌را باصفحهٔ γ، موازی یال‌های BC و DE قطع می کنیم. صفحهٔ γ را درچه‌فاصله‌ای ازیال DE انتخاب کنیم تامساحت مقطع هرم با این‌صفحه، حداکثر مقدار ممکن بشود.

۶. دایرهٔ به‌قطر KL داده شده است. به‌مرکز نقطهٔ K دایــرهٔ دیگری رسم کرده‌ایم که دایرهٔ اول را در نقطه‌های M و N وقطر KL را در نقطهٔ A قطع می کند . روی کمــان AN، که شامل نقطهٔ M نیست، نقطه B را ، متمایز از نقطه‌های A و N ، اختیارکرده‌ایم. نیم‌خط LB ، دایرهٔ اول را در C قطع می کند. می‌دانیم : $|CN|=a$ ، $|CM|=b$. مطلوب است $|BC|$.

۷. میوه‌های تــازه، ۷۲٪ و میوه‌هــای خشك ۲۰٪ آب دارند. از ۲۰ کیلو گرم میوهٔ تازه، چقدر میوهٔ خشك به‌دست می آید؟

۸. نــامعادلهٔ $\frac{۳}{۲-x}>\frac{۱}{x+۳}$ راحل کنید.

گروه‌چهارم

۱. معادلهٔ $۲\sin x+۳\cos ۲x-۳=۰$ را حل کنید.

۲. دربارهٔ اکسترممم تابع $y(x)=۱+۲xe^{-۵x}$ بررسی کنید.

۳. زاویهٔ دو وجهی حــاده‌ای را ، که صفحه‌هــای $۳x-y-۲z=۱$ و $۲x+۳y-z=۳$ تشکیل می‌دهند، به‌دست آورید.

۴. معادلهٔ $\log_۶(۵+۶^{-x})=x+۱$ را حل کنید.

۵. مثلث متساوی‌الاضلاع QRS ، قاعدهٔ هرم PQRS را تشکیل می‌دهد. ارتفــاعی از هرم ، که از راس P رسم شده ، از وسط یال RS می‌گذرد. می‌دانیم: $|PQ|=m$ و $|QR|=n$. هرم را بــا صفحهٔ α ، که موازی یال‌های PQ و RS رسم شده‌است، قطع کرده‌ایم. صفحهٔ α درچه‌فاصله‌ای از راس Q باشد، تا مساحت مقطع هرم با این‌صفحه، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۶. دایره‌ای به‌قطر BC مفروض است. دایرهٔ دیگری، به‌مرکز نقطهٔ C ، دایرهٔ اول را درنقطه‌های D و E، وقطر BC را درنقطهٔ F قطع کرده است؛ FK قطر دایرهٔ دوم است. روی کمان EK ــ که شامل نقطهٔ D نباشد ــ نقطهٔ L را، متمایز از E و K، اختیارکرده‌ایم. پاره‌خط BL دایرهٔ اول را درنقطهٔ M قطع می کند. می‌دانیم: $|ML|=m$ و $|EM|=n$. مطلوب‌است $|DM|$.

۷. از ۴۰ تن سنگ‌معدن، ۲۰ تن فلز بــا ناخالصی ۶٪ به‌دست می آید . درصد ناخالصی سنگ‌معدن چقدر است؟

۸. نــامعادلهٔ $\frac{۲}{x+۳}<\frac{۱}{۲x-۱}$ را حل کنید.

گروه پنجم

۱. معادلهٔ $۵\sin ۲x-۲\sin x=۰$ را حل کنید.

۲. اکسترممم این‌تابع را پیدا کنید:

$$y(x)=\sqrt{2x^2-3x+3}$$

۳. خط‌راست l از نقطه‌های $B(1,0,-3)$ و $C(2,-1,1)$ می‌گذرد. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ B بگذرد و برخط‌راست l عمود باشد.

۴. معادلهٔ $log_5(5^x-4)=1-x$ را حل کنید.

۵. هرم منتظم CDEF مفروض است (C ، داس و DEF ، قاعده) . می‌دانیم $|CD|=m$ و $|DE|=n$. صفحهٔ β را موازی یال‌های CD و EF رسم کرده‌ایم تا هرم را قطع کند. صفحهٔ β را درچه فاصله‌ای از یال CD انتخاب کنیم تا مساحت مقطع آن باهرم، حداکثر مقدار ممکن بشود؟

۶. دایره‌ای به‌قطر QR مفروض است. دایرهٔ دوم‌را به‌مرکز Q رسم کرده‌ایم تا دایرهٔ اول را درنقطه‌های P و S، و قطر QR را در B قطع کند. روی کمان BS ـ که شامل نقطهٔ P نیست ـ نقطهٔ C را، جدا از B و S،اختیار کرده‌ایم . نیم‌خط RS دایـرهٔ اول را در D قطع می‌کند. می‌دانیم: $|DS|=a$ و $|DP|=b$. $|DC|$ را پیدا کنید.

۷. در نتیجه پاك‌کردن یك مادهٔ خام ، نـاخالصی آن از ۲۰٪ به ۵٪ کاهش یافته است. از مادهٔ خام نخستین، چقدر بـاید انتخاب‌کرد تا ۱۶۰ کیلوگرم از پاك‌شدهٔ آن به‌دست آید؟

۸. نـامعادلهٔ $\frac{5}{2-x}>\frac{3}{x+2}$ را حل کنید.

گروه ششم

۱. معادلهٔ $3+2\sin x-3\cos 2x=0$ را حل کنید .

۲. اکستره‌مم این‌تابع را جست‌وجو کنید:

$$y(x)=(1-3x)e^{-2x}$$

۳. مقدار زاویهٔ حـاده دو وجهی بین صفحه‌هـای $x-y+3z=2$ و $-x-3y+z=2$ را پیدا کنید.

۴. معادلهٔ $log_2(7+2^{-x})=x+3$ را حل کنید.

۵. مثلث‌متساوی‌الاضلاع RST، قاعدهٔ هرم QRST را تشکیل می‌دهد.ارتفاع وارد از Q برقاعدهٔ RST هرم ، از وسط یـال ST می‌گذرد. می‌دانیم: $|QR|=m$ و $|ST|=n$. هرم‌را، به‌وسیلهٔ صفحهٔ γ،موازی با یال‌های QR و

ST قطع کرده‌ایم. صفحهٔ γ را درچه فاصله‌ای از راس Q انتخاب کنیم تا مساحت مقطع آن باهرم، به‌حداکثر مقدار ممکن خود برسد؟

۶. دایرهٔ به‌قطر LM داده شده است. دایرهٔ دوم را به‌مرکز M رسم کرده‌ایم تا دایرهٔ اول را درنقطه‌های N و Q وقطر LM را در B قطع کند؛ BC قطر دایرهٔ دوم است. روی کمان NC ـ که شامل نقطهٔ Q نیست ـ نقطهٔ D را، جدا از نقطه‌های N و C، انتخاب کرده‌ایم. پاره‌خط LD دایرهٔ اول را درنقطهٔ E قطع می‌کند. می‌دانیم $|EN|=n$ و $|ED|=m$. مطلوب است $|QE|$.

۷. از ۲۲ کیلو گرم قارچ تازه، ۲/۵ کیلو گرم قارچ خشك، که شامل ۱۲٪ آب است، به‌دست آمده است. درقارچ تازه، چنددرصد آب وجود دارد؟

۸. نـامعادلهٔ $\frac{۳}{x+۵}<\frac{۲}{۱-۲x}$ را حل کنید.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. معـادلهٔ $۱+\cos x = \cos\frac{x}{۲}$ را حل کنید.

۲. زاویهٔ بین این بردارها را به‌دست‌آورید:

$$\vec{a}=(۶,-۲,-۳),\quad \vec{b}=(۵,۰,۰)$$

۳. این‌دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ۳^{x}\cdot ۲^{y}=\frac{۱}{۹} \\ y-x=۲ \end{cases}$$

۴. نقطه‌های برخورد مماس‌هایی از نمودارتابع $y(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$ را با محور Ox پیدا کنید که با این محور، زاویه‌ای برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ می‌سازند.

۵. درلوزی ABCD، که درآن داریم: $|AB|=1$ و $\widehat{BAD}=\alpha$، دایره‌ای

محاط کرده‌ایم. مماس بر این دایره، ضلع AB را درنقطهٔ M و ضلع AD رادرنقطهٔ N قطع کرده‌است. می‌دانیم: $|MN| = ۲a$ و $|AN| \geqslant |AM|$. مطلوب است طول پاره‌خطهای MB و ND.

۶. مثلث متساوی‌الساقین ABC، در صفحهٔ P، داده شده است و می‌دانیم: $|AB| = |BC| = l$ ، $|AC| = ۲a$. کره‌ای به‌شعاع r، درنقطهٔ B برصفحهٔ P مماس است. دو خط راست متنافر، که یکی ازنقطه A ودیگری از نقطهٔ C می گذرد، بر کره مماس‌اند. زاویهٔ بین هریك از این خطهای راست با صفحهٔ P، برابر است با α. فاصلهٔ بین‌این‌دو خط راست‌را پیدا کنید.

۷. جملهٔ هفتم یك تصاعد عددی برابر ۲۱ ومجموع هفت جملهٔ اول این تصاعد برابر ۱۰۵ می باشد. جملهٔ اول وقدر نسبت این‌تصاعد را پیدا کنید.

۸. نامعادلهٔ $\sqrt{x^۲+x-۲} > x$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $sin\frac{x}{۴}+cos\frac{x}{۲}=۱$ را حل کنید.

۲. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ بین این‌بردارها:

$$\vec{b} = (۲، -۴، ۵)، \quad \vec{c} = (۰، ۲، ۰)$$

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{۲^y}{۵^x} = ۲۰۰ \\ x+y = ۱ \end{cases}$$

۴. مماس‌هایی با ضریب زاویهٔ ۹ برنمودار تابع $y(x) = \frac{۲x-۳}{x+۳}$ رسم کرده‌ایم. مختصات نقطه‌های برخوردآن‌هارا بامحورهای مختصات پیدا کنید.

۵. مثلث متساوی‌الساقین KLM مفروض است وداریم: $|KL| = |LM| = l$ و $\widehat{KLM} = \beta$. دایره‌ای که مرکزآن روی ضلع KM است، برضلع‌های KL و LM مماس است. مماسی از این دایره، ضلع KL را در نقطهٔ P و ضلع LM را درنقطهٔ Q قطع می کند. می‌دانیم مساحت‌مثلث PLQ برابر است با S. طول پاره‌خط PQ را پیدا کنید.

۶. مرکز کره‌ای به شعاع r، روی صفحهٔ P قرار دارد. دونقطهٔ M و N را روی صفحهٔ P انتخاب می‌کنیم: $|OM|=|ON|=m>r$، $|MN|=2b$ و $b\neq m$. ازنقطه‌های M و N، دو مماس غیرواقع بریك صفحه، برکره رسم کرده‌ایم. این مماس‌ها، در یك‌طرف صفحهٔ P واقع‌اند. فاصلهٔ هریك از این خطهای راست مماس باصفحهٔ P برابر است با β. فاصلهٔ بین این‌دوخط راست را پیدا کنید.

۷. جملهٔ اول یك‌تصاعد هندسی برابر است با ۳ وجملهٔ پنجم‌آن ۱۲۲۸۸ شده است. قدر نسبت این‌تصاعد ومجموع پنج جملهٔ اول آن‌را پیدا کنید.

۸. نامعادلهٔ $\sqrt{x^2+5x+4}>x+2$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\cos\frac{x}{3}=2\cos\frac{x}{6}-1$ را حل کنید.

۲. زاویهٔ بین این‌دو بردار را به‌دست‌آورید:

$$\vec{c}=(-2,6,-3) \quad \text{و} \quad \vec{d}=(0,0,-3)$$

۳. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 7^{x+1}\cdot 2^{y}=4 \\ y-x=3 \end{cases}$$

۴. مماس‌هایی برنمودار تابع $y(x)=\frac{3x-1}{x+8}$ رسم کرده‌ایم که با محور Ox زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند. محل برخورد این‌مماس‌هارا بامحور Oy پیدا کنید.

۵. در لوزی CDEF، که در آن $\widehat{DCF}=\gamma$، دایره‌ای به‌شعاع r محاط کرده‌ایم: مماس براین دایره، ضلع CD را در نقطهٔ A و ضلع CF را درنقطهٔ B قطع کرده‌است. می‌دانیم: $|AD|=m$. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۶. صفحهٔ P، برکرهٔ به‌شعاع r، درنقطهٔ D مماس است. نقطه‌های D، E و F این‌صفحه، بریك امتداد نیستند و $|DE|=|DF|=n$ و $|EF|=2d$. دو خط راست متنافر، صفحهٔ P را در نقطه‌های E و F قطع کرده‌اند و برکره

مماس‌اند. زاویهٔ بین هریک ازاین خطهای راست باصفحهٔ P، برابر است با γ. فاصلهٔ بین این‌دوخط راست را پیداکنید.

۷. قدر نسبت یك‌تصاعد عددی برابر است با ۶ ومجموع ده‌جملهٔ اول آن برابر ۳۴۰ شده‌است. جملهٔ اول وجملهٔ دهم این‌تصاعد را پیداکنید.

۸. نامعادلهٔ $\sqrt{x^۲-x-۲}>x-۱$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $۲\sin\frac{x}{۲}=۱-\cos x$ را حل کنید .

۲. زاویهٔ بین این‌دو بردار را پیداکنید:

$$\vec{b}=(-۴،-۶،۲) \text{ و } \vec{f}=(۴،۰،۰)$$

۳. این‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{x}\cdot ۵^{y}=۷۵\\ x+y=۱\end{cases}$$

۴. مماس‌هایی با ضریب زاویهٔ برابر ۴ برنمودار تابع $y(x)=\frac{۲x-۲}{x+۱}$ رسم‌کرده‌ایم. نقطه‌های برخورد این مماس‌ها را بامحورهای مختصات پیدا کنید.

۵. در مثلث متساوی‌الساقین PQR داریم : $|PQ|=|QR|$ و $\widehat{PQR}=\varphi$. دایرهٔ به‌شعاع R را، به‌مرکز واقع برضلع PR و مماس برضلع‌های PQ و QR، به‌ترتیب، درنقطه‌های S و T رسم‌کرده‌ایم . می‌دانیم: $|ST|=۲l$. طول پاره‌خطهای PS و RT را پیداکنید.

۶. نقطه‌های K، L و M روی صفحهٔ P قراردارند : $|KL|=|KM|=l$ ، $|LM|=۲b$ ، $b\neq l$. نقطهٔ K ، مرکز کره‌ای است به‌شعاع r $(r<l)$. از نقطه‌های L و M، دوخط راست بر کره مماس کرده‌ایم، به‌نحوی‌که روی یك‌صفحه واقع نباشند . نقطه‌های تماس، در یك‌طرف صفحهٔ P قراردارند. زاویهٔ بین هریك ازاین خطهای راست باصفحهٔ P، برابر است با β. فاصلهٔ بین این دو خط راست‌را پیداکنید.

۷. مجموع شش‌جملهٔ اول یك‌تصاعد هندسی باقدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ ، برابر است با $\frac{۳۶۴}{۹}$. جملهٔ اول وجملهٔ ششم این‌تصاعد را پیدا کنید.

۸. نامعادلهٔ $\sqrt{x^{۲}+۲x-۳} > x$ را حل کنید.

گروه پنجم

۱. معادلهٔ $۲\cos\frac{x}{۴}-\cos\frac{x}{۲}=۱$ را حل کنید.

۲. زاویهٔ بین این بردارها را به‌دست‌آورید:

$$\vec{a}=(۳،-۲،۶) \text{ و } \vec{c}=(۰،-۵،۰)$$

۳. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۵^{x-۱}\cdot ۷^{y}=\frac{۱}{۷} \\ x-y=۲ \end{cases}$$

۴. محل برخورد مماس‌هایی ازنمودار تابع $y(x)=\frac{x+۴}{x-۵}$ را بامحور Oy پیدا کنید که بامحور Ox زاویه‌ای برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ می‌سازند.

۵. در لوزی EFGH، که درآن $\widehat{FEH}=\alpha$، دایره‌ای به‌شعاع r محاط کرده‌ایم. مماسی ازاین‌دایره، ضلع FG را در A وضلع GH را در D قطع می کند. اگر مساحت مثلث AGD برابر S باشد، طول پاره‌خط AD را پیدا کنید.

۶. کرهٔ به‌شعاع R ، درنقطهٔ B، برصفحهٔ P مماس است. نقطه‌های B ، C و D ازصفحهٔ P روی یك‌خط‌راست‌نیستند و $|BC|=|BD|=m$ و $|CD|=۲a$. دو خط راست متنافر ، ازنقطه‌های C و D گذشته و برکره مماس‌اند. زاویهٔ بین هریك ازاین خطهای راست باصفحهٔ P برابراست با α. فاصلهٔ بین این دوخط راست را به‌دست آورید.

۷. جملهٔ اول یك‌تصاعد عددی برابر ۱۰ ومجموع چهارده جملهٔاول این‌تصاعد، برابر ۱۰۵۰ می باشد. جملهٔ چهاردهم وقدر نسبت تصاعد را پیدا کنید.

۸. نامعادلهٔ $\sqrt{x^2-x-6} > x-2$ را حل کنید.

گروه ششم

۱. معادلهٔ $\cos\frac{x}{3} = 2\sin\frac{x}{6} - 1$ را حل کنید.

۲. زاویهٔ بین این‌دو بردار را به‌دست‌آورید:

$$\vec{d} = (4, -5, -2) \text{ و } \vec{b} = (0, 0, 2)$$

۳. این دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} 3^y \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x = 63 \\ y + x = 1 \end{cases}$$

۴. مماس‌هایی با ضریب زاویهٔ برابر ۲۵، برنمودار تابع $y(x) = \frac{3x-4}{x+7}$ رسم کرده‌ایـم. محل برخورد این مماس‌ها را با محورهـای مختصات پیدا کنید.

۵. در مثلث متساوی‌الساقین MNP داریـم: $|MN| = |NP| = l$ و $\widehat{MNP} = \beta$. به‌مرکز نقطه‌ای از ضلع MP دایره‌ای رسم کرده‌ایم که بر ضلع‌های MN و NP مماس‌است. مماسی ازاین دایره، ضلع MN را در نقطهٔ Q وضلع NP را در نقطهٔ R قطع‌کـرده است . اگر $|MQ| = n$ باشد، مساحت مثلث QNR را پیدا کنید.

۶. در خـارج کرهٔ به‌مرکز O وشعاع r، نقطه‌های K و L را درنظر گرفته‌ایم: $|OK| = |OL| = n$، $|KL| = 2d$، $d \neq n$. ازنقطه‌های K وL دو مماس بر کره رسم کرده‌ایم که دریك صفحه، واقع نیستند . نقطه‌های تماس، در یك طرف صفحهٔ P ـ که ازنقطه‌های O و K و L می‌گذرد ـ قراردارند.زاویهٔ هریك ازاین‌خط‌های راست باصفحهٔ P برابر است با γ. مطلوب است‌فاصلهٔ بین این‌دوخط راست .

۷. قدرنسبت یك‌تصاعد هندسی برابر ۲ ومجموع هفت‌جملهٔ اول‌آن برابر ۶۳۵ می‌باشد. جملهٔ اول وجملهٔ هفتم این‌تصاعد را پیدا کنید.

۸. نامعادلهٔ $\sqrt{x^2+2x-8} > x-1$ را حل کنید.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. همهٔ ریشه‌های این معادله را، که در بازهٔ $\left[-\frac{۳\pi}{۲}, \pi\right]$ قرار دارند، پیدا کنید:

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{۸} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۲. مختصات نقطهٔ C واقع برمحور Ox را طوری پیدا کنید که از دو نقطهٔ $A(۱,۲,۳)$ و $B(۲,۳,۴)$ به‌یك فاصله باشد.

۳. معادلهٔ $۳\sqrt{\log_۲ x} - \log_۲(۳x) - ۱ = ۰$ را حل کنید.

۴. مساحت شکل محصور به نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۴|$، پاره‌خط $[-۱,۲]$ از محور Ox وخط راست $x=-۱$ را محاسبه کنید.

۵. در مثلث ABC می‌دانیم: $\widehat{BAC}=\alpha$، $\widehat{BCA}=\beta$ و $|AC|=b$. نقطهٔ D را روی ضلع BC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $|BD|=۳|DC|$. از نقطه‌های B و D دایره‌ای می‌گذرانیم که برضلع AC یا امتداد آن، ــ ازطرف نقطهٔ A ــ مماس باشد. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۶. دو مخروط قائم دوار، باراس مشترك O وارتفاع‌های برابر، داده شده‌است. در هریك از این مخروط‌ها، زاویهٔ بین ارتفاع و مولد، برابر است با φ. مخروط‌ها، دریك‌طرف‌صفحهٔ α قراردارند، به‌نحوی‌که تنها یکی‌ازمولدهای هرمخروط (OA برای یك مخروط و OB برای مخروط دیگر) به‌صفحهٔ α تعلق دارد. می‌دانیم‌که زاویهٔ بین‌ارتفاع‌های دومخروط برابر β است و، ضمناً، $\varphi+\beta=\frac{\pi}{۲}$. مطلوب است زاویهٔ بین مولد OA و صفحهٔ قاعدهٔ مخروط دیگر.

۷. این‌دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{x+y}+x=-۱ \\[2ex] \dfrac{x}{x+y}=-۲ \end{cases}$$

۸. نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}} > 2^{x-1}$ را حل کنید

گروه دوم

۱. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

را، در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$، پیدا کنید.

۲. نقطه‌های $A(-1, 2, -2)$ و $B(3, 1, 2)$ مفروض‌اند. فاصلهٔ مبداء مختصات را تا وسط پاره‌خط $[AB]$ پیدا کنید.

۳. این‌معادله را حل کنید:

$$5\sqrt{\log_2 x} - \log_{2}4x - 4 = 0$$

۴. مساحت شکل محصور به نمودار تابع $f(x) = |9 - x^2|$، پاره‌خط $[-5, 3]$ از محور Ox وخط راست $x = -5$ را محاسبه کنید.

۵. روی ضلع زاویهٔ به‌راس O، نقطه‌های A و B را طوری انتخاب کرده‌ایم (A بین O و B) که داریم: $|OA| = 3|AB|$. از نقطه‌های A و B دایره گذرانده‌ایم که برضلع دیگرزاویه درنقطهٔ D مماس‌باشد. روی نیم‌خط OD، نقطه E را درنظر گرفته‌ایم (D بین O و E). می‌دانیم: $|OE| = m$ و $\widehat{BOE} = \alpha$ و $\widehat{BEO} = \beta$. شعاع دایره را پیدا کنید.

۶. دو مخروط قائم دوار داریم که در راس D مشترك‌اند وهم دو ارتفاع وهم دو زاویهٔ بین‌ارتفاع و مولد دردو مخروط، باهم برابر است. این‌مخروط‌ها، در دو طرف صفحه α، طوری قرارگرفته‌اند که تنها یك‌مولد ازهرمخروط (DE ازمخروط اول و DF ازمخروط دوم) روی صفحه α است. می‌دانیم: $\widehat{EDF} = \varphi$ وزاویهٔ بین خطهای برخورد صفحه‌های قاعدهٔ دو مخروط با صفحهٔ α، برابراست با β. در هر مخروط، زاویهٔ بین‌ارتفاع و مولد را پیدا کنید.

۷. این‌دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{۲x-y}+y=-۵ \\[2ex] \dfrac{y}{۲x-y}=۶ \end{cases}$$

۸. نامعادلهٔ $۵^{x+۱}<\left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{\frac{۱}{x}}$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. همهٔ ریشه‌های این‌معادله را، که دربازهٔ $\left[-\pi \,،\, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ قرار دارند، پیدا کنید:

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{۷}-\cos x \cdot \sin\frac{\pi}{۷}=-\frac{۱}{۲}$$

۲. مختصات نقطهٔ D را پیدا کنید که برمحور Oy واقع، و از نقطه‌های $E(-۱،۲،۱)$ و $F(۲،-۳،۱)$ به‌یك فاصله باشد.

۳. معادلهٔ $۴\sqrt{\log_{۷} x}-\log_{۷} ۷x-۲=۰$ را حل کنید.

۴. مساحت شکل‌محدود به‌نمودارتابع $f(x)=|۴-x^{۲}|$، پاره‌خط $[-۲،۱]$ از محور Ox وخطراست $x=۱$.

۵. درمثلث KLM می‌دانیم: $\widehat{LKM}=\beta$ ، $\widehat{LMK}=\gamma$ ، $|KM|=\alpha$. نقطهٔ N را روی‌ضلع KL طوری انتخاب کرده‌ایم که‌داریم: $|KN|=۲|LN|$. از نقطه‌های L و N دایره‌ای گذرانیده‌ایم که برضلع KM ویا ادامهٔ آن از طرف M، مماس باشد. شعاع دایره را پیدا کنید.

۶. دومخروط دوار قائم متقاطع، با راس مشترك B وارتفاع‌های برابر، داده شده است. درهریك از این‌دو مخروط، زاویهٔ بین‌ارتفاع ومولد، برابراست با β. این مخروط‌ها، در یك‌طرف صفحهٔ α قراردارند، به‌نحوی که تنها یك مولد از هرمخروط (BC ازمخروط اول و BD ازمخروط دوم) روی‌صفحهٔ α قرار گرفته است. می‌دانیم که زاویهٔ بین ارتفاع‌های دومخروط، برابر β است. مطلوب‌است زاویهٔ بین‌فصل مشترك‌های دوقاعدهٔ مخروط‌ها باصفحهٔ α.

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{۱}{x-y}+x=۱ \\ \frac{x}{x-y}=-۲ \end{cases}$$

۸. نـامعادلهٔ $\left(\frac{۱}{۹}\right)^{\frac{۱}{x}} > ۳^{x+۲}$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. همهٔ ریشه‌های این‌معادله را، در بازهٔ $\left[-\frac{۳\pi}{۲}, \pi\right]$ پیدا کنید:

$$\cos x\cdot \cos\frac{\pi}{۸}-\sin x\cdot \sin\frac{\pi}{۸}=-\frac{۱}{۲}$$

۲. نقطه‌های $B(۳, -۲, ۱)$ و $C(۱, -۳, ۱)$ مفروض‌اند. فاصلهٔ‌مبداء مختصات را تا وسط پاره‌خط $[BC]$ پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $۵\sqrt{\log_۳ x}-\log_{۳}۹x=۴$ را حل کنید.

۴. مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲۵|$، پاره‌خط $[۵,۷]$ از محور Ox وخط راست $x=۷$ را پیدا کنید.

۵. روی ضلعی ازز اویهٔ به‌راس O، نقطه‌های B و D را طوری اختیارکرده‌ایم (B بین O و D) که داشته‌باشیم: $۲|OB|=۳|BD|$. ازنقطه‌های B وD، دایره‌ای گذرانده‌ایم که برضلع دیگر زاویه، در نقطهٔ A، مماس باشد. نقطهٔ F را بین نقطه‌هـای O و A درنظر می گیریم . می‌دانیم: $|OF|=l$ و $\widehat{DOF}=\alpha$ و $\widehat{DFO}=\beta$. شعاع دایره را پیدا کنید.

۶. دومخروط قائم دوار، به‌راس مشترك K، داریم. ارتفاع هردومخروط برابر h وزاویهٔ بین ارتفاع ومولد، در هردو مخروط، یکی است. این مخروط‌ها دردوطرف صفحه α و به‌نحوی قراردارند که تنها یکی‌ازمولدهای هرمخروط (KM برای یك‌مخروط و KL برای مخروط دیگر) روی صفحهٔ α واقع است. می‌دانیم $\widehat{MKL}=\beta$ و شعاع قاعدهٔ هرمخروط برابر است بـا R. زاویهٔ بین مولد KM را باصفحهٔ قاعدهٔ مخروط دیگر پیدا کنید.

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{x+۲y}+y=۲ \\ \\ \dfrac{y}{x+۲y}=-۳ \end{cases}$$

۸. نامعادلهٔ $۷^{x+۱}<\left(\frac{۱}{۴۹}\right)^{\frac{۱}{x}}$ را حل کنید.

گروه پنجم

۱. همهٔ ریشه‌های این‌معادله‌را، دربازهٔ $\left[-\frac{۷\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}\right]$، به‌دست آورید:

$$\sin x\cdot \cos\frac{\pi}{۵}+\cos x\cdot \sin\frac{\pi}{۵}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲. مختصات نقطهٔ K واقع برمحور Ox را طوری پیدا کنید که از نقطه‌های $L(-۱,۱,۲)$ و $M(-۳,۲,۱)$ به‌یك فاصله باشد.

۳. معادلهٔ $۳\sqrt{\log_۲ x}-\log_۲ ۸x+۱=۰$ را حل کنید.

۴. مطلوب است مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۹|$، پاره‌خط $[-۳,۱]$ از محور Ox وخط راست $x=-۱$.

۵. دربارهٔ مثلث ABC می‌دانیم : $\widehat{ABC}=\alpha$ ، $\widehat{ABC}=\beta$، $|BC|=a$. نقطهٔ D را روی ضلع AC ، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته‌باشیم : $|AD|=۳|DC|$. از نقطه‌های A و D، دایره‌ای مماس برضلع BC ویا امتدادآن از طرف نقطهٔ B، رسم کرده‌ایم. شعاع این‌دایره را پیدا کنید.

۶. دومخروط قائم‌دوار، باراًس مشترك D مفروض‌اند. ارتفاع دومخروط برابر است وزاویهٔ بین ارتفاع ومولد مخروط ، برای هردو مخروط ، یکی است. این مخروط‌ها در یك طرف صفحهٔ α قراردارند، به‌نحوی‌که تنها یکی از مولدهای هرمخروط (MK برای مخروط اول و ML برای مخروط دوم) به‌صفحهٔ α تعلق پیدامی کنند؛ دوقاعدهٔ مخروط‌ها، تنها دریك نقطه مشترك‌اند. اندازهٔ زاویهٔ بین فصل مشترك‌های صفحه‌های دو قاعده باصفحهٔ α، برابر است با β. زاویهٔ بین‌ارتفاع ومولد را درهرمخروط پیدا کنید.

۷. این‌دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{۲x+y}+x=۳ \\ \dfrac{x}{۲x+y}=-۴ \end{cases}$$

۸. نامعادلهٔ $\left(\frac{۱}{۴}\right)^{\frac{۱}{x}} > ۲^{x+۲}$ را حل کنید.

گروه ششم

۱. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ زیر را، در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}, ۲\pi\right]$، پیدا کنید:

$$\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{۷}+\sin x \cdot \sin\frac{\pi}{۷}=\frac{۱}{۲}$$

۲. نقطه‌های $E(۱, -۲, ۳)$ و $F(۳, ۱, -۱)$ داده شده است. فاصلهٔ مبداء مختصات را تا وسط پاره‌خط $[EF]$ پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $۴\sqrt{\log_۵ x}-\log_۵(۲۵x)-۱=۰$ را حل کنید.

۴. مساحت شکلی‌را پیدا کنید که به‌نمودار تابع $f(x)=|۲۵-x^۲|$، پاره‌خط $[-۶, -۵]$ محور Ox وخط راست $x=-۶$، محدود شده است.

۵. روی ضلع‌زاویهٔ به‌راس A، نقطه‌های C و D را (C بین A و D) در نظر گرفته‌ایم. و می‌دانیم: $|AC|=۲|CD|$. از نقطه‌های C و D، دایره‌ای گذشته است که برضلع دیگر زاویه، در نقطهٔ B، مماس است. بین نقطه‌های A و B، نقطهٔ E را انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم: $\widehat{DAE}=\alpha$، $\widehat{DEA}=\beta$ و $|AE|=b$. شعاع دایره را محاسبه کنید.

۶. دومخروط قائم دوار با راس مشترك A و ارتفاع‌های مساوی، مفروض‌اند. در هریك از مخروط‌ها، زاویهٔ بین ارتفاع و مولد، برابر است با φ این مخروط‌ها، در دو طرف صفحهٔ α طوری قرار گرفته‌اند که تنها یك مولد از هرمخروط (AB ازیکی وAC ازدیگری) به‌صفحهٔ α تعلق دارند. می‌دانیم: $\widehat{BAC}=\beta$. زاویهٔ بین فصل مشترك‌های صفحهٔ α را با صفحه‌های قاعدهٔ دومخروط پیدا کنید.

۷. این دستگاه دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+3y}+y=5 \\ \dfrac{y}{x+3y}=6 \end{cases}$$

۸. نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{x}} < 5^{x-2}$ را حل کنید.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. این‌معادله را حل کنید:

$$\sin(x-60^\circ)+2\cos(x+30^\circ)=0$$

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید‌که، به‌ازای هریك از آن‌ها، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=a \end{cases}$$

تنها یك‌جواب داشته‌باشد.

۳. معادلهٔ $\frac{10+4^{\frac{x}{2}}}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$ را حل کنید.

۴. نامعادلهٔ $1 < 5^{\log_3\left(\frac{2}{x+2}\right)}$ را حل کنید.

۵. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ مربع. از یك راس قاعده، صفحه‌ای را عمود بر یال جانبی مقابل به‌آن راس، رسم کرده‌ایم. مساحت مقطع حاصل، نصف مساحت قاعدهٔ هرم است. مطلوب است نسبت ارتفاع‌هرم به‌طول یال‌جانبی.

۶. در چهارضلعی ABCD که در دایره‌ای محاط است، نیمسازهای دوزاویهٔ A و B، درنقطهٔ E، روی ضلع CD، یکدیگر را قطع می‌کنند. نسبت طول پاره‌خط CD به‌پاره‌خط BC برابر است با m. مطلوب است:

۱) نسبت فاصله‌های نقطهٔ E تا خطهای راست AD و BC.

۲) نسبت مساحت دومثلث ADE و BCE به‌یکدیگر.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\frac{۱-\cos x}{\cos\left(\frac{\pi+x}{۲}\right)}=۲$ را حل کنید.

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر b را پیدا کنید، به‌نحوی که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر دارای بی‌نهایت جواب باشد:

$$\begin{cases} bx+y=۱ \\ ۴x-۲y=b \end{cases}$$

۳. معادلهٔ $\frac{۳^{۲x}}{۱۰۰^{x}}=۲(۰٫۳)^{x}+۳$ را حل کنید.

۴. نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{x-۱}} ۰٫۴>۰$ را حل کنید.

۵. هرم منتظم PQST با قاعدهٔ مربع وراس P مفروض است. این هرم‌را با صفحه‌ای که از نقطهٔ M ــ پای ارتفاع PM ــ عمود بروجه SPT و موازی یال ST رسم شده‌است، قطع کرده‌ایم. طول ارتفاع PM، دوبرابر طول یال ST است. نسبت مساحت مقطع حاصل‌را برمساحت قاعدهٔ هرم پیدا کنید.

۶. روی کمانی از دایره که مربوط به‌وتر AD است، نقطه‌های B و C را انتخاب کرده‌ایم. نیمسازهای زاویه‌های ABC و BCD، در نقطهٔ E، روی وتر AD، یکدیگر را قطع کرده‌اند. می‌دانیم که نسبت طول پاره‌خط AD به‌طول پاره‌خط CD برابر است با k. مطلوب است:

۱) نسبت فاصله‌های نقطهٔ E تا خط‌های راست AB و CD.

۲) نسبت طول پاره‌خط AB به‌طول پاره‌خط CD.

گروه سوم

۱. این معادله را حل کنید:

$$\cos(۵۰^\circ-x)\cdot\cos(۴۰^\circ+x)=\frac{۱}{۴}$$

۲. مطلوب است همهٔ مقدارهای پارامتر m که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^{2}-y^{2}=m \\ x+2y=1 \end{cases}$$

تنها یک‌جواب داشته‌باشد.

۳. معادلهٔ $4^{x-1}=3+2^{x-2}$ را حل کنید.

۴. نامعادلهٔ $log_{0/5}\left(2^{\frac{1}{x+1}}\right)>0$ را حل کنید.

۵. هرم منتظم PKLMN، با راس P و قاعدهٔ مربعی مفروض است. صفحه‌ای که از راس L قاعده بریال PN عمود شده است، این‌هرم‌را قطع می‌کند. مساحت مقطع حاصل، برابر $\frac{1}{3}$ مساحت قاعدهٔ هرم‌است، مطلوب است نسبت طول پاره‌خط PK به‌طول ارتفاع هرم.

۶. در چهارضلعی KLMN، که در دایره‌ای محاط‌است، نیمسازهای زاویه‌های K و N در نقطهٔ P ، واقع برضلع LM ، به‌هم رسیده‌اند. می‌دانیم نسبت طول پاره‌خط KL به‌طول پاره‌خط MN برابر است با b. مطلوب است:

۱) نسبت فاصله‌های از نقطهٔ P تا خطهای راست KL و MN.

۲) نسبت طول وَتر LM به‌طول وتر MN.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+sin\left(\frac{7\pi}{12}-x\right)=0$ را حل کنید.

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر p را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام ازآن‌ها، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x+py=1 \\ px+y=1 \end{cases}$$

جواب نداشته‌باشد.

۳. معـادلهٔ $\frac{16^{x}}{10^{2x}}-4=3(0/4)^{x}$ را حل کنید.

۴. نامعادلهٔ $log_{\frac{1}{3}}(log_{5}x)>0$ را حل کنید.

۵. هرم منتظم $SABCD$، به‌راس S و با قاعدهٔ مربعی را، باصفحه‌ای که از وسط یال‌های SB و SC می‌گذرد و بروجه SAD عمود است، قطع کرده‌ایم. مساحت قاعدهٔ هرم، هشت‌برابر مساحت مقطع حاصل شده است. اندازهٔ زاویهٔ دووجهی که وجه جانبی با صفحهٔ قاعده می‌سازد، پیدا کنید.

۶. نقطه‌های L و M را روی کمان KN از دایره انتخاب کرده‌ایم. نیمسازهای زاویه‌های KLM و LMN در نقطهٔ P، واقع بروتر KN به‌هم رسیده‌اند. نسبت طول وتر KN برابر است با $\frac{۲}{۵}$ پیدا کنید:

۱) نسبت فاصلهٔ نقطهٔ P از خط‌های راست KL و MN به‌یکدیگر.

۲) نسبت مساحت مثلث KLP به‌مساحت مثلث MPN.

§ ۴. دانشکدهٔ شیمی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. باید لیست را از مرکز A به‌مرکز B رسانید. $\frac{۲}{۳}$ مسیر از A تا B را موتورسیکلت سوار می‌برد، سپس، لیست را به‌دوچرخه‌سواری که در انتظار اوست می‌سپارد و دومی آن‌را به‌مقصد B می‌رساند (زمان انتقال لیست‌را از اولی به‌دومی، صفر می‌گیریم). ضمناً، زمانی که طول می‌کشد تا لیست‌از A به B برسد، به‌اندازهٔ زمانی‌است که برای رسیدن از A تا B باسرعت ۴۰ کیلومتر درساعت، لازم است. اگرموتورسیکلت ودوچرخه، در یك لحظه، یکی از A و دیگری از B، به‌طرف یکدیگر حرکت کنند، مدت‌زمانی که برای رسیدن‌آن‌ها به‌هم لازم می‌شود، برابر است با زمانی که برای رفتن از A تا B با سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت صرف می‌شود. مطلوب‌است سرعت موتورسیکلت، به‌شرطی که بدانیم، سرعت آن از سرعت دوچرخه بیشتر است.

۲. مطلوب است مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های

$$y=x^2-2x+2,\quad y=x^2+4x+5,\ y=1$$

۳. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$ را حل کنید.

۴. در یک چهارضلعی محدب، طول قطرها برابر با ۱ و ۲ متر است. مطلوب است محاسبهٔ مساحت چهارضلعی، به‌شرطی که طول پاره‌خط‌هایی که وسط ضلع‌های روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، باهم برابر باشد.

۵. همهٔ جواب‌هایی از معادلهٔ

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x$$

را پیدا کنید که با نامعادلهٔ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0$ سازگار باشند.

۶. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$$

گروه دوم

۱. دو گروه خاک‌بردار، که با هم کار می‌کنند، خندق اول را در ۲ روز آماده می‌کنند. سپس، برای آماده کردن خندق دوم (با همان عمق و همان عرض)، که طولی پنج برابر خندق اول دارد، به‌این‌ترتیب، مشغول می‌شوند: ابتدا تنها گروه اول مشغول به‌کار شد و، بعد، بقیهٔ کار را گروه دوم به تنهایی تمام کرد؛ ضمناً، حجم کار گروه دوم در این مورد، به‌اندازهٔ $\frac{2}{3}$ حجم کار گروه اول بود. خندق دوم، روی‌هم، بعد از ۲۱ روز آماده شد. اگر گروه دوم می‌خواست خندق اول را به‌تنهایی حفر کند، چندروز طول می‌کشید، به‌شرطی که حجم کار گروه اول در روز، بیشتر از حجم کار گروه دوم در روز است؟

۲. مساحت شکلی را محاسبه کنید که به‌وسیلهٔ نمودار تابع‌های زیر، محصور شده‌باشد:

$$y=-x^2+2x+2,\quad y=-x^2-4x-1,\ y=3$$

۳. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+2}-25^x)\geqslant -2$ را حل کنید.

۴. در چهارضلعی محدب $ABCD$، قطرها برهم عمودند و پاره‌خطی که وسط دوضلع AB و CD را به‌هم وصل می‌کند، برابر یک‌متر است. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که وسط دوضلع BC و AD را به‌هم وصل می‌کند.

۵. جواب‌هایی از معادلهٔ زیر را پیدا کنید که در نامعادلهٔ $sin\,\frac{۳}{۲}x<۰$ هم صدق کنند:

$$cos\left(\frac{۳}{۲}x+\frac{\pi}{۳}\right)+cos\left(\frac{۹}{۲}x+\frac{\pi}{۶}\right)=$$
$$=۲\,sin\left(\frac{۳}{۲}x-\frac{\pi}{۸}\right)sin\left(\frac{۵}{۸}\pi-\frac{۳}{۲}x\right)$$

۶. این دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{x+۳y+۱}=۲\\ \sqrt{۲x-y+۲}=۷y-۶\end{cases}$$

گروه سوم

۱. باری را باید از مرکز A به‌مرکز B رسانید. بار را از نقطهٔ A با یک وانت می‌برند و، سپس، در راه، آن‌را به‌کامیونی که درانتظار ایستاده است، منتقل می‌کنند. ضمناً، راهی که کامیون باید تا رسیدن به B طی کند، برابر $\frac{۱}{۳}$ راهی است که وانت پیموده است (زمانی راکه برای انتقال بار ازوانت به‌کامیون لازم است، برابر صفر می‌گیریم). به‌این ترتیب، برای‌رساندن بار از A به B، به‌همان زمانی نیازداریم که متحرکی بخواهد فاصلهٔ از A تا B را با سرعت یکنواخت ۶۴ کیلومتر در ساعت طی کند. اگر وانت و کامیون، یکی از A و دیگری از B، در یک زمان به‌طرف یکدیگر حرکت کنند برای رسیدن به‌هم، به‌همان زمانی نیاز دارند که بخواهیم فاصلهٔ از A تا B را با سرعت ۱۲۰ کیلومتر در ساعت طی کنیم. سرعت‌کامیون را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم، سرعت وانت، از ۷۵ کیلومتر در ساعت تجاوز نمی‌کند.

۲. مطلوب است مساحت شکل محصور به‌وسیلهٔ نمودار تابع‌های

$$y=x^{۲}-۴x+۵،\quad y=x^{۲}+۸x+۱۷،\ y=۱$$

۳. نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}(۳^{x+۲}=۹^{x})\geqslant -۶$ را حل کنید.

۴. در چهارضلعی محدب ABCD ، طول پاره‌خط‌هایی که وسط ضلع‌های مقابل را به‌هم وصل می کند، برابر است با یك متر. ضمناً، BC و AD برهم عمودند. مطلوب است، طول پاره‌خطی که وسط قطرهای AC و BD را به‌هم وصل می کند.

۵. جواب‌هایی ازمعادلهٔ

$$۲+\cos\frac{۳}{۲}x+\sqrt{۳}\sin\frac{۳}{۲}x=۴\sin^{۲}\frac{x}{۴}$$

را پیدا کنید که در شرط $\sin\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)>۰$ صدق کنند.

۶. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{x-y+۵}=۳\\ \sqrt{x+y-۵}=-۲x+۱۱\end{cases}$$

گروه چهارم

۱. دو گروه گچ کار، کار گچ کاری یك‌خانهٔ مسکونی را ، با هم، در شش‌روز تمام کردند، سپس، به‌ترتیب‌زیر، به گچ کاری باشگاهی مشغول شدند که حجم‌کار آن سه‌برابر حجم‌کار خانه مسکونی بود: ابتدا، مقداری ازکار راگروه اول انجام دادند و، سپس،کار را به گروه دوم سپردند که آن‌را به‌پایان رسانید. می‌دانیم که ظرفیت‌کار گروه اول، دو برابر ظرفیت‌کار گروه دوم است . کار گچ کاری باشگاه، در ۳۵روز تمام شد. اگر گروه اول بخواهد خانهٔ‌مسکونی را به‌تنهایی گچ کاری کند،به‌چندروزکاراحتیاج‌دارد، به‌شرطی که بدانیم، گروه دوم، برای همین‌کار، به‌بیش از ۱۴روزکار نیاز دارد.

۲. مطلوب است مساحت شکلی که محدود به‌نمودار تابع‌های زیر است:

$$y=-x^{۲}-۲x+۴،\quad y=-x^{۲}+۴x+۱،\ y=۵$$

۳. نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}(۲^{x+۲}-۴^{x})\geqslant -۲$ را حل کنید.

۴. در چهارضلعی محدب ABCD ، طول پاره‌خطی که وسط دوقطر را به‌هم وصل می کند، برابر است با طول پاره‌خطی که وسط دوضلع AD و BC را به‌هم می‌پیوندد. مطلوب است محاسبهٔ یکی از زاویه‌هایی که دو خط راست AB و CD باهم می‌سازند.

۵. همهٔ جواب‌های معادلهٔ

$$\sin\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۲}x\right)=$$
$$=۲\sqrt{۲}\cos\left(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)\cos\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)$$

را، که با شرط $\cos\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)<۰$ سازگارند پیدا کنید.

۶. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}\sqrt{y-x+۱}=۱\\ \sqrt{x-۲y+۳}=۳y-۲x-۱\end{cases}$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sin ۲x+\sin ۶x=۳\cos^{۲}۲x$ را حل کنید.

۲. باری را از مرکز A تا مرکز B، با کامیون حمل کرده‌اند. یک‌ساعت بعد از حرکت کامیون ، اتومبیلی از A به‌طرف B حرکت کرد و همراه با کامیون ، به B رسید. ضمناً، اگر کامیون و اتومبیل، در یک لحظه، یکی از A ودیگری از B ، به‌طرف هم حرکت کنند، بعد از ۱ ساعت و۱۲ دقیقه به‌هم می‌رسند. کامیون، برای رسیدن از A به B، چه‌زمانی در راه بوده است؟

۳. همهٔ مکعب مستطیل‌های ممکنی را در نظر می گیریم که قاعدهٔ هریک آن‌ها یک‌مربع باشدوهر کدام ازوجه‌های‌جانبی محیطی برابر ۶سانتیمتر داشته‌باشد. از بین این مکعب مستطیل‌ها ، آن‌را پیدا کنید که حداکثر حجم ممکن را داشته‌باشد و مقدار این‌حجم را پیدا کنید.

۴. در ذوزنقهٔ ABCD، باقاعده‌های AD و BC، طول ساق AB برابراست

با ۲ سانتیمتر. نیمساز زاویهٔ BAD ، خط راست BC را درنقطهٔ E قطع می‌کند. در مثلث ABE دایره‌ای محاط کرده‌ایم که برضلع AB درنقطهٔ M و برضلع BE در نقطهٔ H مماس است. طول پاره‌خط MH برابر ۱ سانتیمتر است. اندازهٔ زاویهٔ BAD را پیدا کنید.

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} y+۲=(۳-x)^{۲} \\ (۲z-y)(y+۲)=۹+۴y \\ x^{۲}+z^{۲}=۴x \end{cases}$$

را طوری پیدا کنید که باشرط $z \geqslant ۰$ سازگار باشند.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{۲(۵^{x}+۲۴)}-\sqrt{۵^{x}-۷} \geqslant \sqrt{۵^{x}+۷}$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $۹\cos^{۴}x-\sin^{۴}x=۲\sin^{۲}۲x$ را حل کنید.

۲. پیاده‌ای از A به‌طرف B حرکت کرد. هم‌زمان با او، دوچرخه‌سواری از B به‌طرف A خارج شد و ۵۰ دقیقه بعد از آغاز حرکت خود، به‌پیاده رسید. برای این‌که پیاده بتواند از A به B برسد، به‌چه‌زمانی نیازدارد، به‌شرطی‌که بدانیم، دوچرخه‌سوار همین راه را ۴ ساعت زودتر به‌پایان می‌رساند؟

۳. همهٔ مکعب مستطیل‌هایی را در نظر می‌گیریم که قاعده‌ای به‌شکل مربع و حجمی برابر ۴ سانتیمتر مکعب داشته‌باشند. از بین آن‌ها، مکعب مستطیلی را پیدا کنید که محیط وجه‌جانبی آن حداقل مقدارممکن باشد، و این‌محیط را محاسبه کنید.

۴. ارتفاع BD وارد برقاعدهٔ AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم کرده‌ایم. طول هریك از ساق‌های AB و BC مثلث ABC برابر است با ۸ سانتیمتر. درمثلث BCD، میانهٔ DE را رسم می‌کنیم. در مثلث BDE، دایره‌ای محاط می‌کنیم که برضلع BE در نقطهٔ K وبرضلع DE در نقطهٔ M مماس باشد. طول پاره‌خط KM برابر ۲ سانتیمتر است. اندازهٔ زاویهٔ BAC را پیدا کنید.

۵. جواب‌هایی از دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی

$$\begin{cases}(۲-x)(۳x-۲z)=۳-z\\ y^۳+۳y^۲=x^۲-۳x+۲\\ z^۲+y^۲=۶z\end{cases}$$

را پیدا کنید که با شرط $z\leqslant ۳$ سازگار باشند.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{۱۳^x-۵}\leqslant\sqrt{۲(۱۳^x+۱۲)}-\sqrt{۱۳^x+۵}$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $cos\frac{x}{۲}-cos\frac{۳}{۲}x=۳sin^۲\frac{x}{۲}$ را حل کنید.

۲. موتورسیکلت‌سواری از نقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B حرکت کرد. دو ساعت بعد، اتومبیلی از نقطهٔ A به‌طرف نقطهٔ B حرکت کرد و، همراه با موتورسیکلت به B رسید اگر موتورسیکلت و اتومبیل، از نقطه‌های A و B، به‌طرف یکدیگر حرکت می‌کردند، بعد از ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به‌هم می‌رسیدند. موتورسیکلت‌سوار، برای رسیدن از A به B، به‌چه زمانی نیاز دارد؟

۳. همهٔ مکعب مستطیل‌هایی را در نظر می گیریم که یکی از وجه‌های جانبی هرکدام از آن‌ها به‌شکل مربع و محیط قاعدهٔ پایینی آن برابر ۱۲ سانتیمتر باشد. از میان این مکعب مستطیل‌ها، آن‌را پیدا کنید که بیشترین حجم را داشته باشد و مقدار این حجم را به‌دست آورید.

۴. درمتوازی‌الاضلاع ABCD، ضلع AC طولی برابر ۶ سانتیمتر دارد. نیمساز زاویهٔ ADC، خط راست AB را در نقطهٔ E قطع می کند. درمثلث ADE، دایره‌ای محاط کرده‌ایم که برضلع AE در نقطهٔ K و برضلع AD درنقطهٔ T مماس باشد. طول پاره‌خط KT برابر است با ۳ سانتیمتر. اندازهٔ زاویهٔ BAD را به‌دست آورید.

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(x+۳)^۳=۳-۲y\\ z^۲+۴y^۲=۸y\\ (۲z-x)(x+۳)=۵x+۱۶\end{cases}$$

را به‌شرطی پیدا کنید که درشرط $z\geqslant ۰$ صدق کنند.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(17^x-8)}\leqslant\sqrt{17^x+15-\sqrt{\frac{1}{2}(17^x+8)}}$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $5\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 2x$ را حل کنید.

۲. دوچرخه‌سواری از A به‌طرف B حرکت کرد. هم‌زمان با او، موتورسواری از B به‌طرف A حرکت کرد و بعد از ۴۵ دقیقه به‌دوچرخه‌سوار رسید. برای این که دوچرخه‌سوار بتواند تمامی مسیر از A تا B را طی کند، به‌چه زمانی نیاز دارد، به‌شرطی که، موتورسوار، همین راه را با ۲ ساعت کمتر از دوچرخه‌سوار طی کند؟

۳. همهٔ مکعب مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که، هرکدام از آن‌ها، حجمی برابر $\frac{1}{2}$ سانتیمترمکعب داشته‌باشند. و یکی ازوجه‌های جانبی هریك ازآن‌ها، مربعی‌شکل باشد. از بین این مکعب مستطیل‌ها، آن را پیدا کنید که محیط قاعده‌اش کمترین مقدار ممکن باشد و، ضمناً، این‌محیط را به‌دست آورید.

۴. روی محیط دایرهٔ به‌شعاع ۱۲ سانتیمتر و مرکز O، دونقطهٔ A و B، قرار دارند. خط‌های راست AC و BC براین دایره مماس‌اند. دایرهٔ دیگری به‌مرکز M در مثلث ABC محاط ودر نقطهٔ K برضلع AC ودر نقطهٔ H برضلع BC مماس است. فاصلهٔ نقطهٔ M از خط راست KH برابر است با ۳ سانتیمتر. مقدار زاویهٔ AOB را محاسبه کنید.

۵. جواب‌های از دستگاه معادله‌های زیر را پیدا کنید که در شرط $z\leqslant 2$ صدق کنند:

$$\begin{cases}2(y-2)(y-z)=z-2\\ 4x^2+z^2=4z\\ 8x^3+z=3xy\end{cases}$$

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(15^x+9)}\leqslant\sqrt{15^x+12-\sqrt{\frac{1}{2}(15^x-9)}}$$

۱۹۷۹

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$ را حل کنید.

۲. مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های زیر را پیدا کنید:

$$y = -2x^2 + 3x + 6, \quad y = x + 2$$

۳. از بندر A و درجهت جریان آب، یك کشتی و یك کلك، همزمان، حرکت کردند. کشتی، خود را به‌بندر B ــ که در ۳۲۴ کیلومتری بندر A است ــ رسانید، ۱۸ ساعت در آن‌جا توقف کرد و، سپس، به‌طرف A برگشت. وقتی‌که این کشتی به ۱۸۰ کیلومتری A رسید، کشتی دوم، که ۴۰ ساعت بعد از کشتی اول از A حرکت کرده بود، به‌کلك رسید که موفق‌شده بود، در این مدت، ۱۴۴ کیلومتر جلو برود. فرض براین است که سرعت جریان آب ثابت، سرعت کلك برابر سرعت جریان آب وسرعت کشتی‌ها درآب ساکن ثابت باشد. مطلوب است سرعت کشتی درجهت جریان آب.

۴. ازنقطهٔ M، واقع درداخل مثلث‌حاده‌الزاویهٔ ABC، عمودهایی برضلع‌های آن رسم کرده‌ایم. طول ضلع‌ها وعمودهای وارد برآن‌ها، به‌ترتیب، عبارتند از a و k، b و m، c و n. مطلوب است نسبت مساحت مثلث ABC به‌مساحت مثلثی که راس‌های آن پاهای عمودها باشد.

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2 \left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right| \\ (6y^2+2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1 \end{cases}$$

راکه با شرط $|y| \leqslant 1$ سازگار باشند، پیدا کنید.

۶. نامعادلهٔ $\sqrt{x-3} > x+1$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6}\sin x$ را حل کنید.

۲. مطلوب است مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های

$$y = 3x^2 - 4x + 2, \quad y = 20 - x.$$

۳. نقطه‌های A، B و C، به‌ترتیب، به‌فاصلهٔ ۶۰، ۵۵ و ۵۶ کیلومتر از

نقطهٔ M واقع‌اند. سه‌پیاده ، در یك لحظه، از این سه‌نقطه به‌طرف نقطهٔ M حرکت کردند: اولی از A ، دومی از B و سومی از C. اولی ، تمام مسیر خود را با سرعتی ثابت طی کرد و ۲ ساعت زودتر از دومی وسومی (که با هم به M رسیدند) در نقطهٔ M بود. دومی، ۴۰ کیلومتر را با همان سرعت اولی پیمود و ، سپس، ۱ ساعت توقف کرد. سرعت دومی در بقیهٔ مسیر خود همان‌قدر کمتر از سرعت سومی بود که سرعت سومی از سرعت اولی کمتر بود، پیادهٔ سوم ، تمامی مسیر خود را با سرعتی ثابت طی کرد. سرعت پیاده‌های اول وسوم را پیدا کنید.

۴. از نقطهٔ M واقع درداخل مثلث حاده‌الزاویهٔ AB، عمودهایی برضلع‌های AB،BC وCA فرودآورده‌ایم. طول‌عمودها، به‌ترتیب، برابرند با l،m وn. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید، به‌شرطی‌که اندازهٔ زاویه‌های BAC ، ABC و ACB؛ به‌ترتیب، برابر α ، β و γ باشند.

۵. جواب‌هایی از دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر پیدا کنید که در شرط $۱ \leqslant y < ۱۰$ صدق کنند:

$$\begin{cases} (۳-y^۲)\cos^۲ x = \log_۳\left|\dfrac{۸+y}{y(۱-\sin^۳ x)}\right| \\ (y^۲+۸y)\left(۳^{۲+۲\sin^۴ x}+۳^{۲\cos^۴ x+\sin^۲ ۲x-۴}\right)= \\ \qquad =۲y^۲+۱۶y+۶۴ \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $x+۲<\sqrt{x+۱۴}$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. این معادله را حل کنید

$$\cos ۲x - \sin ۲x = ۱ - \cos x - \sin x$$

۲. مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های زیر را پیدا کنید:

$$y=۵-x^۲, \quad y=۳-x$$

۳. پیاده‌ای که باسرعت ثابت حرکت می‌کند، روز اول، ۳۵ کیلومتر راه‌رفت. درروزدوم ، بازهم باهمان سرعتی ثابت، ولی کمتر از سرعت روز قبل، ۴۵ کیلومتر طی‌کرد، ضمناً، نسبت به روز قبل، ۳ ساعت بیشتر راه پیمود. روز سوم، ۲۵ کیلومتر را با سرعت روز اول و ۱۲ کیلومتر را با سرعتی‌کمتر از سرعت روز دوم طی‌کرد ؛ سرعت او در این ۱۲ کیلومتر، همان‌قدر از

سرعت روز دوم کمتر بود که سرعت روزدوم ازسرعت روزاول. او در روز سوم، ۲ ساعت کمتراز روز دوم راه‌پیمایی کرده بـود. مطلوب است سرعت پیاده، در روزهای اول ودوم.

۴. مساحت مثلث ABC برابراست با S. اندازهٔ زاویه‌های CAB، ABC و ACB، به‌ترتیب، برابرندبا α، β و γ. اندازهٔ ارتفاع‌های مثلث را پیدا کنید.

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های زیر را، با شرط $۰ \leqslant y \leqslant ۱$، پیدا کنید.

$$\begin{cases} ۴ - y + \sin^۲ x = \log_۲ \left| \dfrac{y+۷}{y} \cos x \right| \\ (y^۲ + ۷y)(۲^{۲ + \cos ۲x} + ۲^{-۲\cos^۲ x}) = ۳y^۲ + ۱۴y + ۴۹ \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $x + ۴ < \sqrt{x + ۴۶}$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. این معادله را حل کنید.

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin x + \sqrt{۳\sin ۲x}$$

۲. مساحت شکل محصور به وسیلهٔ نمودارهای این تابع‌ها را پیدا کنید:

$$y = -۳x^۲ - ۴x + ۱۶, \qquad y = ۲x + ۷$$

۳. آب به‌وسیلهٔ دولولهٔ با قطرهای متفاوت واردمخزن می‌شود. روز اول، باکار هردولوله، ۱۴ مترمکعب آب، وارد مخزن شد. روز دوم، تنها لولهٔ کوچکتر بازبود که، با ۵ ساعت کاربیشتر نسبت به‌روز اول، بازهم ۱۴مترمکعب آب به‌مخزن ریخت، روز سوم، که درمدتی به‌اندازهٔ روز دوم آب به مخزن می‌ریخت، ابتدا هردو لوله باز بودند و ۲۱ مترمکعب‌آب به مخزن واردکردند سپس، تنها لولهٔ بزرگتر کارمی‌کرد که بازهم ۲۰ مترمکعب‌آب وارد مخزن کرد. اگربهره‌دهی هرلوله را ثابت فرض‌کنیم، ببینید، هرلوله، چقدر آب‌در هرساعت وارد مخزن می کند.

۴. طول ضلع‌های مثلث حاده‌الزاویه ABC، به ترتیب، برابرند با a، b و c. نقطهٔ M در درون مثلث جـا دارد. زاویه‌های AMB، BMC و CMA، با هم بـرابـرند. مجموع طول پاره‌خطهای AM، BM و CM را پیدا کنید.

۵. همهٔ جوابهای این دستگاه معادله‌ها را، باشرط $|y| \leqslant ۰/۵$، پیدا کنید:

$$\begin{cases} 2y\cos x = \log_3\left|\dfrac{y+1}{y\cos x}\right| \\ (y^2+x)(3^{2-2\cos 2x}+3^{-2\sin^2 x}) = 4y^2+2y+1 \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $x-3<\sqrt{x+27}$ را حل کنید.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $\log_7\left(\frac{x+3}{21}\right)=\log_7\left(\frac{2}{3x-6}\right)$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $2\cos^2 3x - \cos 3x = 0$ را حل کنید.

۳. روی صفحهٔ مختصات، همهٔ مثلث‌هایی را در نظر می‌گیریم که، در آن‌ها، $\widehat{ACB}$، راس A به‌مختصات $(-4, 0)$، راس C واقع بر بازهٔ $[0, 4]$ از محور Ox و راس B واقع برسهمی $y=4x-x^2$ باشد. مختصات نقطهٔ B را طوری پیدا کنید که مساحت مثلث ABC، بیشترین مقدارممکن شود.

۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC با قاعدهٔ AC، دایره‌ای محاط کرده‌ایم که برساق AB در نقطهٔ M مماس است. از نقطهٔ M، عمود ML را برضلع AC از مثلث ABC فرودآورده‌ایم (L، پای این عمود است). اندازهٔ زاویهٔ BCA را پیدا کنید، به‌شرطی که مساحت مثلث ABC برابر ۱ و مساحت چهارضلعی LMBC برابر S باشد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را، طوری پیدا کنید که تعداد ریشه‌های معادلهٔ

$$3(x^2+a^2)=1-(9a^2-2)x$$

از تعداد ریشه‌های معادلهٔ زیر تجاوز نکند:

$$x+(3a-2)^2\cdot 3^x=(8^a-4)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3x^3$$

۶. نامعادلهٔ $\frac{x+7}{x-2}>x-1$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\log_3(1-x)=\log_3\left(\frac{6}{2-x}\right)$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sqrt{2}\sin^2 5x-\sin 5x=0$ را حل کنید.

۳. در صفحهٔ محورهای مختصات، همهٔ مثلث‌های ABC را درنظر می‌گیریم که، در هر کدام از آن‌ها، $\widehat{ACB}=90^\circ$، راس A به مختصات $(0, 1)$، راس C واقع بر بازهٔ $[0, 1]$ از محور Ox و راس B واقع بر سهمی $y=x-x^2$ باشد. راس B چه‌مختصاتی داشته‌باشد تا مساحت مثلث ABC، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۴. مساحت‌لوزی ABCD برابر است با ۲. در مثلث ABD، که ازضلع‌های AB و AD و قطر BD لوزی مفروض تشکیل شده است، دایره‌ای محاط کرده‌ایم‌که برضلع AB در نقطهٔ K مماس است. ازنقطهٔ K، خط KL را موازی قطر AC لوزی رسم می‌کنیم (L، روی ضلع BC قراردارد). مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ BAD، به‌شرطی‌که مساحت مثلث KBL برابر a باشد.

۵. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$2x^3+6x=(3^{6a}-9)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}-(3a-1)^2 12^x$$

کمتر از تعداد جواب‌های معادله زیر نباشد:

$$3(5x^2-a^4)-2x=2a^2(6x-1)$$

۶. نامعادلهٔ $\frac{x+5}{x-1}<x+1$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\log_5\left(\frac{2}{x+1}\right)=\log_5\left(\frac{2+x}{10}\right)$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sqrt{2}\cos^2 7x-\cos 7x=0$ را حل کنید.

۳. روی صفحهٔ مختصات، همهٔ مثلث ABC را در نظر می‌گیریم که، درآن‌ها،

$\widehat{ACB}=90^\circ$ ، راس A به‌مختصات $(0, -5)$، راس C واقع بر بازهٔ $[0, 5]$ از محور Ox وراس B واقع برسهمی $y=5x-x^2$ باشد. راس B چه‌مختصاتی داشته‌باشد تا مساحت مثلث ABC ، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۴. درمتوازی‌الاضلاع ABCD، قطر AC برضلع AB عمود است. دایره‌ای برضلع BC از متوازی‌الاضلاع ABCD، در نقطهٔ P و برخط راستی‌که از راس‌های A و B این‌متوازی‌الاضلاع می گذرد، درنقطهٔ A مماس‌است. از نقطهٔ P ، عمود بر PQ را برضلع AB رسم کرده‌ایم (نقطهٔ Q ، پای این عمود است) . مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ ABC ، به‌شرطی‌که مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر $\frac{1}{2}$ و مساحت پنج‌ضلعی QPCDA برابر S باشد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیداکنید‌که، برای هرکدام از آن‌ها، تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$2(7x^2-a^4)+a^2=(12a^2+1)x$$

از تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر بیشتر نباشد:

$$x^3+\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 7^x=(49^{2a}-7)\, log_7\left(7^{3a}-\frac{1}{4}\right)-7x$$

۶. نامعادلهٔ $\frac{x+11}{x+1}>x-1$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $log_2\left(\frac{12}{-3-x}\right)=log_2(1-x)$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $2\sin^2 5x-\sin 5x=0$ را حل کنید.

۳. درصفحهٔ مختصات، همهٔ مثلث‌هایی‌را درنظر می گیریم که، در مورد هرکدام ازآن‌ها، $\widehat{ACB}=90^\circ$، راس A به‌مختصات $(2, 0)$، راس C واقع بر بازهٔ $[0, 2]$ از محور Ox و راس B واقع برسهمی $y=2x-x^2$ باشد. راس B چه‌مختصاتی داشته‌باشد تا مساحت مثلث ABC ، بیشترین مقدار ممکن شود ؟

۴. مساحت مستطیل ABCD برابراست با ۱. دایره‌ای در نقطهٔ E برقطر AC از مستطیل ABCD و در نقطهٔ D، برخط راستی که از راس‌های C و D این مستطیل می گذرد، مماس است، از نقطهٔ E، عمود EF را برضلع CD رسم کرده‌ایم (F، پای این‌عمود است). مطلوب است مقدار زاویهٔ BAC، به‌شرطی که مساحت ذوزنقهٔ AEFD برابر a باشد.

۵. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$۴x+x^{۳}=\left(۴^{a}-\frac{۱}{۲}\right)\sqrt{۱۵-۳^{۵a}}-(۲a+۱)^{۲}\cdot ۴^{x}$$

از تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر کمتر نباشد:

$$a^{۲}(۲x+a^{۲}-۱)=x(۳x-۱)$$

۶. نامعادلهٔ $x+۱<\frac{x+۷}{x+۳}$ را حل کنید.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $\frac{۳۰x-۹}{x-۲}\geqslant ۲۵(x+۲)$ را حل کنید.

۲. این معادله را حل کنید:

$$۲\cos ۲x+\cos^{۲}\frac{x}{۲}-۱۰\cos\left(\frac{۵\pi}{۲}-x\right)+\frac{۷}{۲}=\frac{۱}{۲}\cos x$$

۳. اتومبیلی از شهر A به‌طرف شهر B حرکت کرد. همزمان با آن، اتومبیل دیگری از شهر C ــ که بین دو شهر A و B قراردارد ــ به‌طرف شهر A حرکت کرد. وقتی که اتومبیل اول به B رسید، به‌طرف A برگشت و وقتی که اتومبیل دوم به A رسید به‌طرف شهر B برگشت. آن‌ها در نقطهٔ D به‌هم‌رسیدند و، به‌طور همزمان، اولی به A ودومی به B رسید. هراتومبیل، با سرعت ثابت خود حرکت می کرد، ولی اولی در راه از C تا A و دومی در فاصلهٔ از B تا D توقفی داشتند و توقف هردو به‌یك اندازه بود. فاصلهٔ C تا D را پیدا کنید، به‌شرطی که فاصلهٔ A تا C برابر ۲۷۰ کیلومتر

وفاصلهٔ C تا B برابر ۱۸۰ کیلومتر باشد.

۴. در یك مخروط قائم دوار، دوکره باشعاع‌های برابر قرار دارند که برصفحهٔ قـاعدهٔ مخروط ، در دو نقطه، که نسبت به‌مرکز قـاعده متقارن یکدیگرند ، مماس‌اند. هرکره برسطح‌جانبی مخروط وهمچنین، برکرهٔ دیگر مماس‌است. زاویهٔ بین مولد مخروط با قاعدهٔ‌آن چقدرباشد تا، به‌ازای آن، حجم مخروط حداقل مقدار ممکن شود .

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که ، برای هرکدام ازآن‌ها ، نامعادلهٔ

$$[a^{۳}+(۱-\sqrt{۲})a^{۲}-(۳+\sqrt{۲})a+۳\sqrt{۲}]x^{۲}+$$
$$+۲(a^{۲}-۲)x+a>-\sqrt{۲}$$

برای هرمقدار $x>۰$ برقرارباشد.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $\frac{۴x+۱}{۴(۲-x)}\geqslant x+۲$ را حل کنید.

۲. این‌معادله را حل کنید:

$$sin^{۲}\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}cos۲x+۲=۴sin\left(x-\frac{۷\pi}{۲}\right)$$

۳. در نیمهٔ راه بین شهرهای M و N ، که فاصلهٔ بین‌آن‌ها برابر ۲۸۰ کیلومتر است، قصبهٔ P وجود دارد. اتوبوسی از M وکامیونی از P ، در یك‌لحظه، به‌طرف هم حرکت‌کردند. اتوبوس، بعد از رسیدن به N به‌طرف شهر M برگشت ؛ همچنین ، کامیون بعد از رسیدن به M به‌طرف شهر N برگشت. آن‌ها در نقطهٔ B به‌هم رسیدند و، سپس، درهمان لحظه‌ای‌که اتوبوس به‌M رسید، کامیون هم وارد شهر N شد. فاصلهٔ شهر M تا نقطهٔ B را پیدا کنید، به‌شرطی‌که اتوبوس وکامیون، هرکدام، باسرعت ثابت خود حرکت می‌کنند وهردو توقف‌هایی مساوی داشته‌اند: اتوبوس درراه از N به B ، وکامیون، در مسیر از P به M.

۴. در هرم منتظمی با قاعدهٔ مربع ، دوکرهٔ بـا شعاع‌های برابر r قراردارند. مرکزهای این‌دو کره، روی محور تقارن هرم قراردارد . یکی ازدوکره بر همهٔ وجه‌های جانبی، و دیگری برقاعدهٔ هرم وکرهٔ اول مماس است. ارتفاع را طوری پیدا کنید‌که، به‌ازای‌آن، حجم هرم،کمترین مقدار ممکن باشد.

۵. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، نامعادلهٔ

$$[a^3+(1-\sqrt{3})a^2-(4+\sqrt{3})a+4\sqrt{3}]x^2+$$
$$+2(a^2-3)x+a>-\sqrt{3}$$

برای همهٔ مقدارهای $x>0$ برقرار باشد.

گروه سوم

۱. نامعادلهٔ $\frac{3x+6}{4-x}\geqslant x+4$ را حل کنید.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\cos^2 x-\cos 2x+2\sin^2\frac{x}{2}+\cos x=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cos\left(\frac{11\pi}{2}+x\right)$$

۳. فاصلهٔ بین شهرهای C و D برابر است با ۱۰۵ کیلومتر. وقتی‌که قطار برقی از شهر C به‌طرف شهر D حرکت کرد، قطارمقابل، دوسوم راه از D تا C را پیموده بود. قطار اول بعد از رسیدن به D به‌طرف شهر C برگشت و قطار دوم بعد از رسیدن به‌شهر C، به‌طرف D برگشت و در نقطهٔ K به‌هم رسیدند (توقف قطار اول در شهر D به‌اندازهٔ توقف قطار دوم در شهر C بود). و سپس، در همان لحظه‌ای که قطار اول به C رسید، قطار دوم هم به D رسیده بود. مطلوب‌است فاصلهٔ نقطهٔ K تا شهر D، به‌شرطی‌که هرقطار با سرعت ثابت مربوط به‌خود حرکت کند و قطار اول، در مسیر از D به K توقفی داشته است که با توقف قطار دوم در مسیر از D به C یکی بوده است.

۴. در یك هرم منتظم با قاعدهٔ مربع، دو کره به‌شعاع r قرار دارند که برصفحهٔ قاعده مماس‌اند؛ نقطه‌های تماس روی‌خط راستی قراردارند که‌وسط دوضلع روبه‌رو را در قاعده به‌هم وصل می‌کنند. هرکره بریك وجه جانبی هرم و کرهٔ دیگر مماس است. ارتفاع هرم را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن، حداقل مقدار را برای حجم هرم داشته‌باشیم.

۵. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، نابرابری

$$[a^3-(1+\sqrt{2})a^2+(\sqrt{2}-3)a+3\sqrt{2}]x^2+$$
$$+2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}$$

برای همهٔ مقدارهای $x>0$ برقرار باشد.

۱. نامعادلهٔ $\frac{3x-13}{2(x-3)} \geqslant x+3$ را حل کنید.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\cos^3 x - 6\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + 4\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$$

۳. قایق‌های موتوری «ستاره» و «شهاب»، در نزدیکی ساحل، بین شهرهای A و B، گشت می‌زنند. فاصلهٔ بین دو شهر A و B برابر ۶۶ کیلومتراست. «شهاب» در همان لحظه‌ای از A به طرف B حرکت کرد، که «ستاره» از ایستگاه Q، واقع در ۲۲ کیلومتری B به طرف A آمد. «شهاب»، بعد از رسیدن به B، به طرف شهر A برگشت و «ستاره» بعد از رسیدن به A به سمت B حرکت کرد. دو قایق در ایستگاه P به‌هم رسیدند، هریك راه خود را ادامه دادند و با هم، «شهاب» به A و «ستاره» به B رسید. فاصلهٔ بین‌دو ایستگاه P و Q را پیدا کنید، به شرطی‌که بدانیم که هرقایق با سرعت ثابت خود حرکت می‌کند و هردو توقفی مساوی، ضمن راه داشته‌اند: «شهاب» در فاصلهٔ از B تا K و «ستاره» در فاصلهٔ از Q تا A.

۴. در مخروط قائم دواری، دوکره با شعاع‌های برابر، قراردارد که مرکزهای آن‌ها روی محور مخروط واقع شده است. یکی از کره‌ها، برسطح جانبی مخروط و دیگری برقاعدهٔ مخروط و کرهٔ اول مماس است. زاویهٔ بین مولد مخروط را با قاعدهٔ آن، طوری پیدا کنید که حجم مخروط کمترین مقدار ممکن باشد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید، به‌نحوی‌که نابرابری

$$[a^3+(1-\sqrt{7})a^2-(8+\sqrt{7})a+8\sqrt{7}]x^2+2(a^2-7)x+$$
$$+a>-\sqrt{7}$$

برای همهٔ مقدارهای $x>0$ برقرار باشد.

§ ۵. دانشکدهٔ زیست‌شناسی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sqrt{۶-۴x-x^۲}=x+۴$ را حل کنید.

۲. در چهار ضلعی مجدب MNLQ ، دو زاویهٔ رأس‌های N و L، قائمه‌اند و زاویهٔ رأس M برابر است با $arctg\frac{۲}{۳}$. طول قطـر NQ را پیدا کنید، به شرطی که طول ضلع LQ ، نصف طول ضلع MN و ۲ متر بیشتر از طول ضلع LM باشد.

۳. مطلوب است مساحت شکل محدود به نمودار تـابع $y=x^۲-۴x+۵$ و مماس‌های بر آن $y=-۲x+۴$ در نقطهٔ (۲ , ۱) و $y=۴x-۱۱$ در نقطهٔ (۵ , ۴).

۴. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۲}\cos\left(\frac{x}{۵}-\frac{\pi}{۱۲}\right)-\sqrt{۶}\sin\left(\frac{x}{۵}-\frac{\pi}{۱۲}\right)=$$
$$=۲\sin\left(\frac{x}{۵}+\frac{۲\pi}{۳}\right)-۲\sin\left(\frac{۳x}{۵}+\frac{\pi}{۶}\right)$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر s را پیدا کنید، به‌نحوی که، برای هر کدام از آن‌ها، هر یك ازدو معادلهٔ $x^۲+\frac{۳x}{s}+۲s=۰$ و $x^۲+\frac{۱۲x}{s}-s=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشند و، ضمناً، درفاصله بین ریشه‌های یکی‌ازمعادله‌ها، هیچ کدام از ریشه‌های معادلهٔ دیگر وجود نداشته باشد.

۶. دو گروه کارگر، کار خود را ، ساعت ۸ آغاز کـردند. بعد از آن کـه ۷۲ قطعه را باهم آماده کردند، به‌طور جداگانه به‌کار پرداختند. در ساعت ۱۵، روشن شد که، در زمان کار جدا از هم، گروه اول ۸ قطعه بیش ازگروه دوم تهیه کرده است. روز بعد، گروه اول در هرساعت يك قطعه بیشتر ، و گـروه دوم ، در هرساعت يك قطعه کمتر آماده کردند. کارگروه‌ها با هم ودر ساعت ۸ آغاز شد، ولی دوباره ، بعد از ساختن ۷۲ قطعه ، از هم جدا شدنـد در دوران کار جداگانه، گروه اول ۸ قطعه بیشتر ازگروه دوم آماده کرده بود. کار هم درساعت ۱۳ به‌پایان رسید. هر گروه درهرساعت، چند قطعه را آماده‌می کند؟

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sqrt{۱+۴x-x^۲}=x-۱$ را حل کنید.

۲. در چهار ضلعی محدب MNLQ، زاویهٔ دو رأس N و L قائمه و اندازهٔ زاویهٔ رأس M برابر $\operatorname{arctg} 3$ است. مساحت چهار ضلعی را پیدا کنید، به شرطی که طول ضلع NL دو برابر طول ضلع LQ و ۵متر بیشتر از طول ضلع NM باشد.

۳. مطلوب است مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع $y=x^2-2x+2$ و دو مماس مرسوم بر آن: $y=2-2x$ در نقطهٔ $(0 , 2)$ و $y=4x-7$ در نقطهٔ $(3 , 5)$.

۴. این معادله را پیدا کنید:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=$$
$$=2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(\frac{x}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

۵. مقدارهایی از پارامتر s را پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، اولاً هر کدام از دو معادلهٔ $x^2+4x+4s=0$ و $x^2+3x+6s=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی باشند و، ثانیاً هیچ کدام از ریشه‌های یکی از معادله‌ها، در فاصلهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ دیگر نباشد.

۶. مقدار خاکی که ماشین خاك بردار اول می‌تواند در هر ساعت جابه‌جا کند، کمتر از میزان خاك برداری ماشین دوم در هر ساعت است. در آغاز، دو ماشین باهم شروع به‌کار کردند وخندقی به‌حجم ۲۴۰ مترمکعب حفر کردند. بعد، ماشین اول به کار خاك‌برداری از خندق دوم پرداخت و ماشین دوم، کار را در خندق اول ادامه داد. ۷ ساعت بعد از آغاز کار، حجم خندق اول، ۴۸۰ مترمکعب بیشتر ازحجم خندق دوم از آب درآمد. در روز دوم، حجم کار ماشین دوم ساعتی ۱۰ متر بیشتر و حجم کار ماشین اول ساعتی ۱۰ متر مکعب کمتر، بود؛ وبعد از آن که ۲۴۰ مترمکعب با هم خاك برداری کردند، ماشین اول به‌کار حفر خندق دیگری پرداخت و ماشین دوم کار مشترك اول را ادامه داد. ۵ ساعت بعد از آغاز کار، حجم کار خندق اول، ۴۸۰ متر-مکعب بیشتر از حجم کار خندق دوم بود. هر ماشین، ساعتی چند مترمکعب خاك برداری می کند؟

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$ را حل کنید.

۲. در چهارضلعی محدب $PQRS$ ، زاویه‌های رأس‌های Q و R قائمه ومقدار زاویهٔ رأس P برابر $\frac{\pi}{3}$ است. طول‌قطر PR را پیدا کنید ، به‌شرطی که طول قطر QS برابر $2\sqrt{13}$ متر و طول ضلع PQ برابر ۶ متر باشد.

۳. مساحت شکلی را پیدا کنیدکه به وسیلهٔ نمودار تابع $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ و دو مماس بر آن محصور شده باشد: $y=-x+1/5$ درنقطهٔ $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ و $y=2x-6$ در نقطهٔ $(4,2)$.

۴. این معادله را حل کنید:

$$2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right)+ +3\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{16}\right)$$

۵. مقدارهای‌پارامتر s را طوری پیدا کنیدکه برای هر کدام ازآن‌ها، دومعادلهٔ $x^2+\frac{6}{s}x-s=0$ و $x^2-\frac{8x}{s}-2s=0$ ، هر یک دارای دو ریشهٔ حقیقی باشند و ، ضمناً ، تنها یك ریشه ازیك معادله در فاصلهٔ بین دو ریشهٔ معادلهٔ دیگر واقع باشد.

۶. حجم آبی که به‌کمك تلمبهٔ اول در هرساعت می‌توان به‌دست آورد، کمتراز حجم‌آبی است‌که تلمبهٔ دوم درهرساعت می‌دهد. دو تلمبه را باهم و دریك زمان ، برای پر کردن استخر، بازکرده‌ایم. بعداز آن‌که ۴۰۰ مترمکعب آب وارد استخر شد ، تلمبهٔ اول را برای پرکردن استخر دوم اختصاص دادیم و تلمبهٔ دوم کار خود را برای پرکردن استخر اول ادامه داد. ۵۸ ساعت بعداز به‌کار انداختن تلمبه‌ها ، مقدارآب استخراول ، ۷۰۰ مترمکعب بیشتراز حجم آب استخر دوم بود. یکبار دیگر، که تلمبهٔ اول ساعتی ۳ مترمکعب کمتر وتلمبهٔ دوم ساعتی ۳ مترمکعب بیشتر آب می‌داد ، دوتلمبه را باهم برای پرکردن استخر اول بازکردیم و ۴۰۰ مترمکعب آب وارد آن کردیم. بعداز آن راه آب تلمبهٔ اول را به طرف استخر دوم برگرداندیم، ولی تلمبهٔ دوم، به‌کار خود برای پرکردن استخر اول ادامه داد. ۳۳ ساعت بعداز بازکردن تلمبه‌ها ، دراستخر اول، ۷۰۰ مترمکعب آب بیشترازاستخر

دوم وارد شده بود. هرتلمبه در هرساعت چند مترمکعب آب می‌دهد؟

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\sqrt{۴+۲x-x^۲}=x-۲$ را حل کنید.

۲. در چهـار ضلعی محدب ABCD ، هر یك از دو زاویهٔ رأس‌هـای A و B قائمه و اندازهٔ زاویهٔ D برابر $\frac{\pi}{۴}$ است. طول ضلع BC برابر ۱ متر وطول قطر BD برابر ۵ متر است. مساحت این چهارضلعی را پیداکنید.

۳. مساحت شکل محدود به نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۴/۵$ و دومماس برآن‌را پیداکنید: $y=۴-۲x$ درنقطهٔ $(۱,۲)$ و $y=x-۳/۵$ در نقطهٔ $\left(۴,\frac{۱}{۲}\right)$.

۴. این معادله را حل کنید:

$$۲\sin\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)+۲\cos\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)=۳\sin\left(\frac{x}{۴}+\frac{\pi}{۸}\right)+\sqrt{۳}\cos\left(\frac{x}{۴}+\frac{\pi}{۸}\right)$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر s را طوری پیداکنیدکه ، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، اولاً دومعادلهٔ $x^۲+۳x+۲s=۰$ و $x^۲+۶x+۵s=۰$ ، هرکدام دو ریشهٔ متمایزداشته باشند ، ثانیاً ، درفاصلهٔ بین ریشه‌های یك معادله تنها یکی از ریشه‌های معادلهٔ دیگر واقع باشد.

۶. در باند دایره‌ای شکل یخ‌بازی ، به محیط ۴۰۰ متر، از یك نقطه و در یك زمان، دو یخ‌باز (حرفه‌ای وتازه‌کار) ، دردو جهت مختلف ، حرکت‌کردند. وقتی‌کـه به هم رسیدند، تازه‌کار در یك لحظه جهت خودرا عوض‌کرد و به دنبال حرفه‌ای رفت. حرفه‌ای ، ۲ دقیقه و ۵ ثانیه بعداز آغاز حـرکت به تازه‌کار رسید (یعنی یك دور از او جلو افتاد). اگر سرعت حرفـه‌ای درهر ثانیه ۲ متر بیشتر وسرعت تازه‌کار در هرثانیه ۲ مترکمتر بود ، این‌برخورد دوم ، بعداز ۱ دقیقه و۱۵ ثانیه ، بعداز آغاز حرکت، پیش می‌آمد. سرعت هرکدام از یخ‌بازها را پیداکنید.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلهٔ $\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{2}$ را حل کنید.

۲. همهٔ مقدارهای A و B را، طوری پیدا کنید که تابع

$$f(x)=A\sin(\pi x)+B$$

با شرطهای $f'(1)=2$ و $\int_0^2 f(x)dx=4$ سازگار باشد.

۳. دایره‌ای به مرکز O و شعاع برابر ۲ مفروض است. از انتهای پاره خط OA، که دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند، مماس AK را بر دایره رسم کرده‌ایم. زاویهٔ OAK برابر است با $\frac{\pi}{3}$. مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایره‌ای که بر AK، AM و کمان MK مماس باشد.

۴. نامعادلهٔ $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<3^{\sqrt{x^2-3}-1}\times 28$ را حل کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ

$$x|x+2a|+1-a=0$$

یك جواب منحصر به فرد داشته باشد.

۶. جریان آبی به رودخانه می‌ریزد. قایقی از ایستگاه A واقع درمسیر جریان آب، ۸۰ کیلومتر و در جهت جریان پیش می‌رود تا به رودخانه می‌رسد، سپس در رودخانه، به طرف بالا و درخلاف جهت حرکت آب خودرا به ایستگاه B می‌رساند؛ برای این منظور، یعنی رسیدن از ایستگاه A درمسیر جریان تا ایستگاه B در مسیر رودخانه، روی هم ۱۸ ساعت وقت صرف می‌کند. سپس، قایق درجهت عکس، یعنی از B به سمت A حرکت می‌کند و با صرف وقت ۱۵ ساعت، همان مسیر را طی می‌کند تا به A می‌رسد. سرعت اختصاصی قایق، یعنی سرعت آن در آب ساکن، ۱۸ کیلومتر در ساعت وسرعت حرکت آب رودخانه ۳ کیلومتر در ساعت است. فاصلهٔ بین ایستگاه A تا ایستگاه B و سرعت «جریان آب» را پیدا کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sin^2 2x-\cos^2 x+\frac{3}{4}=0$ را حل کنید.

۲. مقدارهای A و B را طوری پیدا کنید که تابع

$$f(x)=A\cdot ۳^x+B$$

با شرطهای $f'(۰)=۲$ و $\int_۱^۲ f(x)dx=۱۲$ سازگار باشد.

۳. شعاع OM از دایرهٔ به‌مرکز O و وتر KP از آن، در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کرده‌اند. طول پاره‌خطهای OM و OA، به‌ترتیب، برابر است با r و a. اندازهٔ زاویهٔ KAM برابر α است $\left(\alpha<\frac{\pi}{۲}\right)$. مطلوب است شعاع دایره‌ای که پاره‌خطهای AK، AM و کمان MK مماس باشد.

۴. این نامعادله را حل کنید:

$$\log^۲_{\frac{۱}{۲}}(x-x^۲+۲)+۳\log_{\frac{۱}{۲}}(x-x^۲+۲)+۲\leqslant ۰$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ زیر تنها دارای دو ریشهٔ مختلف باشد:

$$x^۲+۴x-۲|x-a|+۲-a=۰$$

۶. دو رود به‌دریاچه‌ای می‌ریزند. قایقی از ایستگاه A واقع دررودخانهٔ اول در جهت جریان آب حرکت می‌کند و، بعد از پیمودن ۳۶ کیلومتر، به‌دریاچه می‌رسد، بعد ۱۹ کیلومتر دردریاچه حرکت می‌کند (آب دریاچه‌ساکن‌است) و، سپس، وارد رودخانهٔ دوم می‌شود و با پیمودن ۲۴ کیلومتر در خلاف جهت جریان آب، به‌ایستگاه B می‌رسد. قایق، برای رسیدن از A به B، روی‌هم ۸ ساعت وقت صرف می‌کند و از این ۸ ساعت، ۲ ساعت را، در دریاچه بوده است. سرعت جریان آب در رودخانهٔ اول، ۱ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت جریان آب دررودخانهٔ دوم است. سرعت جریان آب را در هر رودخانه پیدا کنید (سرعت اختصاصی قایق، یعنی سرعت آن در آب ساکن، مقداری است ثابت).

گروه سوم

۱. معادلهٔ $۲\cos^۲\left(۲x+\frac{\pi}{۳}\right)-۳\sin^۲\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)=۲$ را حل کنید.

۲. عددهای A و B را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، تابع

$$f(x)=A\sin 2x+B$$

در شرط‌های $f'(0)=4$ ، $\int_0^{2\pi} f(x)dx=3$ صدق کند.

۳. دایرهٔ به‌مرکز O و شعاع r مفروض است . از نقطهٔ A از پاره‌خط OA ، که محیط دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است ، قاطعی رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌های K و P قطع کند (نقطهٔ K ، بین دو نقطهٔ A و P قراردارد). اندازهٔ زاویهٔ MAK برابر است با $\frac{\pi}{3}$. طول پاره‌خط OA برابر است با a. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که برپاره‌خطهای AM،AK وکمان MK مماس باشد.

۴. این‌معادله را حل کنید:

$$4^{\sqrt{9-x^2}+1}+2<2^{\sqrt{9-x^2}}\times 9$$

۵. مقدار پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ

$$x|x-2a|-1-a=0$$

تنها یک‌جواب داشته‌باشد.

۶. رودی به‌رود دیگر می‌ریزد . یک‌کشتی از ایستگاه A در رودخانهٔ اول، در جهت جریان‌آب ، حرکت می‌کند و پس از طی ۶۰ کیلومتر به‌رودخانهٔ دوم می‌رسد . سپس ، در رودخانهٔ دوم ، باز هم در جهت جریان آب ، ۶۵ کیلومتر جلومی‌رود تا به‌ایستگاه B می‌رسد. بعدهمین مسیر را برمی‌گردد و ، برای این مسیر عکس ، روی‌هم ۱۰ ساعت وقت صرف می‌کند تا از B به A برسد. کشتی، فاصلهٔ از A تا رودخانهٔ دوم‌را در ۳ ساعت و ۴۵ دقیقه پیموده است . سرعت جریان آب در رودخانهٔ دوم، ۱ کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت جریان‌آب دررودخانهٔ اول است . سرعت اختصاصی کشتی، یعنی سرعت آن در آب ساکن ، مقداری است ثابت . سرعت اختصاصی کشتی را پیدا کنید .

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\sin^4 x+5\cos 2x+4=0$ را حل کنید .

۲. همهٔ عددهای A و B را پیدا کنید که ، برای آن‌ها ، تابع

$$f(x)=A\cdot 2^x+B$$

با شرط‌های $f'(1)=2$ و $\int_0^2 f(x)dx=7$ سازگار باشد.

۳. از نقطهٔ M واقع برمحیط دایرهٔ به‌شعاع r ، قطر MK و وتر MP را رسم کرده‌ایم. اندازهٔ زاویهٔ PMK برابر است با α. شعاع دایرهٔ مماس بر پاره‌خط‌های MK ، MP وکمان PK را پیدا کنید.

۴. این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{2}{3}x^2\right)\leqslant 2$$

۵. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ

$$x^2-4x-2|x-a|+2+a=0$$

درست دو ریشهٔ متفاوت داشته باشد.

۶. دو رود به‌دریاچه‌ای می‌ریزند. قایق از ایستگاه A واقع در رودخانهٔ اول، درجهت جریان‌آب، ۲۴ کیلومتر طی می‌کند تا به‌دریاچه می‌رسد. دوساعت در دریاچه حرکت می‌کند (آب دریـاچه آرام است و جریانی ندارد) و، سپس، ۳۲ کیلومتر در رودخانهٔ دوم، در خلاف جریان آب، پیش می‌رود تا به‌ایستگاه B می‌رسد. قایق، برای رسیدن از ایستگاه A به‌ایستگاه B ، روی‌هم، ۸ ساعت وقت صرف کرده‌است؛ ولی اگر دردریاچه، ۱۸ کیلومتر اضافی گردش می‌کرد، برای رسیدن از A به B ، به ۱۰ ساعت‌وقت نیاز داشت. سرعت جریان‌آب دررودخانهٔ اول، ساعتی ۲ کیلومتر بیشتر ازسرعت جریان‌آب در رودخانهٔ دوم است. سرعت جریان آب را در هر رودخانه پیدا کنید. (سرعت اختصاصی قایق، یعنی سرعت آن در آب ساکن، مقدار ثابتی است.)

۱۹۷۹

گروه اول

۱. همهٔ مقدارهای x را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هریك ازآن‌ها، مماس‌های برنمودار تابع‌های

$$y(x)=3\cos 5x \quad \text{و} \quad y(x)=5\cos 3x+2$$

در نقطهٔ به‌طول x ، با هم موازی باشند.

۲. از دو نقطه‌ای که فاصلهٔ بین آن‌ها برابر ۲۴۰۰ کیلومتر است، دو قطار (مسافری و سریع‌السیر)، در یك لحظه، به‌طرف هم حرکت کردند. هریك از دو قطار، سرعت ثابتی دارند و در یك لحظهٔ زمانی به‌هم می‌رسند. اگر هردو قطار با سرعت قطار سریع‌السیر حرکت می‌کردند، ۳ ساعت زودتر به‌هم رسیدند؛ ولی اگر هردو قطار، با سرعت قطار مسافری حرکت می‌کردند، لحظهٔ ملاقات آن‌ها، ۵ ساعت به‌تاخیر می‌افتاد. سرعت هرقطار را پیدا کنید.

۳. بردایرهٔ به‌شعاع R، ذوزنقه‌ای محیط کرده‌ایم. وتری که نقطه‌های تماس دایره با ساق‌های ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند، باقاعده‌های ذوزنقه موازی شده است. طول این وتر برابر است با b. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2 \geqslant 4$ را حل کنید.

۵. همهٔ عددهای x و y را، با توجه به‌شرط‌های زیر، پیدا کنید:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)[1+\cos(xy)\sin(xy)]=(\sqrt{3}+1)\sin^2(xy)+ \\ \qquad +\cos(2xy) \\ x^2y^2-y^2+1=0 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2\leqslant 6 \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $\cos 3x = 1-\sqrt{3}\sin 3x$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. همهٔ مقدارهای x را طوری پیدا کنید که مماس برنمودار تابع

$$y(x)=\cos 7x+7\cos x$$

در نقطهٔ به‌طول x، با مماس برهمین نمودار در نقطهٔ به‌طول $\frac{\pi}{6}$، موازی باشد.

۲. دو تلمبه با قدرت‌های مختلف، می‌توانند با هم، استخری را در ۴ ساعت پر کنند. برای این که تلمبهٔ اول، نصف استخر را پر کند، ۴ ساعت بیشتر از وقتی نیاز دارد که تلمبهٔ دوم بخواهد سه‌چهارم استخر را پر کند. هرتلمبه به‌تنهائی، در چه مدت استخر را پر می‌کنند؟

۳. متوازی‌الاضلاعی را بر دایرهٔ به‌شعاع R محیط کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی با راس‌های نقطه‌های تماس دایره با متوازی‌الاضلاع، برابر است بـا S، طول ضلع‌های متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $log_{۹x^۲}(۶+۲x-x^۲) \leqslant \frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

۵. همهٔ زوج‌عددهای x و y را طوری پیدا کنید که درشرط‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} cos(xy)-۳sin(xy)cos(xy)=۲(cos y)cos(۲xy-y)- \\ \qquad -۲cos^۲(xy-y) \\ x^۳-xy+۱=۰ \\ x^۶+۲xy\leqslant ۵ \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $\sqrt{۳}sin۲x=\sqrt{۲}-cos۲x$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که، برای هریک از آن‌ها، مماس برنمودار تابع‌های

$$y(x)=۲-۱۴sin۳x \quad و \quad y(x)=۶sin۷x$$

در نقطهٔ به‌طول x، با هم موازی باشند.

۲. دوکارگر، باهم ودر یک لحظه آغاز به‌کار کردند و روی هم ۱۵۰ قطعه آماده کردند (میزان کار هرکارگر ثابت است و، ضمناً، ارتباطی با هم ندارد). اگر هردوکارگر، بـا سرعت کارکارگر اول کار می‌کردند، برای تهیهٔ این ۱۵۰ قطعه، $\frac{۱}{۲}$ ساعت کمتر وقت لازم بود؛ ولی اگر هردوکارگر، باقدرت کارگر دوم کار می‌کردند، برای تهیهٔ این ۱۵۰ قطعه، $\frac{۳}{۴}$ ساعت وقت بیشتر لازم می‌شد. کارگر دوم، در هرروزکار هشت ساعته، چند قطعه می‌تواند تهیه کند؟

۳. ذوزنقهٔ $ABCD$ را بردایرهٔ به‌شعاع R محیط کرده‌ایم. طول قاعدهٔ کوچکتر BC از ذوزنقه، برابر است با a. E را نقطهٔ تماس دایره با ضلع AB و

طول پاره‌خط BE را مساوی b می گیریم. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $\log_{x-3}(x^2-4x)^2 \leqslant 4$ را حل کنید.

۵. زوج عددهای x و y را ، با توجه به‌شرطهای زیر ، پیدا کنید :

$$\begin{cases} 2+\sin(2xy)=2\cos^2(xy)-(\sqrt{3}-1)\cos(2xy) \\ x^2y^2-x^2+1=0 \\ 2x^2+5xy\leqslant 0 \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $\sqrt{2}\sin 5x = 2-\sqrt{2}\cos 5x$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. همهٔ مقدارهای x را طوری پیدا کنید که ، به‌ازای هریك از آن‌ها ، مماس برنمودار تابع

$$y(x)=\sin 8x+4\sin 2x$$

در نقطهٔ به‌طول x ، با مماس برهمان نمودار در نقطهٔ به‌طول $\frac{\pi}{10}$ موازی باشد .

۲. دو دوچرخه‌سوار ، در یك لحظه ، یکی از نقطهٔ A و دیگری از نقطهٔ B ، با سرعت‌های ثابت ، به‌طرف هم حرکت‌کردند و بعد از $2\frac{2}{5}$ ساعت به‌هم رسیدند . اگر دوچرخه‌سوار اول سرعت خود را ۵۰٪ ودوچرخه سواردوم سرعت خود را ۲۰٪ اضافه‌کند ، آن وقت اولی برای رسیدن از A به B به‌اندازهٔ $\frac{2}{3}$ ساعت بیشتر از دومی (که بخواهد مسیر را طی‌کند) در راه خواهد بود. اگر دوچرخه‌سوارها ، باهمان سرعت اولیهٔ خود حرکت‌کنند، هرکدام برای رسیدن از A به B ، چقدر وقت صرف می‌کنند؟

۳. دایرهٔ به‌شعاع R را درمثلث ABC محاط کرده‌ایم. دایره درنقطهٔ D برضلع AC ، در نقطهٔ E برضلع AB و در نقطهٔ F برضلع BC مماس است.طول پاره‌خط AD برابر با R و طول پاره‌خط DC برابر a است مساحت مثلث BEF را پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9)\geqslant \frac{1}{2}$ را حل کنید .

۵. همهٔ زوج عددهای x و y را پیدا کنید که با شرطهای زیر سازگار باشند:

$$\begin{cases} [۳\cos(xy)-\sin(xy)]\sin(xy)=۲\cos(۲xy+x)\cdot\cos x+ \\ \qquad +۲\sin^۲(xy+x) \\ y^۳-xy+۱=۰ \\ ۴y^۶-۳xy+۲\leqslant ۰ \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $۲\sin ۳x=\sqrt{۶}+۲\cos ۳x$ را حل کنید.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $۱+۲\cos ۳x\cos x-\cos ۲x=۰$ را حل کنید.

۲. حداکثر و حداقل تابع زیر را در بازهٔ [۴ ، ۵-] پیدا کنید:

$$y(x)=۲x^۳-۳x^۲-۳۶x+۱۰$$

۳. نامعادلهٔ $\sqrt{-x^۲+۶x-۵}>۸-۲x$ را حل کنید.

۴. محیط متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با ۲۶ متر. اندازهٔ زاویهٔ ABC برابر است با ۱۲۰ درجه. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث BCD برابر $\sqrt{۳}$ متر است. طول ضلع‌های متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید، به‌شرطی که طول ضلع AD بزرگتر از طول ضلع AB باشد.

۵. جواب‌هایی از معادلهٔ

$$۳\sin^۳x-۳\cos^۲x+۷\sin x-\cos ۲x+۱=۰$$

را پیدا کنید که، ضمناً، جواب‌های معادلهٔ زیر هم باشند:

$$\cos^۲x+۳\cos x\sin ۲x-۸\sin x=۰$$

۶. معادلهٔ $۲(\log_۲ x)^۲-۳\log_۲\frac{x}{۴}-۱۱=۰$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sin ۵x-۱=۲\sin x\cos ۴x$ را حل کنید.

۲. بیشترین و کمترین مقدار تابع زیر را در بازهٔ [۶ ، ۲۰-] پیدا کنید.

$$y(x)=x^۳-۹x^۲+۱۵x+۱$$

۳. نامعادلهٔ $x+4<\sqrt{-x^2-8x-12}$ را حل کنید.

۴. مساحت مثلث ABC برابر است با $15\sqrt{3}$ مترمربع اندازهٔ زاویهٔ BAC برابر است با ۱۲۰ درجه. اندازهٔ زاویهٔ ABC از اندازهٔ زاویهٔ ACB بزرگتر است. فاصلهٔ راس A تا مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC برابر است با ۲ متر. طول میانه‌ای ازمثلث ABC را پیداکنیدکه از راس B گذشته است.

۵. جواب‌هایی از معادلهٔ

$$9\sin^2 x - 5\sin x \sin 2x + 17\cos x - 11 = 0$$

را پیداکنیدکه، ضمناً، جواب‌های معادلهٔ زیر هم باشند:

$$5\cos^3 x - 3\sin^2 x + 8\cos x - 1 = 0$$

۶. معادلهٔ $(\log_5 x)^2 + \frac{1}{2}\log_5 5x - 2 = 0$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $2\sin 3x \sin 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

۲. حداقل و حداکثر این تابع را، در بازهٔ $[-6, 2]$، پیداکنید:

$$y(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 12$$

۳. نامعادلهٔ $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$ را حل کنید.

۴. مجموع طول ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC برابر است با ۱۱ متر. اندازهٔ زاویهٔ ABC برابر ۶۰ درجه و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC برابر $\frac{2}{\sqrt{3}}$ است. ضمناً می‌دانیم طول‌ضلع AB ازطول ضلع BC بزرگتر است. طول ارتفاعی از مثلث ABC را پیداکنید که از راس A گذشته است.

۵. همهٔ جواب‌هایی از معادلهٔ

$$2\cos x - 3\cos 2x\, tg\, x + \sin x\, tg\, x + 4\, tg\, x = 0$$

را پیداکنیدکه، ضمناً، جواب‌هایی از معادلهٔ زیر باشند:

$$6\sin^2 x + 8\sin x + \sin 2x + 7 = 0$$

۶. معادلهٔ $2(\log_3 x)^2 - 7\log_3 3x + 3 = 0$ راحل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $1+\sin 4x = 2\cos 3x \sin x$ را حل کنید.

۲. حداقل و حداکثر تابع زیر را، در بازهٔ $[-4 ، 3]$ پیدا کنید:

$$y(x)=x^3-3x^2-9x+8$$

۳. نامعادلهٔ $2x+3<\sqrt{-2-3x-x^2}$ را حل کنید.

۴. مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با $80\sqrt{3}$ مترمربع. فاصلهٔ نقطهٔ Q، محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD، تامرکز دایرهٔ محاطی مثلث AQB برابر ۲ متر و اندازهٔ زاویهٔ AQD برابر ۶۰ درجه و زاویهٔ BAD منفرجه است. طول قطر AC را پیدا کنید.

۵. جواب‌هایی از معادلهٔ

$$3tg^2x+2\sin x\, tg x+7\cos x+1=0$$

را پیدا کنید که، ضمناً، جواب‌های معادلهٔ زیر هم باشند:

$$10\cos^3x+4\sin^2x-\cos x-1=0$$

۶. معادلهٔ $(\log_4 x)^2+\frac{1}{2}\log_4(16x)-4=0$ را حل کنید.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. معادلهٔ $3\log_8(x-2)=\log_2\sqrt{2x-1}$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin(4x+3\pi)$ را حل کنید.

۳. مرکز O از دایرهٔ به‌شعاع ۳، بروتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قرار دارد. ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ مثلث، بر دایره مماس‌اند. مطلوب است مساحت مثلث ABC؛ به‌شرطی که طول پاره‌خط OC برابر ۵ باشد.

۴. مساحت شکلی را پیدا کنید که بین سهمی $y=4x-x^2$ و مماس‌هایی بر این سهمی که از نقطهٔ $M\left(\frac{5}{2} ، 6\right)$ می‌گذرند، واقع باشد.

۵. در یك هرم باقاعدهٔ مثلثی شکل، طول دو یالی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند،

برابر است با ۱۲ و ۴ وبقیهٔ یال‌ها، طولی برابر ۷ دارند. کره‌ای در هرم محاط کرده‌ایم. مطلوب است فاصلهٔ مرکز کره تا یال به‌طول ۱۲.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$(۲^x+۳\times ۲^{-x})^{۲\log_۲ x-\log_۲(x+۶)}>۱$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\log_{\frac{۱}{۲}}\left(۱-\frac{x}{۲}\right)+\log\sqrt{۲-\frac{x}{۴}}=۰$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sin\left(۳x-\frac{۵\pi}{۲}\right)=\sin(۶x-۳\pi)$ را حل کنید.

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ AB و BC، به‌ترتیب، برابرند با ۲۱ و ۲۸. دایره‌ای‌که مرکز آن O روی وتر مثلث قراردارد، برهر دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه مماس است. شعاع‌دایره را پیدا کنید.

۴. از نقطهٔ $M\ (۲ ، ۱۲)$، دو مماس برسهمی $y=۶x-x^۲$ رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت شکلی‌که بین این دو مماس وسهمی قراردارد.

۵. در هرم PABC، یال جانبی PB برصفحهٔ قاعدهٔ ABC عموداست وطولی برابر ۶ دارد. طول یال‌های AB و BC برابر $\sqrt{۱۵}$ وطول یال AC برابر $۲\sqrt{۳}$ است. مرکز کرهٔ O بروجه ABP قرار دارد و خودکره برسایر وجه‌های هرم مماس است. فاصلهٔ مرکز کره تا یال AC را پیدا کنید.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$(۴\times ۳^x+۳^{-x})^{۳\log_۳(x-۱)-\log_۳[(x-۱)(۲x+۱)]}>۱$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $۲\log_۹(۳x-۱)=\log_۳\sqrt{x+۳}$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\sqrt{۳}\cos\left(۲x+\frac{۹\pi}{۲}\right)=\sin(۴x-۵\pi)$ را حل کنید.

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نیمساز زاویهٔ قائمهٔ B، وتر AC را در M قطع می‌کند. مطلوب است مساحت مثلث ABC، به شرطی که فاصلهٔ نقطهٔ

M تا رأس A برابر ۵ و فاصله نقطهٔ A تا ضلع BC برابر ۴ باشد.

۴. دو مماس برسهمی $y = ۲x - x^۲$ در نقطهٔ $M\left(\frac{۳}{۴} , \frac{۳}{۲}\right)$ به هم رسیده‌اند. مساحت شکل بین این مماس‌ها و سهمی را پیدا کنید.

۵. درهرم PABC ، یال‌جانبی PB برصفحهٔ قاعدهٔ ABC عمود است وطولی برابر $۲\sqrt{۳}$ دارد . طول یال‌های AB و BC برابر $\sqrt{۵}$ و طول یال AC برابر ۲ می‌باشد. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی هرم را تا رأس P پیداکنید.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$(۲^x + ۲^{۳-x})^{۲log_۲(x+۳) - log_۲(x+۹)} < ۱$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $log_{\frac{۱}{۳}}(x-۳) + log_۳\sqrt{(۳x+۱)} = ۰$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $sin(۶x - ۷\pi) = \sqrt{۳}sin\left(\frac{\pi}{۲} - ۳x\right)$ را حل کنید.

۳. نیمساززاویهٔ B ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC، وترAC را درنقطهٔ M قطع‌می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ BC را پیدا کنید، به شرطی که طول ضلع مجاور به زاویه قائمهٔ AB برابر ۵ و طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ BC برابر ۸ باشد.

۴. مساحت شکلی را پیداکنیدکه بین سهمی $y = ۳x - x^۲$ و دو مماسی برآن که از نقطه $M(۲ , ۳)$ می‌گذرند، واقع باشد.

۵. در هرم PABC ، یال جانبی PB برصفحهٔ قاعدهٔ ABC عمود است. طول یال PB برابر ۱۲، طول هریك از یال‌های AB و BC برابر ۷ وطول‌یال AC برابر ۴ است. نقطهٔ O ، مرکزکره‌ای بریال AB قراردارد وخودکره بروجه‌های PAC و PBC مماس است. فاصلهٔ مرکز O تا یال PB راپیدا کنید.

۶. این نامعادله را حل کنید:

$$(۳^{x+۲} + ۳^{-x})^{۳log_۴x - log_۴[x(۲x+۳)]} < ۱$$

۱۹۷۷

گروه اول

۰۱ معادلهٔ $۲\sqrt{x+۵}=x+۲$ را حل کنید.

۰۲ تابع $f(x)=x\cdot e^{-۳x}$ در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی ودر چه‌نقطه‌هایی دارای ماکزیمم یا می‌نیمم است؟

۰۳ معادلهٔ $|\sin x|=\sin x+۲\cos x$ را حل کنید.

۰۴ قاعدهٔ AB از ذوزنقهٔ ABCD دوبرابر قاعدهٔ CD و دو برابر ساق AD است. طول قطر AC برابر a وطول ساق BC برابر b است. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۰۵ یک گروهان سرباز، قراربود برای رژه آماده شوند. افرادگروهان‌را طوری سازمان داده بودند که در ردیف‌های ۲۴ نفری پشت سرهم قرار گیرند. به‌دلیلی ، معلوم شد که همهٔ سربازان نمی‌توانند در رژه شرکت کنند. بقیهٔ سربازها را به‌این ترتیب سازمان دادند: تعداد ردیف‌هارا ، نسبت به‌سازمان اول ، ۲ تا کمتر گرفتند و تعداد سربازان هرردیف ، ۲۶ نفر بیشتر از تعداد ردیف‌های سازمان جدید ازآب درآمد. می‌دانیم که اگر همهٔ سربازان در رژه شرکت می‌کردند ، می‌شد آن‌هارا طوری سازمان دادکه تعداد ردیف‌ها برابر با تعداد سربازان هر ردیف باشد. در این گروهان، چند سرباز وجود دارد؟

۰۶ این معادله را حل کنید:

$$۲\lg\left(x+\frac{۱}{۲}\right)-\lg(x-۱)=\lg\left(x+\frac{۵}{۲}\right)+\lg ۲$$

گروه دوم

۰۱ معادلهٔ $\sqrt{x^{۲}+۸}=۲x+۱$ را حل کنید.

۰۲ بازه‌های صعودی و نزولی و همچنین ، نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم تابع $f(x)=(x+۱)e^{۲x}$ را مشخص کنید.

۳. معادلهٔ $|tg x| = tg x - \frac{۱}{cos x}$ را حل کنید.

۴. طول قاعدهٔ CD ، قطر BD و ساق AD از ذوزنقهٔ ABCD، برابراست با p ؛ طول ساق BC هم برابر q است. طول قطر AC را پیدا کنید.

۵. چند گروه کارگر، برای گرفتن لباس کار، به‌انبار مراجعه کردند. تعداد کارگران گروه‌ها با هم برابر است . به‌هر کارگر دو دست لباس رسید و ، در نتیجه ، به‌هر گروه ۲۰ دست بیشتر از تعداد گروه‌ها ، لباس رسید. اگر ۴ گروه بیشتر وجودداشت و می‌خواستند به‌هر گروه ۱۲ دست لباس بدهند، لباس‌های موجود در انبار، برای آن‌ها ، کفایت نمی‌کرد. در انبار چند دست لباس وجود داشته است؟

۶. این معادله را حل کنید:

$$\lg\left(x+\frac{۴}{۳}\right)-\lg\left(x-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}\lg(x+۶)-\frac{۱}{۲}\lg x$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $۴\sqrt{x+۶}=x+۱$ را حل کنید.

۲. بازه‌های صعودی و نزولی و ، همچنین ، نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=x\cdot e^{-۵x}$ را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $|cos x| = cos x - ۲ sin x$ را حل کنید.

۴. طول ساق AD و قاعدهٔ CD از ذوزنقهٔ ABCD برابر با k و طول قاعدهٔ AB برابر با ۲k است. طول قطر AC برابر با l است . مطلوب است طول ساق BC.

۵. برای جابه‌جایی گوسفندان به‌وسیلهٔ راه‌آهن ، چند واگن را اختصاص‌دادند. در مرکز A ، در هرواگن ۱۲ گوسفند جا دادند. در مرکز B ، تعدادی از گوسفندان را پیاده‌کردند. بقیهٔ گوسفندان را ، به‌طور مساوی، درواگن‌هایی جا دادندکه تعدادآن‌ها، نسبت به‌تعداد واگن‌های قبلی، ۲ عدد کمتر بود. ضمناً، معلوم‌شدکه تعدادگوسفندان هرواگن عددی‌است اول‌وتعداد واگن‌ها، ۱۴ عدد کمتر از تعدادگوسفندان هرواگن است. تعدادگوسفندان‌را درمرکز A پیدا کنید.

۶. این معادله را حل کنید :

$$2\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg(1-x)+\lg\left(\frac{3}{2}-x\right)+\lg 2$$

گروه چهارم

۱. معادلۀ $\sqrt{5-x^2}=x-1$ را حل کنید.

۲. در تابع $f(x)=(x-1)\cdot e^{3x}$، بازه‌های صعودی و نزولی و، همچنین، نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم را مشخص کنید:

۳. معادلۀ $|cotg\,x|=cotg\,x+\frac{1}{sin\,x}$ را حل کنید.

۴. طول قطر BD از ذوزنقۀ ABCD برابر m و طول ساق AD آن برابر n است. مطلوب است محاسبۀ طول قاعدۀ CD، به‌شرطی که طول قاعده، قطر و ساقی از ذوزنقه که در رأس C به هم می‌رسند، با یکدیگر برابر باشند.

۵. به مناسبت فرا رسیدن جشن، همۀ بچه‌ها به تعداد مساوی، اسباب بازی هدیه گرفتند. تعداد اسباب بازی‌های هر بچه، به‌اندازۀ ۹ واحد از تعداد کل بچه‌ها کمتر بود. اگر ۹ بچۀ در جشن شرکت کرده بودند و به‌هر بچه، یك اسباب بازی بیشتر داده می‌شد تعداد اسباب بازی‌های قبلی، کفایت نمی کرد. چند اسباب بازی هدیه داده شده است، به‌شرطی که تعداد بچه‌های شرکت کننده در جشن، عدد فرد باشد.

۶. این معادله را حل کنید:

$$\lg x-\frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right)$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلۀ $cos\,x=cos\,3x+2\,sin\,2x$ را حل کنید.

۲. نامعادلۀ $log_2^2 x-3log_2 x+2\geqslant 0$ را حل کنید.

۳. مساحت شکل محدود به نمودار تابع‌های $y=x^2+x$ و $y=x+1$ را پیدا کنید.

۴. صفحۀ مثلث قائم‌الزاویه‌ای، که طول ضلع‌های مجاور به زاویۀ قائمۀ آن برابر ۳ سانتیمتر و ۴ سانتیمتر است، باصفحۀ P زاویه‌ای برابر α می‌سازد.

وتر این مثلث، برصفحهٔ P قرار دارد. مطلوب است اندازهٔ زاویه‌ای که‌ضلع کوچکتر مجاور به زاویهٔ قائمه، با صفحهٔ P می‌سازد.

۵. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$$

۶. دو شمش از طلا و نقره داریم. درصد طلا در شمش اول، دو برابر و نیم درصد طلا در شمش دوم است. اگر دو شمش را ذوب کنیم و از آن‌ها، یك شمش جدید درست کنیم، درشمش حاصل ۴۰٪ طلا خواهد بود. ببینیدشمش اول چند برابر شمش دوم وزن دارد، به‌شرطی‌که بدانیم، اگر به وزن‌های برابر از دو شمش انتخاب کنیم، شمشی به‌دست می‌آید‌که ۳۵٪ طلا دارد.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $2\sin^2 2x+\sin^2 4x=\frac{5}{4}$ را حل کنید.

۲. نامعادلهٔ $3>3^x-2\times 9^{-x}$ را حل کنید.

۳. مساحت شکل محصور به وسیلهٔ نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x}$ و $x-3y+2=0$ را پیدا کنید.

۴. مستطیلی که طول ضلع‌های آن ۱ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر است. ضلع کوچکتر مستطیل برصفحهٔ P قرار دارد و قطر آن باصفحهٔ P، زاویه‌ای به اندازهٔ α می‌سازد اندازهٔ زاویهٔ بین صفحهٔ مستطیل و صفحهٔ P را پیدا کنید.

۵. این معادله را حل کنید:

$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3)=x^2+2x$$

۶. ۴۰ کیلوگرم محلول نمك را دردو ظرف ریخته‌ایم، به نحوی که مقدار نمك خالص در ظرف دوم، ۲ کیلوگرم بیشتر از مقدار نمك خالص ظرف اول باشد. اگر به ظرف دوم، یك کیلوگرم نمك اضافه‌کنیم، در آن صورت، مقدار نمك خالص ظرف دوم، دوبرابر مقدار نمك خالص ظرف اول خواهد شد. وزن محلول ظرف اول را پیدا کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\sin^2 6x+5\sin^2 3x=2$ را حل کنید.

۲. نامعادلهٔ $4 > 3 \times 2^x - 4^x$ را حل کنید.

۳. مساحت شکل محدود به نمودار تابع‌های $y = \sqrt{x+1}$ و $y = \frac{x}{3} + 1$ را پیدا کنید.

۴. قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی بر صفحهٔ P قرار دارد و ضلع جانبی آن با صفحهٔ P زاویه‌ای می‌سازد که اندازهٔ آن برابر است با α. مطلوب است محاسبهٔ زاویه‌ای که صفحه مثلث با صفحهٔ p می‌سازد.

۵. این معادله را حل کنید:

$$x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} - x \log_{\frac{1}{2}} (2+3x) = x^2 - 4 +$$

$$+ 2 \log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}$$

۶. سه شمش داریم. شمش اول ۵ کیلو گرم وشمش دوم ۳ کیلو گرم وزن دارد و هر دو شامل ۳۰٪ مس هستند. اگر از دو شمش اول و سوم، شمش تازه‌ای بسازیم، شمش حاصل شامل ۵۶٪ مس می‌شود، و اگر از شمش دوم و شمش سوم، شمش جدیدی درست کنیم. در شمش جدید ۶۰٪ مس وجود خواهد داشت. وزن شمش سوم و درصد مس آن را پیدا کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\sin 5x = \sin x + \sin 2x$ را حل کنید.

۲. نامعادلهٔ $\log_2^2 x + \log_2 x \geqslant 2$ را حل کنید.

۳. مساحت شکل محدود به نمودار تابع‌های $y = x^2 - x$ و $y = 3x$ را پیدا کنید.

۴. صفحهٔ مثلث متساوی‌الساقین با صفحهٔ P، زاویه‌ای می‌سازد که اندازهٔ آن برابر است با β. قاعدهٔ مثلث، روی صفحهٔ P قراردارد. زاویهٔ رأس مثلث برابر α است. مقدار زاویه‌ای را پیدا کنید که ضلع جانبی مثلث با صفحهٔ P می‌سازد.

۵. این معادله را حل کنید:

$$2\sqrt{x} \times 4_x + 5 \times 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \times 2^x + 4$$

۶. دو ظرف داریم که در یکی ۴ کیلوگرم و در دیگری ۶ کیلوگرم محلول اسید با غلظت‌های مختلف وجود دارد. اگر آن‌ها را روی هم بریزیم، محلولی به دست می‌آید که شامل ۳۵٪ اسید است. ولی اگر از دو محلول، به وزن‌های مساوی روی هم بریزیم، محلولی با ۳۶٪ اسید حاصل می‌شود. در هر ظرف، چند کیلوگرم اسید وجود دارد؟

۱۹۷۹

گروه اول

۱. معادلهٔ $۲^{\sqrt{x}} - ۲^{۱-\sqrt{x}} = ۱$ را حل کنید.

۲. حداقل مقدار تابع زیر را، در بازهٔ $[۰ ، ۵]$، پیدا کنید:

$$y(x) = x + \frac{۴}{(x-۲)^۲}$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲} \sin ۲x = (\sqrt{۳}-۱)\cos^۲ x + ۲$$

۴. AB و AC دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ ABCD را تشکیل می‌دهند. قطرهای ذوزنقه در نقطهٔ E یکدیگر را قطع می‌کنند. مساحت مثلث BCE را، پیدا کنید، به شرطی که $|AB| = ۳۰cm$ و $|DC| = ۲۴cm$ و $|AD| = ۳cm$ و $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{۳}$.

۵. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۱۰x^۲ + ۵y^۲ - ۲xy - ۳۸x - ۶y + ۴۱ = ۰ \\ ۳x^۲ - ۲y^۲ + ۵xy - ۱۷x - ۶y + ۲۰ = ۰ \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $\frac{۱}{\log_۳ ۲۰} < \frac{۱}{\log_۳(x^۲ - ۷x + ۱۲)}$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\frac{۲\lg x}{\lg x-۱}=-\lg x+\frac{۲}{\lg x-۱}$ را حل کنید.

۲. بازه‌های صعودی و نزولی این تابع را به‌دست آورید:

$$y(x)=x+\frac{۱}{x-۱}$$

۳. معادلهٔ $tg\ ۲x-۴\sin x\cos x+۱=\sin^۲x$ را حل کنید.

۴. دایره‌ای برضلع‌های AB و AD از مستطیل ABCD مماس‌است وازرأس C می‌گذرد. ضلع DC، دایره را در نقطهٔ N قطع می‌کند. مساحت‌ذوزنقهٔ ABND را محاسبه‌کنید، به شرطی که $|AB|=۹cm$ و $|AD|=۸cm$ باشد.

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه

$$\begin{cases} y^۲-۴xy+۴y-۱=۰ \\ ۳x^۲-۲xy-۱=۰ \end{cases}$$

را، با شرط $xy>۰$، پیدا کنید.

۶. نامعادلهٔ $۲^{\sqrt{x^۲-۳x+۳}}>۲^{\sqrt{x}}$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $۳=۹^{\sqrt[۳]{x}}-۲\times ۳^{\sqrt[۳]{x}}$ را حل کنید.

۲. حداکثر مقدار این تابع را، در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲}\ ,\ ۳\right]$ پیدا کنید:

$$y(x)=-\frac{۱}{(x^۲-۱)^۲}$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$۴+۲\sin^۲x=(۳+\sqrt{۳})\sin ۲x+۲(۲-\sqrt{۳})\cos^۲x$$

۴. در ذوزنقهٔ ABCD، پاره خط‌های AB و CD، دو قاعدهٔ آن را تشکیل می‌دهند. قطرهای ذوزنقه درنقطهٔ K برخورددارند. مساحت مثلث AKD را محاسبه کنید، به شرطی که $|AB|=۲۷cm$، $|DC|=۱۸cm$،

$|AD| = ۳cm$ و $|BC| = ۶\sqrt{۲}$ باشد.

۵. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ - ۲xy + ۲y^۲ + ۲x - ۸y + ۱۰ = ۰ \\ ۲x^۲ - ۷xy + ۳y^۲ + ۱۳x - ۴y - ۷ = ۰ \end{cases}$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۰/۳}(x^۲ + x + ۳۱) < \log_{۰/۳}(۱۰x + ۱۱)$$

گروه چهارم

۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۶\log^۲_{۳۲}x - ۱۱\log_{۳۲}x - ۲}{\log_{۳۲}x - ۲} = ۲ + \log_{۳۲}x$$

۲. بازه‌های صعودی و نزولی این تابع را به دست آورید:

$$y(x) = \frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x+۱}$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$۴\sin^۲x + ۲\sqrt{۳}\sin ۲x + \frac{\sqrt{۳}}{tg ۲x} = ۵$$

۴. دایره‌ای برضلع‌های AB و AC از مستطیل ABCD مماس است، ضلع DC را در نقطهٔ منحصر F و ضلع BC را در نقطهٔ منحصر E قطع می‌کند. مساحت ذوزنقهٔ AFDB را محاسبه کنید، با این شرط که داشته باشیم: $|AB| = ۳۲cm$ ، $|AD| = ۴۰cm$ و $|BE| = ۱cm$.

۵. همهٔ جواب‌های این دستگاه را، با شرط $xy > ۰$ ، پیدا کنید:

$$\begin{cases} x^۲ - ۳xy + ۶x - ۱ = ۰ \\ y^۲ - xy - ۲ = ۰ \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{\sqrt{x+۴}} > \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\sqrt{x^۲+۳x+۴}}$ را حل کنید.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x-y=۶ \\ x^{۳}-y^{۳}=۱۲۶ \end{cases}$$

۲. به ازای چه مقدارهایی از x ، مشتق تابع زیر برابر صفر می‌شود:

$$y(x)=۴x-\sin ۲x+۴\sqrt{۲}\cos x$$

۳. قطرهای AB و AC ، طول‌هایی برابر دارند. زاویهٔ محاطی که به‌وسیلهٔ این دو وتر در دایره تشکیل شده ، برابر است با $\frac{\pi}{۶}$. نسبت مساحت‌قسمتی از دایره را که در داخل این زاویه است، به مساحت خود دایره پیدا کنید.

۴. نامعادلهٔ $(۴x^{۲}-۱۶x+۷)\log_{۲}(x-۳)>۰$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y=۷ \\ (x^{۲}-y^{۲})(x-y)=۱۷۵ \end{cases}$$

۲. به ازای چه مقدارهایی از x، مشتق این تابع برابر صفر می‌شود:

$$y(x)=۵x+\sin ۲x-۴\sqrt{۳}\sin \alpha$$

۳. به قطر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی، نیم دایره‌ای رسم کرده‌ایم. این نیم دایره ، مثلث را به دو بخش تقسیم می‌کند . اگر طول ضلع مثلث برابر a باشد، مساحت قسمتی ازمثلث را پیدا کنیدکه در خارج نیم دایره قراردارد.

۴. نامعادلهٔ $(۲^{x}-۴)(x^{۲}-۲x-۳)>۰$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y=۵ \\ x^{۳}+y^{۳}=۲۱۵ \end{cases}$$

۲. مقدارهای x را طوری پیدا کنیدکه، به‌ازای هریك ازآن‌ها، مشتق این‌تابع برابر صفر شود.

$$y(x)=5x-\sin 2x+4\sqrt{3}\cos x$$

۳. خط راستی که از دو نقطهٔ A و B واقع برمحیط دایره می‌گذرد، آن را به‌دو کمان تقسیم می‌کند. نسبت طول این دو کمان به‌یکدیگر برابر است با ۱:۱۱. وتر AB، مساحت دایره را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۴. نامعادلهٔ $(4x^2-8x-5)\log_3(x+1)<0$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ (x^2-y^2)(x+y)=147 \end{cases}$$

۲. به ازای چه مقدارهایی از x، مشتق این تابع برابر صفر می‌شود:

$$y(x)=4x+\sin 2x-4\sqrt{\sin 2x}$$

۳. قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC، وتری از یک دایره است. این دایره در نقطه‌های A و C به‌ترتیب، بر ضلع‌های AB و BC مماس است. می‌دانیم: $\widehat{ABC}=\frac{2\pi}{3}$ و $AC=a\,cm$. مساحت قسمتی از مثلث را پیدا کنید که در درون دایره و محدود به‌محیط آن است.

۴. نامعادلهٔ $(3^x-3)(x^2-5x+6)<0$ را حل کنید.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. سه گروه کارگر، که هر کدام قدرت کار ثابتی دارند، به‌ریل گذاری مشغول‌اند. اگر گروه اول و سوم با هم کار کنند، می‌توانند در هرماه، ۱۵ کیلومتر راه را ریل بگذارند. محصول کار سه گروه با هم، در هرماه، دو برابر محصول کار گروه‌های اول و دوم است (اگر با هم کار کنند). گروه سوم در هر ماه چند کیلومتر راه را می‌تواند ریل گذاری کند، به‌شرطی که بدانیم: گروه دوم و سوم، اگر با هم کار کنند، می‌توانند یک قطعهٔ مشخص راه را، در $\frac{1}{4}$ زمانی آماده کنند که گروه دوم برای آماده کردن آن به تنهایی لازم دارد.

۲. معادلهٔ $۲(\lg x)^{۲}+(۱-\sqrt{۲})\lg(x^{۲})=۲\sqrt{۲}$ را حل کنید.

۳. مساحت شکلی را پیدا کنید که به‌نمودار تابع‌های زیر محدود باشد:

$$y=x^{۲}+۲ ، \quad y=۴-x$$

۴. چهارضلعی $ABCD$ دردایرهٔ به‌مرکز O محاط شده‌است. شعاع AO بر شعاع OB وشعاع OC برشعاع OD عمود است. طول عمودی که از نقطهٔ C برخط راست AD رسم کنیم، برابراست با ۹. طول پاره‌خط BC نصف طول پاره‌خط AD است. مساحت مثلث AOB را پیدا کنید.

۵. همهٔ زوج عددهای x و y را پیدا کنید که در برابری زیر صدق کنند:

$$\frac{۳+۲\cos(x-y)}{۲}=\sqrt{۳+۲x-x^{۲}}\cos^{۲}\left(\frac{x-y}{۲}\right)+\frac{\sin^{۲}(x-y)}{۲}$$

۶. نامعادلهٔ $\sqrt{۴x-۸}\geqslant x-۵$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. سه‌کامیون ، غله حمل می کنند و هربار با ظرفیت کامل خود. کامیون‌های اول و دوم، یکبار ۶ تن غله را روی هم جابه‌جا کردند. کامیون‌های اول و سوم ، دردونوبت می توانند به‌اندازهٔ سه‌نوبت‌کامیون دوم، غله‌حمل کنند. می‌خواهیم بدانیم که کامیون دوم، هربار ، قادر به‌حمل چقدر غله است، به‌شرطی که ، قدرت حمل کامیون‌های دوم و سوم روی هم، سه‌برابر قدرت‌کارکامیون سوم به‌تنهایی باشد؟

۲. معادلهٔ $(\log_{۲}x)^{۲}+\sqrt{۳}=۲(۱+\sqrt{۳})\log_{۲}\sqrt{x}$ را حل کنید.

۳. مساحت شکل محدود به‌نمودار این تابع‌ها را پیدا کنید:

$$y=\frac{x^{۲}}{۲}+۱ ، \quad y=\frac{x}{۲}+۲$$

۴. چهارضلعی $ABCD$ ، در دایره‌ای به‌مرکز O محاط است. اندازهٔ هریك از زاویه‌های BOA و COD برابر است با ۶۰ درجه. طول عمود BK ، که از راس B برضلع AD فرودآمده ، برابر است با ۶. طول پاره‌خط BC، یك‌سوم طول پاره‌خط AD است. مساحت مثلث COD را پیدا کنید.

۵. همهٔ زوج عددهای $(x ، y)$ را، که دربرابری زیر صدق می‌کنند، پیدا کنید:

$$۴\left[۳\sqrt{۴x-x^{۲}}\sin^{۲}\left(\frac{x+y}{۲}\right)+۲\cos(x+y)\right]=$$
$$=۱۳+۴\cos^{۲}(x+y)$$

۶. نامعادلهٔ $\sqrt{2x+2} \geqslant x-3$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. سه‌رنگ‌کار، که محصول‌کار هریك درساعت مقدار ثابتی‌است، به‌رنگ کردن دیوار مشغول‌اند. دومی و سومی، در هرساعت، روی‌هم ۹ متر مربع دیوار را رنگ می‌کنند. محصول‌کار اولی وسومی روی‌هم، $\frac{2}{3}$ محصول‌کار مشترك سه‌رنگ‌کار می‌باشد. ببینید، رنگ‌کار اول درهرساعت چندمترمربع دیوار را رنگ می‌کند، به‌شرطی که رنگ‌کارهای اول و سوم بتوانند با هم در $\frac{2}{5}$ زمان لازم برای رنگ‌کار سوم، دیواری را رنگ کنند.

۲. معادلهٔ $3(\log_3 x)^2+(\sqrt{5}-2)\log_3(x^3)=6\sqrt{5}$ را حل کنید.

۳. مساحت شکل محدود به‌نمودار این‌تابع‌ها را پیدا کنید:

$$y=3x^2+2 \text{ ، } y=3x+8$$

۴. از نقطهٔ C، واقع در بیرون دایرهٔ به‌مرکز O، دونیم خط رسم کرده‌ایم تا دایره را قطع کنند: اولی در نقطه‌های M و A و دومی در نقطه‌های N و B. ضمناً، نقطهٔ M بین نقطه‌های A و C و نقطهٔ N بین نقطه‌های B و C قراردارند. اندازهٔ هریك از زاویه‌های MOA و NOB برابر است با ۱۲۰ درجه. طول عمود NL، که نقطهٔ N برخط راست AB رسم شده است، برابر است با ۱۱. طول پاره‌خط MN، برابر $\frac{1}{5}$ طول پاره‌خط AB است. مساحت مثلث MNC را پیدا کنید.

۵. زوج عددهای (x , y) را طوری پیدا کنید که در برابری زیر صدق کنند:

$$12\sqrt{6x-x^2-5}\cos^2\left(\frac{x-2y}{2}\right)=17+8\cos(x-2y)-$$
$$-4\sin^2(x-2y)$$

۶. نامعادلهٔ $\sqrt{3x+7} \geqslant x+1$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. با سه تلمبه می‌توانیم نفت را از مخزن بیرون بکشیم؛ محصول‌کار هرتلمبه مقداری است ثابت. اگر تلمبه‌های اول و دوم با هم‌کار کنند، می‌توانند

ساعتی ۲۰ تن نفت با هم بیرون بکشند. سه‌تلمبه با هم، می‌توانند سه‌برابر محصول مشترك تلمبه‌های اولی و سومی ، نفت بیرون بیاورند. تلمبهٔ سوم ، در هرساعت چقدر نفت بیرون می‌کشد، به‌شرطی که تلمبه‌های دوم و سوم ، باکار مشترك ، بتوانند در $\frac{۱}{۵}$ زمانی که برای تلمبهٔ سوم لازم‌است، مقدارمعینی نفت را از مخزن بیرون بیاورند.

۲. معادلهٔ $(log_{۵}x)^{۲}+۲\sqrt{۲}=۳(۲+\sqrt{۲})log_{۵}(\sqrt[۴]{x})$ را حل کنید.

۳. مساحت شکلی را پیدا کنید که به‌وسیلهٔ نمودار تابع‌های زیر ، محصور شده باشد:

$$y=۲x^{۲}+۱ \text{ ، } y=-۲x+۵$$

۴. دایرهٔ به‌مرکز O ، از راس‌های A و B مثلث ABC گذشته ، ضلع AC را در نقطهٔ M و ضلع BC را در نقطهٔ N قطع کرده است . اندازهٔ هریك از زاویه‌های AOM و BON برابر ۶۰ درجه است. فاصلهٔ از نقطهٔ N تاخط راست AB برابراست با $۵\sqrt{۳}$. طول پاره‌خط MN یك‌چهارم‌طول پاره‌خط AB است. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۵. زوج عددهای $(x \text{ ، } y)$ را ، که در برابری زیر صدق می کنند ، پیدا کنید:

$$\sqrt{۳-۲x-x^{۲}}\, sin^{۲}(۲x-y)+cos(۴x-۲y)=۱+$$
$$+\frac{cos^{۲}(۴x-۲y)}{۲}$$

۶. نامعادلهٔ $\sqrt{۹x-۹}\geqslant x-۵$ را حل کنید.

§ ۷. دانشکدهٔ جغرافیا

۱۹۷۷

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $۲|x+۱|>x+۴$ را حل کنید.

۲. در مثلث ABC ، ضلع AB به‌طول ۳ متر و ارتفاع CD ، وارد برضلع AB، به‌طول $\sqrt{۳}$ متر است. D، پای ارتفاع وارد بر AB است ومی‌دانیم

طول پـاره‌خط AD برابر است بـا طول ضلع BC . طول ضلع AC را پیدا کنید.

۳. بازه‌های صعودی و نزولی و ، همچنین، نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم تـابع $y(x)=\frac{x}{\ln x}$ را پیدا کنید.

۴. کامیون و اتومبیل مسابقه‌ای ، در یك زمان ، از مرکز A حرکت کردند تـا به‌مرکز C برسند. کامیون، که بـا سرعت ثابتی حرکت می‌کرد، فاصلهٔ ۳۶۰ کیلومتری را پیمود و به C رسید . اتومبیل مسابقه‌ای ، کـه روی مسیری طولانی‌تر حرکت می‌کرد، ابتدا به‌مرکز B ، در ۱۲۰ کیلومتری A رسید؛ در این فـاصله ، سرعت اتومبیل مسابقه‌ای ، دو برابر سرعت کامیون بود . بعد از نقطهٔ B ، سرعت خود را ۴۰ کیلومتر در ساعت اضافه کرد و فـاصلهٔ ۱۰۰۰ کیلومتری از B تـا C را طی کرد. اتومبیل مسابقه‌ای، یك ساعت و ۱۵ دقیقه دیرتر ازکامیون به‌مرکز C رسید. اگر اتومبیل مسابقه‌ای ، تمامی راه ازA تا C را ، باهمان سرعت فاصلهٔ B تا C رفته‌بود، یك‌ساعت دیرتر ازکامیون به C می‌رسید. سرعت‌کامیون را پیداکنید.

۵. این معادله را حل کنید:

$$۲\sin\left(۳x+\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۱+۸\sin ۲x\cos^{۲} ۲x}$$

۶. معادلهٔ $۴^{x}-۲^{x+۱}=۳$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $۳|x-۱|\leqslant x+۳$ را حل کنید.

۲. در ذوزنقهٔ ABCD ، طول قـاعدهٔ AB برابر ۲ متر و طول قاعدهٔ BC برابر ۱ متر است. طول هریك از ساق‌ها برابر ۱ متر است. طول قطرهای ذوزنقه را پیدا کنید.

۳. بازه‌های صعودی و نزولی و، همچنین، نقطه‌های اکسترمم تابع $y(x)=\frac{x}{\ln^{۲} x}$ را پیدا کنید.

۴. قایق بادبانی و کشتی ، در یك زمان از بندر A خـارج شدند و به‌طرف بندر D حرکت کردند. قایق بادی، فاصلهٔ ۱۲۰۰ کیلومتری بین A و D را

را با سرعت ثابتی طی کرد. کشتی ، از طریق بندرهای B و C ، خود را به D رسانید. ضمناً تابندر B ، که درفاصلهٔ ۴۸۰ کیلومتری A قرارداشت، با سرعتی دوبرابر سرعت قایق بادبانی حرکت کرد. سپس ، به‌سرعت‌خود، ۴ کیلومتر درساعت اضافه‌کرد وفاصلهٔ بین بندرهای B و C را ، که ۱۴۲۰ کیلومتر بود، و سپس، فاصلهٔ ۱۴۶۰ کیلومتری بین C و D را پیمود. کشتی، در بندرهـای C و B ، یك‌شبانه‌روز معطل شد و دوشبانه‌روز بعد از قـایق بادبانی به D رسید. اگر کشتی، فاصلهٔ بین A و B را ، با همان سرعتی که در فاصلهٔ B و D داشت ، طی کرده بود، یك‌شبانه‌روز و ۲۰ ساعت بعد از قایق بادبانی به‌بندر D می‌رسید. سرعت قایق را پیدا کنید.

۵. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۳}\cos\frac{۳}{۴}x=\sqrt{\frac{۳}{۴}+۶\sin^{۲}\frac{x}{۲}\sin\left(\frac{x}{۲}+\frac{۳\pi}{۲}\right)}$$

۶. این‌معادله را حل کنید:

$$\log_{۲}(x+۳)+\log_{۲}(x-۱)=\frac{۱}{\log_{۵}{}^{۲}}$$

گروه سوم

۱. نامعادلهٔ $۴|x+۲|<۲x+۱۰$ را حل کنید.

۲. در مثلث ABC ، ضلع AB طولی برابر ۶متر دارد. پای ارتفاع وارد از راس C برضلع AB را D می گیریم. طول پاره‌خط AD برابر با ۴ متر و طول ضلع BC هم برابر ۴ متر است. طول ارتفاع AE ، که از راس A برضلع BC رسم شده است، پیدا کنید.

۳. بازه‌هـای صعودی و نزولی و ، همچنین ، نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y(x)=\frac{x^{۲}}{\ln x}$ را پیدا کنید.

۴. تراش‌کار و شاگردش سفارشی برای تهیهٔ چندقطعه گرفتند. شاگرد باید ۳۵ قطعه و تراش‌کار ۹۰ قطعه را تهیه کنند. شاگـرد و استاد تراش‌کار ، کار را با هم آغاز کردند. تراش‌کار ، ابتدا ۳۰ قطعه را بـا سرعتی دوبرابر شاگرد خود تهیه‌کرد ؛ سپس ، سرعت‌کار خود را در هرساعت ۲ قطعه بـالا برد و کار خود را یك‌ساعت بعد از شاگردش تمـام کرد . اگر استاد ، ۳۰ قطعهٔ

اول را با همان سرعت‌کار در مورد ۶۰ قطعهٔ بقیه، تهیه کرده بود، تمام‌کار خود را ۳۰ دقیقه بعداز شاگردش به‌پایان می‌رساند. شاگرد تراش‌کار، در هر ساعت، چند قطعه تهیه می‌کند؟

۵. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{\frac{1-4\cos^2 3x}{8\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

۶. معادلهٔ $9^x - 3^{x+1} = 4$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. نامعادلهٔ $3|x+1| \geqslant x+5$ را حل کنید.

۲. در ذوزنقهٔ $ABCD$، طول قاعدهٔ کوچکتر BC برابر ۳ متر و طول ساق‌های AB و CD هم برابر ۳ متر است. زاویهٔ بین قطرهای ذوزنقه برابر $\frac{\pi}{3}$ است. طول قاعدهٔ AD را پیدا کنید.

۳. بازه‌های صعودی و نزولی، و، همچنین، نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y(x)=\frac{1}{x\ln x}$ را پیدا کنید.

۴. سه تلمبه داریم. تلمبهٔ دوم در هرساعت دو برابر تلمبهٔ اول و تلمبهٔ سوم در هرساعت ۸ متر مکعب بیشتر از تلمبهٔ دوم آب خارج می‌کنند. دواستخر با گنجایش‌های ۶۰۰ و ۱۶۸۰ مترمکعب را با هم به وسیلهٔ سه تلمبه، به‌ترتیب زیر، پر از آب کردیم. استخر به‌گنجایش ۶۰۰ مترمکعب را، تلمبهٔ اول پر می‌کند. در استخردوم، ابتدا تلمبهٔ دوم، ۲۴۰ مترمکعب آب ریخت، سپس، تلمبهٔ‌سوم بلافاصله به‌جای تلمبهٔ دوم شروع به‌کارکرد واستخر دوم را پر کرد. استخر دوم، ۶ ساعت بعد از استخر اول پر شد. اگر از همان ابتدا با تلمبهٔ سوم استخر را پر می‌کردیم، ۵ ساعت دیرتر از استخر اول پر می‌شد. تلمبهٔ اول، در هر ساعت، چند متر مکعب آب بیرون می‌کشد؟

۵. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{\frac{4\sin^2\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}}=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$\log_3(x+4)+\log_3(x-1)=1+\frac{1}{\log_2 3}$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. کشتی از اسکلهٔ A حرکت کرد و در جهت حرکت آب رودخانه، فاصله‌ای برابر ۶۰ کیلومتر را طی کرد تا به‌محل ریزش سیلاب به‌رودخانه رسید، سپس ۲۰ کیلومتر برخلاف جهت جریان آب در سیلاب حرکت کرد تا به‌اسکلهٔ B رسید. کشتی، تمامی فاصلهٔ از A تا B را در ۷ ساعت طی کرد. سرعت جریان آب رودخانه و سرعت جریان آب سیلاب برابر یک کیلومتر در ساعت است. سرعت اختصاصی کشتی (یعنی سرعت در آب ساکن) را پیدا کنید.

۲. به‌ازای چه‌مقدارهایی از x، مشتق این‌تابع برابر صفر می‌شود:

$$y(x)=\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$$

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مستطیل $EKMP$ طوری قرار گرفته است که ضلع EK بروتر BC وراس‌های M و P برضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ AC و AB واقع‌اند. طول ضلع مجاور به‌قائمهٔ AC برابر ۳ سانتیمتر و طول ضلع مجاور به‌قائمهٔ AB برابر ۴ سانتیمتر است. مطلوب است طول ضلع‌های مستطیل، به‌شرطی که مساحت آن برابر $\frac{5}{3}$ سانتیمتر ومحیط آن کمتر از ۹ سانتیمتر باشد.

۴. این نامعادله‌را حل کنید:

$$\sqrt{\log_{9}(3x^2-4x+2)}+1>\log_{3}(3x^2-4x+2)$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هریك ازآن‌ها، تنها یك‌مقدار x وجود داشته‌باشد که دردستگاه معادله‌های زیر صدق کند:

$$\begin{cases}|x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0\\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0\end{cases}$$

گروه دوم

۱. ناوچه‌ای از اسکلهٔ A به‌طرف اسکلهٔ B در جهت جریان‌آب حرکت‌کرد. در همان زمان یك‌قایق موتوری از B به‌طرف A (در خلاف جهت حرکت آب) به‌راه افتاد. وقتی‌که ناوچه به B رسید، بدون این‌که درآن‌جا توقفی داشته‌باشد، برگشت و همراه با قایق موتوری به A رسید. سرعت جریان آب، ۳ کیلومتر در ساعت است. سرعت اختصاصی (یعنی سرعت حرکت درآب ساکن) را برای ناوچه وقایق موتوری پیدا کنید، به‌شرطی‌که سرعت ناوچه ۲ کیلومتر در ساعت، بیشتر از سرعت قایق باشد.

۲. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، مشتق این‌تابع برابر صفر شود:

$$y(x)=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x$$

۳. مستطیل KMPT در داخل قطاع OAB ، کــه زاویهٔ مرکزی آن برابر $\frac{\pi}{4}$ است، قراردارد. ضلع KM از مستطیل، روی شعــاع OA، راس P روی‌کمان AB و راس T روی شعاع OB قراردارد. طول ضلع KT ، ۳ سانتیمتر بیشتر از طول ضلع KM است. مساحت مستطیل KMPT برابر است با ۱۸ سانتیمتر. طول شعاع دایره را پیدا کنید.

۴. این‌نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}}+2^{\sqrt{3-x}+1}>5$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید به‌نحوی‌که، به‌ازای هریك ازآن‌ها ، درست دو مقدار برای x وجود داشته باشدکه در معــادله‌های زیر صادق باشند :

$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0 \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0 \end{cases}$$

گروه سوم

۱. فاصلهٔ بین دوایستگاه A و B برابر ۴۸ کیلومتر است. در ساعت ۹ ، کشتی از ایستگاه A به‌راه افتاد و درجهت جریان‌آب رودخانه به‌طرف ایستگاه B رفت. یک‌ساعت درB توقف کرد، سپس به‌طرفA برگشت ودرساعت۱۷ درهمان‌روزبه‌ایستگاه A رسید. سرعت جریان‌آب، برابر است با ۲ کیلومتر ساعت. مطلوب است سرعت اختصاصی کشتی را (یعنی سرعت‌آن‌را درآب ساکن) پیدا کنید.

۲. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنیدکه، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، مشتق تابع زیر برابر صفر شود:

$$y(x)=\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

۳. مستطیل ADKM را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، طوری قرارداده‌ایم که ضلعAD آن‌برضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمهٔ AB، ضلع AM آن‌برضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ AC وراس K بروتر BC واقع‌باشد. طول ضلع‌های مستطیل ADKM را پیدا کنید، به‌شرطی که مساحت‌آن برابر $\frac{40}{3}$ سانتیمتر مربع و طول قطرآن کمتر از ۸ سانتیمتر باشد.

۴. این‌نامعادله حل کنید:

$$\sqrt{\log_4\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right)+1}>\log_2\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right)$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنیدکه، برای هریک ازآن‌ها ، تنها یک‌مقدار x دردستگاه زیر صدق کند :

$$\begin{cases} |x^2+5x+4|-9x^2+5x+4-10x|x|=0 \\ x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0 \end{cases}$$

گروه چهارم

۱. ازباراندازA درجهت‌جریان‌آب رودخانه،دریک‌لحظه،قایق موتوری وقایق

ورزشی به‌طرف بارانداز B حرکت کردند. سرعت جریان آب ۲ کیلومتر در ساعت است. وقتی که $\frac{۱}{۱۰}$ راه از A تا B باقی مانده بود، قایق موتوری، موتور خود را خاموش کرد و ، در نتیجه ، باهمان سرعت جریان آب جلو رفت. وقتی که موتور قایق‌موتوری روشن بود. باسرعتی ۸ کیلومتر درساعت بیشتر از سرعت قایق ورزشی حرکت می‌کرد. هردو قایق در یك لحظه به بارانداز B رسیدند. سرعت اختصاصی قایق ورزشی (یعنی سرعت آن در آب ساکن) را پیداکنید.

۲. به ازای چه مقدارهایی از x ، مشتق تابع زیر برابر صفر می‌شود:

$$y(x)=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\cos\frac{۳x}{۲}-۲\cos\frac{x}{۲}-\frac{۲}{۵}\cos\frac{۵x}{۲}$$

۳. مستطیل ABCD در نیم‌دایره طوری قرار داردکه ضلع AB آن برقطر نیم‌دایره و رأس‌های C و D آن برکمان نیم‌دایره واقع شده است. شعاع نیم‌دایره برابراست با ۵ سانتیمتر. طول ضلع‌های مستطیل ABCD را پیدا کنید ، به شرطی که مساحت آن برابر ۲۴ سانتیمتر مربع و طول قطر آن بزرگتر از ۸ سانتیمتر باشد.

۴. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{۳-۹^{\sqrt{۲-x}}+۲\times۳^{\sqrt{۲-x}}}+۲\times۳^{\sqrt{۲-x}}>۴$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیداکنیدکه ، برای هرکدام از آن‌ها ، دستگاه زیر، درست دوجواب برای x داشته باشد:

$$\begin{cases}|x^۲+۷x+۶|+x^۲-۵x+۶-۱۲|x|=۰\\ x^۲-۲(a+۲)x+a(a+۴)=۰\end{cases}$$

۱۹۷۹

گروه اول

۱. حداکثر و حداقل تابع زیر را ، در بازهٔ [۵ ,۵−] پیداکنید:

$$y(x)=x^۳+۳x^۲-۷۲x+۹۰$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

۳. در مثلث ABC می‌دانیم: $|AB|=6$ و $|AB|=|BC|$. به قطر ضلع AB، دایره‌ای رسم کرده‌ایم که ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کرده است، به نحوی که $|BD|:|DC|=2:1$. طول ضلع AC را پیدا کنید.

۴. درصدق دانش‌آموزان یك کلاس، که توانسته‌اند با نمره‌های عالی به نیم‌سال دوم بروند، بین ۲/۹٪ و ۳/۱٪ است. حداقل دانش‌آموزان این کلاس چند نفر است؟

۵. همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیررا، در بازهٔ $-\frac{21}{5}<x<0$، پیدا کنید:

$$\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geqslant 0$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$4^{\log_9 x}-6\times 2^{\log_9 x}+2^{\log_3 27}=0$$

گروه دوم

۱. بیشترین و کمترین مقدار این تابع را، در بازهٔ $[-6, 6]$، پیدا کنید:

$$y(x)=x^3-3x^2-105x+25$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

۳. به قطر BC، ضلع مجاور بـه زاویهٔ قائمه از مثلث ABC، دایره‌ای رسم کـرده‌ایم. این دایره، وتر را در نقطهٔ D قطع کرده است، به نحوی کـه $|AD|:|DB|=1:3$. طول ارتفاع وارد از رأس C بر وتر AB برابر است با ۳. طول ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ BC را پیدا کنید.

۴. وقتی که نتیجهٔ مسابقه‌را دادند، معلوم شد که تعدادی از اعضای گروه که طرح را اجرا کرده‌اند، بین ۹۲/۵٪ تا ۹۳/۵٪ آن‌ها بوده است. حداقل تعداد افراد این گروه را پیدا کنید.

۵. همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیر را، با شرط $-۲ \leqslant x \leqslant -\frac{۱}{۳}$، پیدا کنید:

$$x^{۲}+۲x+\cos ۵<۰$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$۴^{\log_{۲} x}-۵\times ۲^{\log_{۲} x}+۲^{\log_{۲} ۹}=۰$$

گروه سوم

۱. حداکثر و حداقل تابع زیررا، در بازهٔ $[-۴, ۵]$ پیدا کنید:

$$y(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲۰x+۱۰۰$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$$

۳. طول ضلع AB از مثلث ABC برابراست با ۱. به قطر AB دایره‌ای رسم کرده‌ایم که ضلع AC را در نقطهٔ D، وسط ضلع AC، قطع کرده است. همین دایره، ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کرده است، به نحوی که $|BE|:|EC|=۷:۲$. طول ضلع AC را پیدا کنید.

۴. اعلام شد، تعداد افرادی از گروه که برای مسابقهٔ اسکی حاضر شده‌اند، بین ۹۶/۸٪ و ۹۷/۲٪ تعداد عضوهای گروه بودند. این گروه، دست‌کم، چند عضو دارد؟

۵. همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیررا، در بازهٔ $\frac{۱}{۴} \leqslant x \leqslant ۶$، پیدا کنید:

$$\operatorname{tg}\frac{۵}{۲}+۶x-x^{۲}>۰$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$۳\times ۹^{\log_{۴} x}-۱۰\times ۳^{\log_{۴} x}+\log_{۲} ۸=۰$$

گروه چهارم

۱. حداکثر و حداقل این تابع را، در بازهٔ $[-۳, ۲]$ پیدا کنید:

$$y(x)=۲x^{۳}-۳x^{۲}-۳۶x+۶$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

۳. به قطر BC ، ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، دایره‌ای رسم کرده‌ایم. این دایره ، وتر را در نقطهٔ D قطع کرده است ، به نحوی که $|AD| : |DB| = 1:4$. مطلوب است طول ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ قائمهٔ C بر وتر، به‌شرطی که طول ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ BC برابر ۱۰ باشد.

۴. در اطلاعیهٔ یک کارگاه ساختمانی گفته شده است که ، تعدادکارگرانی که به مرخصی رفته‌اند، بین ۱/۷٪ تا ۲/۳٪ کل کارگران را تشکیل می‌دهد. حداقل تعدادکارگران این کارگاه ، چقدر می‌تواند باشد؟

۵. همهٔ جواب‌های این نامعادله را ، در بازهٔ $-\frac{1}{3}<x<2$ ، پیدا کنید:

$$x^2-2x+\sin\frac{7}{2}\leqslant 0$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$25^{\log_2 x}-6\times 5^{\log_2 x}+5^{\frac{1}{2}\log_2 4}=0$$

۱۹۸۰

گروه اول

۱. مساحت شکلی را پیدا کنید که به‌محور طول وسهمی $y=-2(x-1)^2+8$ محدود باشد.

۲. معادلهٔ $\log_{x-1} 3=2$ را حل کنید.

۳. هرم منتظمی با قاعدهٔ شش ضلعی مفروض است. مخروط قائمی در آن محاط و مخروط قائم دیگری بر آن محیط کرده‌ایم. ارتفاع هرم برابر H و شعاع قاعدهٔ مخروط محیطی برابر R است. تفاضل حجم‌های دو مخروط محیطی و محاطی را پیدا کنید.

۴. این معادله را حل کنید:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}$$

۵. همه جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} \left|y+\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{13}{6}+x-y\right| = \frac{13}{6}+x+\frac{1}{x} \\ x^2+y^2=\frac{97}{36} \end{cases}$$

را، با شرطهای $x<0$ و $y>0$ پیدا کنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر k را طوری پیدا کنید که معادلهٔ زیر، دارای دوریشهٔ حقیقی متمایز باشد:

$$x^2-2kx+k^2+2k-1=0$$

گروه دوم

۱. مطلوب است محاسبهٔ مساحت شکل محدود به محور طول و سهمی $y=-2(x-3)^2+2$.

۲. معادلهٔ $\log_{x+1} 2 = 2$ را حل کنید.

۳. هرم منتظم با قاعدهٔ مثلث داده شده است. مخروط قائمی در هرم محاط و مخروط قائم دیگری برهرم محیط کرده‌ایم. ارتفاع هرم برابر H و شعاع قاعدهٔ مخروط محیطی برابر R است. تفاضل حجم‌های دو مخروط محیطی و محاطی را به‌دست آورید.

۴. این معادله را حل کنید:

$$\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{1}{2}\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی

$$\begin{cases} \left|x+\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{10}{3}-x+y\right| = \frac{10}{3}+y+\frac{1}{y} \\ x^2+y^2=\frac{82}{9} \end{cases}$$

را، با شرطهای $x>0$ و $y<0$، به‌دست آورید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر k را طـوری پیداکنیدکه، برای هر یك از آن‌ها، معادلهٔ زیر، ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

$$x^{2}-4kx+4k^{2}+3k+1=0$$

گروه سوم

۱. مساحت شکل محصور بین محور طول و سهمی $y=-3(x+5)^{2}+3$ را محاسبه کنید.

۲. معادلهٔ $\log_{x-2} 2 = 2$ را حل کنید.

۳. هرم منتظمی‌داریم، باقاعدهٔ مربع. مخروط قائمی دراین هرم محاط ومخروط قائم دیگری بر آن محیط کـرده‌ایم. ارتفاع هرم برابر H و شعاع قاعدهٔ مخروط محیطی آن برابر R است. تفاوت حجم دومخروط محیطی ومحاطی را پیداکنید.

۴. این معادله را حل کنید:

$$\cos^{6}x-\sin^{6}x=\frac{13}{8}\cos^{2}2x$$

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} \left|\dfrac{3}{y}-x\right|+\left|\dfrac{13}{2}+x+y\right|=\dfrac{13}{2}+y+\dfrac{3}{y} \\ x^{2}+y^{2}=\dfrac{145}{4} \end{cases}$$

را، با شرطهای $x>0$ و $y>0$، پیداکنید.

۶. پارامتر k را طوری پیداکنیدکه معادلهٔ زیر دارای دوجواب متمایز باشد:

$$x^{2}-2kx+k^{2}+2k-4=0$$

گروه چهارم

۱. مساحت شکل محدود به محور طول و سهمی $y=-3(x+3)^{2}+3$ را محاسبه کنید.

۲. معادلهٔ $\log_{x+2} 3 = 2$ را حل کنید.

۳. همان مسألهٔ شمارهٔ ۳ گروه دوم.

۴. این معادله را حل کنید:

$$\cos^{8}x-\sin^{8}x=\cos^{2}2x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

۵. همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}\left|y-\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{5}{2}-x-y\right|=\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}\\ x^{2}+y^{2}=\frac{17}{4}\end{cases}$$

را، با شرط‌های $x>0$ و $y>0$، پیدا کنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر k را، طوری پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ زیر ریشه‌های حقیقی نداشته باشد:

$$x^{2}-4kx+4k^{2}+k+3=0$$

۱۹۸۱

گروه اول

۱. معادلهٔ $\log_{3}(2x+1)=2\log_{2x+1}3+1$ را حل کنید.

۲. حداکثر تابع زیر را، در بازهٔ $\left[\frac{-\pi}{2}\text{ و }\frac{\pi}{2}\right]$، به دست آورید.

$$y(x)=\frac{x}{2}+\sin^{2}x$$

۳. دو محلول اسید سولفوریك با آب داریم: اولی ۴۰٪ و دومی ۶۰٪. این دو محلول را مخلوط و، سپس، ۵ کیلوگرم آب خالص به آن اضافه کرده‌ایم و محلولی ۲۰٪ به دست آورده‌ایم. اگر به‌جای آب خالص، ۵ کیلوگرم اسید ۸۰٪ اضافه کرده بودیم، به محلولی ۷۰٪ می‌رسیدیم. از محلول‌های ۴۰٪ و ۶۰٪، چقدر داشته‌ایم؟

۴. به قطر AC، ضلع مثلث ABC، دایره‌ای رسم کرده‌ایم. این دایره، ضلع AB را در نقطهٔ M و ضلع BC را در نقطهٔ N قطع کرده است. می‌دانیم طول پاره خط AC برابر ۲، طول پاره خط AB برابر ۳ است و نقطهٔ

M ، پاره خط AB را به‌نسبت ۲:۳ قطع می‌کند. طول پاره خط AN را پیدا کنید.

۵. این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $2\cos x+3\cos 2x=3$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $2\log_4(3x-2)+2\log_{3x-2}4=5$ را حل کنید.

۲. حداقل مقدار این تابع را در بازهٔ $[0 ، \pi]$ ، پیدا کنید:

$$y(x)=-\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

۳. دو آلیاژ داریم که از روی و مس درست شده‌اند، آلیاژ اول ۲ کیلوگرم و آلیاژ دوم ۳ کیلوگرم وزن دارد. این دو آلیاژ را با ۵ کیلوگرم آلیاژ دیگری (از روی و مس) ، که عیار روی در آن ۴۵٪ بود ، و آلیاژی از روی و مس به دست آوردیم که عیار روی در آن ۵۰٪ است. اگر درصد روی در آلیاژ اول به اندازهٔ درصد روی در آلیاژ دوم ، و برعکس، درصد روی در آلیاژ دوم به اندازهٔ درصد روی در آلیاژ اول بود و آن‌ها را با ۵ کیلوگرم آلیاژ با ۶۰٪ روی همبسته می‌کردیم ، به آلیاژی با ۵۵٪ روی می‌رسیدیم. عیار روی را در آلیاژهای اول و دوم پیدا کنید.

۴. نقطهٔ B در بیرون دایره و نقطه‌های A و C دو سر یك قطر از همان دایره‌اند. پاره‌خط AB ، محیط دایره را در نقطهٔ P و پاره‌خط CB، محیط دایره را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. طول پارخط AB برابر ۲ ، طول پاره‌خط BC برابر $\sqrt{2}$ و طول پاره‌خط AQ برابر $\sqrt{3}$ است. طول پاره‌خط AC را پیدا کنید.

۵. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y^2-xy+1=0 \\ x^2+2x=-y^2-2y-1 \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $\sin x+\cos 2x+1=0$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $log_{۲}(۹x-۱)+۳log_{۹x-۱}۲+۴=۰$ را حل کنید.

۲. بیشترین مقدار تابع زیر را، در بازهٔ $[-\pi ، \pi]$، پیدا کنید:

$$y(x)=sin^{۲}x-x$$

۳. دو محلول اسید سولفوریك با آب داریم. ۲/۵ کیلوگرم از محلول اول و ۴ کیلوگرم از محلول دوم را برداشته‌ایم و با ۳ کیلوگرم محلول ۹۰% مخلوط کرده‌ایم، یك محلول ۶۰% به دست آمده است. اگر محلول اول را دو برابر ومحلول دوم را نصف مقدار قبلی انتخاب و با ۳کیلوگرم محلول ۲۰% مخلوط می‌کردیم، به‌محلولی ۳۰% می‌رسیدیم. درصد اسید سولفوریك را در محلول‌های اول و دوم پیدا کنید.

۴. در مثلث ABC ، به قطر ضلع AC دایره‌ای رسم کرده‌ایم، که ضلع AB را در نقطهٔ M و ضلع BC را در نقطهٔ N قطع کرده است. می‌دانیم، طول پاره خط AC برابر ۲ ، طول پاره‌خط AB برابر ۳ و طول پاره‌خط AN برابر ۱٫۸ می‌باشد. کسینوس زاویهٔ BAC را پیدا کنید.

۵. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲}+۴x^{۲}y^{۲}+۴y=۰ \\ ۴x^{۲}-۴y^{۲}-۴y-۵=۰ \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $۲cosx+۴cos\frac{x}{۲}+۱=۰$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $۳log_{۸}(x+۱)=۸+۳log_{x+۱}۸$ را حل کنید.

۲. کمترین مقدار این تابع را، در بازهٔ $[-\pi ، \pi]$ ، پیدا کنید:

$$y(x)=cos^{۲}x-x$$

۳. دو شمش داریم که آلیاژهایی از روی و مس هستند. شمش اول ۷کیلو گرم وزن دارد و درصد روی در شمش دوم برابر ۱۰% است . اگر ۲ کیلو گرم ازشمش‌اول را با شمش دوم همبسته کنیم، در شمش حاصل، ۱ کیلو گرم‌روی بیشتر از مقدار روی در بقیهٔ شمش اول خواهد بود. ولی اگر دو شمش‌اول و دوم را بـا هم مخلوط و ۱ کیلوگـرم از آلیاژ روی و مس با عیار ۶۰%

روی را به آن اضافه کنیم، ملقمه‌ای شامل ۲۰٪ روی به‌دست می‌آوریم. درصد روی را در شمش‌های اول و دوم پیدا کنید.

۴. A و C دو انتهای قطر دایـره و B ، نقطه‌ای واقع در بیرون دایره است. پاره‌خط AB دایره را درنقطهٔ P و پاره‌خط CB دایره را در نقطهٔ Q قطع می‌کنند. می‌دانیم، اندازهٔ زاویهٔ ABC برابر ۴۵درجه وطول پاره‌خطهای AB و AC برنسبت ۳ : ۱ می‌باشند. نسبت طول دو پاره خط CP وAQ را محاسبه کنید.

۵. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲ - xy^۲ + ۴ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ + ۴ = ۴x + ۲y \end{cases}$$

۶. معادلهٔ $\cos x + ۲\sin\frac{x}{۲} + ۱ = ۰$ را حل کنید.

§ ۸. دانشکدهٔ زمین‌شناسی
(بخش ژئوفیزیك)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. درمخزن می‌توان از طریق دو لوله آب ریخت. اگرتنها لولهٔ اول بازباشد، مخزن یك ساعت زودتر ازموقعی پرمی‌شودکه تنها لولهٔ دوم باز باشد، اگر گنجایش مخزن ۲ متر مکعب بیشتر و قدرت عبور آب از لولهٔ دوم در هر ساعت $\frac{۴}{۳}$ مترمکعب بیشتر بود، آن وقت، برای پر کردن مخزن از راه لولهٔ دوم، همان قدر وقت لازم بودکه برای عبور ۲ مترمکعب آب از لولهٔ اول لازم می‌شد. مطلوب است حجم مخزن، به شرطی که در مدت پرشدن آن از طریق لولهٔ دوم ، ۳ متر مکعب آب از لولهٔ اول خارج می‌شود.

۲. نامعادلهٔ $x^۲ - |۵x - ۳| - x < ۲$ را حل کنید.

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر $a(a>0)$ را پیدا کنید، به‌نحوی که به‌ازای هر یک از آن‌ها، مساحت سطح محدود به سهمی $y=(x^2+2ax+3a^2):(1+a^4)$ و خط راست $y=(a^2-ax):(1+a^4)$، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۴. در دایرهٔ به مرکز O، مثلث ABC را محاط کرده‌ایم $\left(\widehat{A}>\frac{\pi}{2}\right)$. امتداد نیمساز AF زاویهٔ A از مثلث، محیط دایره را در نقطهٔ L، وشعاع AO، ضلع BC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. AH را ارتفاع مثلث ABC می‌گیریم مطلوب است نسبت مساحت مثلث OAL به مساحت چهار ضلعی OEFL، به‌شرطی که بدانیم: $|AL|=4\sqrt{2}$، $|AH|=\sqrt{2\sqrt{3}}$ و $\widehat{AEH}=\frac{\pi}{3}$.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر k را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، نامعادله‌های زیر، دست کم یك جواب مشترك داشته باشند:

$$x^2+4kx+3k^2>1+2k \quad \text{و} \quad x^2+2kx\leqslant 3k^2-8k+4$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$\sin^2(2+3x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\cos^2(2-5x)+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)$$

گروه دوم

۱. دوچرخه سوار، نیمی ازفاصلهٔ A تا B را، ۲ ساعت زودتر از پیاده‌ای طی می‌کند که بخواهد ثلث فاصلهٔ A تا B را راه‌پیمائی کند. در زمانی که دوچرخه سوار، فاصلهٔ A تا B را بپیماید، پیاده می‌تواند ۲۴ کیلومتر راه برود. اگر سرعت دوچرخه‌سوار، ۷ کیلومتر در ساعت بیشتر بود، آن وقت درطول مدتی که پیاده ۱۸ کیلومتر را طی می‌کرد، دوچرخه‌سوار می‌توانست ۳ کیلومتر بیشتر از فاصلهٔ A تا B را طی کند. سرعت پیاده را پیدا کنید.

۲. نامعادلهٔ $3x^2-|x-3|>9x-2$ را حل کنید.

۳. همهٔ مقدارهایی ازپارامتر $a(a>0)$ را پیدا کنید که، برای‌هریك از آن‌ها، مساحت محدود به سهمی‌های زیر، حداکثر مقدار ممکن باشد:

$$y=\frac{4a^2-2ax-x^2}{1+a^4} \quad \text{و} \quad y=\frac{x^2}{1+a^4}$$

۴. مثلث BAC با زاویهٔ منفرجهٔ رأس A ، در دایرهٔ به مرکز O ، محاط شده است. نقطهٔ P ، وسط کمان بزرگتر از دو کمان مربوط به وتر BC است. شعاع OA ، ضلع BC را در نقطهٔ L و وتر AP ضلع BC را در نقطهٔ Q قطع کـرده است: AF را ارتفاع مثلث BAC می گیـریم. نسبت مساحت مثلث AOP را به‌مساحت مثلث AQF پیدا کنید، به شرطی که طول نیمساز زاویه A از مثلث ALF برابر $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ، $|AP|=\sqrt{۳}$ و $\widehat{OPA}=\frac{\pi}{۶}$ باشد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر k را پیدا کنید که ، به ازای هرکدام از آن‌ها، هر جواب نامعادلهٔ

$$x^۲+۳k^۲-۱\geqslant ۲k(۲x-۱)$$

جوابی از نامعادلهٔ زیر باشد:

$$x^۲+(۲k-۱)k+k^۲>۰$$

۶. این معادله را حل کنید:

$$۲\sin^۲\left(۵x+\frac{\pi}{۴}\right)=۱+\sin(۳+۲x)+۲\sin^۲\left(۴x-\frac{۳}{۲}\right)\times$$
$$\times\cos\left(۶x+\frac{۳}{۲}\right)$$

گروه سوم

۱. گروه اول بارکشتی را خالی می کنند. گروه دوم ، با ۵ ساعت کارکمتر از گروه اول ، ثلث تمامی بار را خالی می کنند. اگر بازدهی کار گروه‌ها را سه برابر کنیم ، گروه اول ، برای خالی کردن تمامی بار، یك ساعت بیشتر ازگروه دوم ، برای خالی کردن نیمی از بارها لازم دارد، اگر گروه اول ساعتی یك تن کمتر و گروه دوم ساعتی ۲ تن بیشتربار را خالی می کردند، آن‌وقت، درمدتی که گروه‌اول می‌توانست تمامی بار را، منهای ۲ تن، خالی کند، گروه دوم قدرت خالی کردن تمامی بار، به‌اضافهٔ ۸ تن را داشت. وزن بارکشتی را پیدا کنید.

۲. نامعادلهٔ $x^۲+۴\geqslant|۳x+۲|-۷x$ را حل کنید.

۳. مقدارهای پارامتر a $(a>۰)$ را طوری پیدا کنید که ، به‌ازای هریك از آن‌ها، مساحت شکل محدود به‌سهمی‌های

$$y=\frac{۲\sqrt{ax}-x^۲}{۱+a^۳} \text{ و } y=\frac{x^۲}{۱+a^۳}$$

حداکثر مقدار ممکن باشد.

۴. دایرهٔ به‌مرکز O را برمثلث ABC $\left(\widehat{A}>\frac{\pi}{۲}\right)$ محیط کرده‌ایم. امتداد نیمساز AL این‌مثلث، محیط دایره را در نقطهٔ F قطع کرده است. محل برخورد شعاع AO با ضلع BC را E می‌نامیم. AH را ارتفاع مثلث ABC می گیریم. نسبت مساحت چهارضلعی FOEL را به‌مساحت مثلث AEL پیدا کنید، به‌شرطی که داشته‌باشیم:

$$\widehat{AEH}=\frac{\pi}{۶} \text{ و } |AF|=۲\sqrt{۳}\cdot|AH|=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر k را پیدا کنید، به‌نحوی که به‌ازای‌هرکدام ازآن‌ها، هرعدد دلخواه، دست‌کم جواب یکی ازنامعادله‌های زیر باشد:

$$x^۲+۵k^۲+۸k>۲(۳kx+۲) \text{ و } x^۲+۴k^۲\geqslant k(۴x+۱)$$

۶. این‌معادله را حل کنید:

$$\cos(۳+۲x)+\sin ۹x=۲\sin^۲\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۳x}{۲}\right)-۲\cos^۲\left(\frac{۳}{۲}-۵x\right)$$

گروه چهارم

۱. تراش‌کاری سفارش آماده‌کردن چندقطعه را انجام داد. درهمین مدت، تراش‌کار دوم، ۱۸ قطعه را آماده‌کرد، اگر یك ساعت کمترکار می‌کرد، می‌توانست درست نصف سفارش راآماده‌کند. اگر تراش‌کار اول، سرعت کار خود را، ساعتی دوقطعه بیشتر می‌کرد، می‌توانست در همان مدتی‌که تراش‌کار دوم ۱۵ قطعه راآماده می‌کند، تمامی سفارش را، به‌اضافه ۵قطعهٔ اضافی، انجام دهد. تعداد قطعه‌های سفارش را پیدا کنید.

۲. نامعادلهٔ $|x-۲|\leqslant ۲x^۲-۹x+۹$ را حل کنید.

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر $a(a>۰)$ را پیدا کنیدکه، برای هریك ازآن‌ها، مساحت شکل محصور به‌سهمی‌های

$$y=\frac{۲x^۲}{۱+a^۳} \text{ و } y=\frac{x^۲+\sqrt{a^۲}}{۱+a^۳}$$

بیشترین مقدار ممکن باشد.

۴. برمثلث ABC $\left(A>\frac{\pi}{۲}\right)$، دایرهٔ به‌مرکز O را محیط کرده‌ایم. نقطهٔ F وسط بزرگترین کمان از وتر BC است. محل برخورد ضلع BC با شعاع AO را E وبا وتر AF را P می‌نامیم. AH را ارتفاع مثلث ABC می گیریم . نسبت مساحت چهارضلعی OEPF را به‌مساحت مثلث APH پیدا کنید، به‌شرطی که شعاع دایرهٔ محیطی

$$R=۲\sqrt{۳}\text{ ، }|AE|=\sqrt{۳}\text{ و }|EH|=\frac{۳}{۲}$$ باشد.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر k را پیدا کنید که، برای هرکدام ازآن‌ها، نامعادلهٔ $\frac{x^۲+k^۲}{k(۶+x)}\geqslant ۱$ ، برای همهٔ مقدارهای x ، باشرط $-۱<x<۱$ ، برقرار باشد.

۶. این معادله را حل کنید:

$$sin^۲\left(\frac{\pi}{۴}+۷x\right)=sin^۲(۱۲x+۳)cos(۲x-۳)+$$

$$+cos^۲\left(\frac{\pi}{۴}+۳+۵x\right)$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلهٔ $۱+۲cos^۲x=۵cos۴x-$ را حل کنید.

۲. ۷ پسر و ۸ دختر را می‌خواهیم به‌دو گروه چنان تقسیم کنیم که در گروه‌اول ۴ پسر و ۳ دختر وجود داشته باشد . به‌چندطریق؛ این‌کار را می‌توانیم انجام دهیم ؟

۳. نامعادلهٔ $log_۲ log_{\frac{۹}{۱۶}}(x^۲-۴x+۳)\leqslant ۰$ را حل کنید.

۴. نقطهٔ K را روی ضلع AB از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $|AK|:|BK|=۱:۲$؛ همچنین، روی ضلع BC، نقطهٔ L را

به‌نحوی که $|CL|:|BL| = ۲:۱$. محل برخورد خط‌های راست AL و CK را Q می‌گیریم. مطلوب است محاسبهٔ مساحت ABC ، به‌شرطی که مساحت مثلث BQC برابر ۱ باشد.

۵. مرکز A در ۸ کیلومتری جاده در دشت قرار دارد. نقطهٔ B روی جاده ــ که به‌صورت خطی مستقیم است ــ واقع شده است. سرعت حرکت اتومبیل در جاده، دوبرابر سرعت آن در دشت است. می‌دانیم، اگر از A به‌طور مستقیم تا نقطهٔ C واقع برجاده وغیر از نقطهٔ B برویم وسپس روی جاده از C تا B حرکت کنیم، هرطور که C را انتخاب کنیم، زمان لازم برای رسیدن از A به B ، کمتر از زمانی نیست که روی دشت و مستقیماً از A تا B حرکت کنیم. فاصلهٔ از A تا B چقدر است؟

۶. معادلهٔ $|۵x - ۱۳| - |۶ - ۵x| = ۷$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $tg ۲x + sin ۲x = \frac{۸}{۳} cotg x$ را حل کنید.

۲. برای یک بازی هوکی، ۲ دروازه‌بان، ۶ مدافع و ۱۲ مهاجم وجود دارد. به‌چندطریق می‌توان تیمی را درست کرد که شامل دروازه‌بان، دو مدافع و ۳ مهاجم باشد؟

۳. نامعادلهٔ $log_{\frac{۸}{۳}} log_{\frac{۱}{۲}} (x^۲ - x - ۶) \geqslant ۰$ را حل کنید.

۴. در مثلث ABC ، به‌مساحت برابر ۶، نقطهٔ K را روی ضلع AB ونقطهٔ L را روی ضلع AC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته‌باشیم:

$$|AK|:|BK| = ۲:۳; \quad |AL|:|LC| = ۵:۳$$

نقطهٔ Q. نقطهٔ برخورد خط‌های راست CK و BL از خط راست AB به‌فاصلهٔ ۱/۵ قراردارد. طول ضلع AB را پیدا کنید.

۵. نقطهٔ A ، به‌فاصله‌ای از جاده، در دشت قراردارد. نقطهٔ B ، روی جاده ــ که به‌صورت خط مستقیم است ــ طوری قرار گرفته است که فاصلهٔ از A تا B برابر ۱۰ کیلومتر است. سرعت اتومبیل در جاده سه‌برابر سرعت آن در دشت است. می‌دانیم که اگر اتومبیلی از A تا نقطهٔ C واقع برجاده را (C غیر از B است) دردشت واز C تا B را روی جاده حرکت کند، به‌زمانی نیاز داردکه از زمان حرکت مستقیم از A تا B ، کمتر نیست.

فاصلهٔ نقطهٔ A تا جاده را پیدا کنید.

۶. معادلهٔ $|۳x-۸|-|۳x-۲|=۶$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $cos۴x=sin^{۲}x-\frac{۳}{۴}$ را حل کنید.

۲. ۶ بچه و ۸ بزرگ را به‌چند طریق می‌توان در اتومبیل‌های «ولگا» و «مسکویچ» جا داد، به‌شرطی که در هر اتومبیل ۳ بچه و ۴ بزرگ نشسته باشند؟

۳. نامعادلهٔ $log_{۲۷}log_{۵}(x^{۲}-۲x-۳)\geqslant ۰$ را حل کنید.

۴۱

۴. در مثلث ABC ، نقطهٔ K را روی ضلع AC و نقطهٔ L را روی ضلع AB طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|AK|=۱ \text{ ، } |KC|=۳ \text{ ، } |AL|:|LB|=۲:۳$$

Q را نقطهٔ برخورد BK و CL می‌گیریم. مساحت مثلث AQC برابر واحد است. طول ارتفاع مثلث ABC را، که از راس B گذشته است، پیدا کنید.

۵. نقطهٔ A در دشت و به‌فاصلهٔ ۷/۵ کیلومتر از جاده قرار دارد. روی جاده ــ که به‌خط مستقیم است ــ نقطهٔ B واقع شده است. سرعت حرکت دوچرخه‌سوار در جاده، چهار برابر سرعت حرکت آن در دشت است. می‌دانیم که اگر دوچرخه‌سوار از نقطهٔ A مستقیماً به نقطهٔ C ــ غیر از نقطهٔ B ــ واقع برجاده برود و از آن‌جا تا نقطهٔ B را روی جاده حرکت کند، زمان لازم، به‌ازای هر نقطهٔ انتخابی C ، کمتر از وقتی نیست که بخواهد مستقیماً از A به B ، روی دشت حرکت کند. فاصلهٔ A تا B را پیدا کنید.

۶. معادلهٔ $|۱۶-۹x|-|۹x-۵|=۱۱$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $cos۲x=۲tg^{۲}x-cos^{۲}x$ را حل کنید.

۲. یک گروه ۱۸ نفری دانشجو، ۴ بلیت سیرک و ۳ بلیت سینما دارند. به‌چند طریق می‌توان این بلیت‌ها را بین آن‌ها تقسیم کرد؟

۳. نامعادلهٔ $\log_{\frac{12}{11}}\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x-4)\leqslant 0$ را حل کنید.

۴. در مثلث ABC ، نقطهٔ L را روی ضلع AB و نقطهٔ K را روی ضلع BC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته‌باشیم:

$$|AL|=1 ,\quad |BL|=3 ,\quad |BK|:|KC|=3:2$$

نقطهٔ Q ، محل برخورد خطهـای راست AK و CL ، از خط راست BC به‌فاصلهٔ ۱/۵ قراردارد. سینوس زاویهٔ ABC را محاسبه‌کنید.

۵. نقطهٔ A ، به‌فاصله‌ای از جاده، دردشت قراردارد. روی جاده ـ که به‌خط مستقیم است ـ نقطهٔ B را طوری انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ از A تا B برابر ۲۰ کیلومتر باشد. سرعت حرکت‌اتومبیل‌درجاده، چهار برابر سرعت حرکت‌آن در دشت‌است. می‌دانیم که اگراتومبیل ازنقطهٔ A تانقطهCواقع برجاده ـ و غیر از نقطهٔ Bـ در دشت و ، سپس، از C تا B روی جاده حرکت کند، برای هرنقطهٔ دلخواه C ، به‌زمانی احتیاج داردکـه کمتر از زمان حرکت مستقیم از A به B نیست . فـاصلهٔ نقطهٔ A تـا جاده را را پیدا کنید.

۶. معادله $|7x-12|-|7x-11|=1$ را حل کنید.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. برای هرمقدار پـارامتر a ، همه x هایی را پیدا کنیدکه در این برابری صدق کنند:

$$\frac{a}{2a-x}=3$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x)$$

۳. همهٔ عددهای A را طوری پیداکنیدکه ، برای هریك از آن‌ها، معادله زیر دارای جواب باشد:

$$5\sin x+2\cos x=A$$

۴. قطار سریع‌السیر ، فاصله بین دوشهر را ۴ ساعت سریع‌تر از قطار باری و ۱ ساعت سریع‌تر ازقطار مسافری طی می کند می‌دانیم، سرعت قطار باری $\frac{۵}{۸}$ سرعت قطار مسافـری و ۵۰ کیلـومتر در ساعت کمتر از سرعت قطـار سریع‌السیر است. مطلوب است سرعت قطارباری و قطار سریع‌السیر.

۵. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، طول ضلع AB برابر $\frac{۲۵}{۶۴}$ ، طول ضلع BC برابر $۱۲\frac{۲۵}{۶۴}$ و طول ضلع CD برابر $۶\frac{۱}{۴}$ است. زاویه AB حاده و زاویه ADC منفرجه است ، ضمناً، سینوس زاویه DAB برابر است با $\frac{۳}{۵}$ و کسینوس زاویه ABC برابر با $-\frac{۶۳}{۶۵}$. دایرهٔ‌به‌مرکزO، برضلع‌های BC ، CD و AD مماس است. طول پاره‌خط OC را محاسبه کنید.

۶. همه عددهای غیرمنفی x را طوری پیدا کنید که، برای هرکدام ازآن‌ها ، از نامساوی

$$abx \geqslant ۴a + ۷b + x \quad (a \geqslant ۰ ، b \geqslant ۰)$$

نامساوی $ab \geqslant ۵$ نتیجه شود.

گروه دوم

۱. برای هرمقدار پـارامتر a ، همهٔ x هـا را پیدا کنید که در برابری زیر صدق کنند:

$$\frac{a}{a - ۲x} = ۳$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$۲ + \lg(۱ + ۴x^۲ - ۴x) - \lg(۱۹ + x^۲) = ۲\lg(۱ - ۲x)$$

۳. همهٔ عددهـای A را طوری پیدا کنید که ، برای هرکدام ازآن‌ها، معادله زیر دارای جواب باشد:

$$۷\sin x + ۳\cos x = A$$

۴. دوقطعه چدن، باوزن‌های برابر وبامقدارکرم مختلف موجود درآن، مفروض است. از این دوقطعه، یك‌قطعه چدن درست کرده‌ایم که دارای ۱۲ کیلو گرم

کرم است. اگر وزن قطعه اول دو برابر بود، در ملقمه حاصل، ۱۶ کیلو گرم کرم وجود داشت. می‌دانیم، مقدار کرم قطعهٔ اول ۵٪ کمتر از مقدار کرم قطعهٔ دوم است. درصد کرم را در هر قطعه پیدا کنید.

۵. درچهارضلعی محدب ABCD، طول ضلع AB برابر $\frac{۵}{۸}$، طول ضلع BC برابر $۱۹\frac{۳۳}{۴۰}$ و طول ضلع AD برابر $۱۲\frac{۴}{۵}$ است. می‌دانیم که زاویهٔ DAB حاده و سینوس آن برابر $\frac{۳}{۵}$ است؛ کسینوس زاویهٔ ABC هم برابراست با $\frac{۶۳}{۶۵}$. دایرهٔ به‌مرکز O، برضلع‌های BC، CD و AB مماس است. طول پاره‌خط OD را پیدا کنید.

۶. عددهای غیرمنفی x را، به‌شرطی پیدا کنید که، برای هریک از آن‌ها، از نابرابری

$$abx \geqslant ۲a+۹b+x \quad (a\geqslant ۰ ، b\geqslant ۰)$$

بتوان به‌نابرابری $ab\geqslant ۴$ رسید.

گروه سوم

۱. برای هرمقدار پارامتر a، همهٔ xهایی را پیدا کنید که با برابری زیر سازگار باشند:

$$\frac{a}{۲a-x}=۲$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$۲+\lg(۴+x^۲+۴x)-\lg(۳۶+x^۲)=۲\lg(۲+x)$$

۳. همهٔ عددهای A را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، این معادله جواب داشته‌باشد:

$$۴\sin x+۹\cos x=A$$

۴. استخری به‌وسیلهٔ لولهٔ اول ۵ ساعت زودتر از لولهٔ دوم و ۳۰ ساعت زودتر از لولهٔ سوم پر می‌شود. می‌دانیم که قدرت عبورآب در لولهٔ اول ۲/۵ برابر قدرت عبور آب در لولهٔ سوم است، و لولهٔ سوم، در هرساعت، ۴۰ مترمکعب آب کمتر از لولهٔ دوم از خود عبور می‌دهد. قدرت عبور آب را

در لوله‌های اول وسوم پیدا کنید.

۵. در چهارضلعی محدب ABCD ، طول ضلع AD برابر ۷ ، طول ضلع DC برابر ۵ وطول‌ضلع BC برابر $۵\frac{۱۹}{۲۰}$ می باشد . می‌دانیم کـه زاویهٔ BAD حاده و زاویهٔ ABC منفرجه است؛ ضمناً، سینوس زاویهٔ BAD برابر $\frac{۳}{۵}$ وکسینوس‌زاویهٔ ADC برابر $-\frac{۳}{۵}$ است. مطلـوب است محاسبهٔ شعاع دایره‌ای‌که برضلع‌های AB ، BC و AD مماس است.

۶. همه عددهـای غیرمنفی x را طوری پیدا کنید که ، به‌ازای هر کدام از آن‌ها ، بتوان از نابرابری

$$abx \geqslant ۵a + ۴b + x \quad (a \geqslant ۰ ,\ b \geqslant ۰)$$

نابرابری $ab \geqslant ۳$ را نتیجه گرفت.

گروه چهارم

۱. برای هرمقدار پارامتر a ، همهٔ xهارا طوری پیدا کنیدکه، دربرابری زیر صدق کنند:

$$\frac{a}{a - ۲x} = ۲$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$۱ + \lg(۱ + x^۲ + ۲x) - \lg(۶ + x^۲) = ۲\lg(۱ + x)$$

۳. همهٔ عددهای A را پیدا کنیدکه، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، این‌معادله‌دارای جواب باشد:

$$۲\sin x + ۳\cos x = A$$

۴. تراکتور ، از مرکز A به‌مرکز B می‌رود . شعاع چرخ جلویی تراکتور، از شعاع چـرخ عقبی آن کوچکتر است . در فاصلهٔ از A تـا B ، چرخ جلو ۲۰۰ بـار بیش از چرخ عقب دور می‌زند . اگر محیط چـرخ جلو ، $\frac{۵}{۴}$ محیط فعلی آن بود، آن‌وقت، در فاصلهٔ A تا B، ۸۰ دور بیش از چرخ عقب دورمی‌زد. مطلوب است‌طول محیط چرخ جلو وطول محیط چرخ‌عقب تراکتور، به‌شرطی که طول محیط چرخ عقب ، ۱ متر بیش از طول محیط چرخ جلو باشد.

۰۵ در چهارضلعی محدب ABCD ، طول ضلع AB برابر $10\frac{3}{10}$ ، طول‌ضلع AD برابر ۱۴ و طـول ضلع CD برابر ۱۰ می‌باشد. می‌دانیم: DAB ، زاویه‌ای حـاده و ، ضمناً سینوس زاویهٔ DAB برابر $\frac{3}{5}$ و کسینوس زاویـهٔ ADC برابر $-\frac{3}{5}$ است. دایرهٔ به‌مرکز O ، برضلع‌های AB ، AD و BC مماس است. طول پاره‌خط BO را پیدا کنید.

۰۶ همهٔ عددهای غیرمنفی x را پیدا کنید که ، برای هر کـدام از آن‌ها ، بتوان از نابرابری

$$abx \geqslant 3a + 4b + x \quad (a \geqslant 0 \text{ و } b \geqslant 0)$$

نابرابری $aq \geqslant 2$ را نتیجه گرفت.

۱۹۸۰

گروه اول

۰۱ نامعادلهٔ $4^{-x} - 3 \times 7^{1+x} > 7$ را حل کنید.

۰۲ معادلهٔ $\frac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$ را حل کنید.

۰۳ معادلهٔ $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$ را حل کنید.

۰۴ اتومبیلی از کـوه بالا می‌رود. در ثانیهٔ اول بعداز رسیدن به نقطهٔ A ، ۳۰ متر و در ثانیه‌هـای بعد ، هر ثانیه ۲ متر کمتراز ثانیهٔ قبل جلو می‌رود. ۹ ثانیه بعداز رسیدن اتومبیل به‌نقطهٔ A ، اتوبوسی از نقطهٔ B ـ که در فاصلهٔ ۲۵۸ متری‌نقطهٔ A واقع است ـ در جهت عکس و به‌طرف اتومبیل‌حرکت می‌کند. اتوبوس ، درثانیهٔ اول ۲ متر جلو می‌رود و در ثانیه‌هـای بعدی ، هر ثانیه ۱ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل سرعت می‌گیرد. اتوبوس ، چه فاصله‌ای را طی کند تا به‌اتومبیل برسد؟

۰۵ نقطه‌هـای A ، A_1 ، B ، B_1 ، C ، C_1 ، روی سطح کره‌ای به شعاع ۱۱ سانتیمتر قراردارند. خط‌های راست AA_1 ، BB_1 ، CC_1 ، دو به‌دو برهم

عمودند و یکدیگر را درنقطهٔ M ، که به‌فاصلهٔ $\sqrt{59}$ سانتیمتر ازمرکز قرار دارد ، قطع می‌کنند. مطلوب است طول پاره‌خط AA_1 ، به‌شرطی که طول پاره‌خط BB_1 برابر ۱۸ سانتیمتر باشد و نقطهٔ M ، پاره‌خط CC_1 را ، به نسبت $(8+\sqrt{2}) : (8-\sqrt{2})$ تقسیم کند.

گروه دوم

۰۱ نامعادلهٔ $5^x - 5^{3-x} > 20$ را حل کنید.

۰۲ معادلهٔ $\frac{\sin 2x - 2\cos^2 x - 2}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0$ را حل کنید.

۰۳ معادلهٔ $x^2 - 4|x+1| + 5x + 3 = 0$ را حل کنید.

۰۴ دو دوچرخه‌سوار ، در یك مسیر مسابقه‌ای ، به فاصلهٔ ۴ ثانیه از یکدیگر، پشت سرهم حرکت کردند. دوچرخه‌سوار اول ، درنخستین ثانیه ۷/۰۵ متر و در ثانیه‌های بعد ، هر ثانیه ۰/۲ متر بیشتراز ثانیهٔ قبل حرکت می‌کرد. دوچرخه‌سوار دوم، که بعداز اولی حرکت‌کرده بود ، درثانیهٔ اول ۱۰/۲۵ متر و درثانیه‌های بعدی ، هر ثانیه ۰/۱ متر بیشتراز ثانیهٔ قبل جلو می‌رفت. درچه فاصله‌ای ازنقطهٔ حرکت اولیه ، دو دوچرخه‌سوار دوباره درکنار هم قرار می‌گیرند؟

۰۵ پاره‌خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 ، که وترهایی از یك کرهٔ به شعاع ۱۰ سانتیمتر هستند ، دو به‌دو برهم عمودند و درنقطهٔ M به‌هم می‌رسند. طول پاره‌خط AA_1 برابر ۱۲ سانتیمتر وطول پاره‌خط BB_1 برابر ۱۸ سانتیمتر است. فاصلهٔ مرکز کره تا نقطهٔ M را پیدا کنید ، به شرطی که نسبت طول پاره‌خط CM به طول پاره‌خط MC_1 ، برابر $\frac{11}{3}$ باشد.

گروه سوم

۰۱ نامعادلهٔ $9^x - 9^{1-x} > 8$ را حل کنید.

۰۲ معادلهٔ $\frac{2\sin^2 x - \cos 2x}{12x^2 - 4\pi x - \pi^2} = 0$ را حل کنید.

۰۳ معادلهٔ $x^2 - 2|x+1| - 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

۰۴ از نقطه‌های A و B ، دریك زمان و به‌طرف هم، اتومبیل و موتورسیکلت

حرکت کردند. اتومبیل در دقیقهٔ اول، ۱۸۰۰ متر و در دقیقه‌های بعد، هر دقیقه ۱۲۰ متر کمتراز دقیقهٔ قبل حرکت می کرد. موتورسیکلت، پنج دقیقهٔ اول را، دقیقه‌ای ۱۲۰ متر و در دقیقه‌های بعد، هردقیقه ۶۰ متر بیشتر از دقیقهٔ قبل جلومی‌رفت. اتومبیل بعداز چه‌فاصله‌ای به موتورسیکلت می‌رسد، به شرطی که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، برابر ۱۹/۵ کیلومتر باشد؟

۵. از نقطهٔ K واقع در داخل کره، سه خط راست دو به‌دو عمود برهم رسم کرده‌ایم. خط راست اول، کره را در نقطه‌های A و A_1، دومی در نقطه‌های B و B_1 و سومی در نقطه‌های C و C_1 قطع کرده است ضمناً، طول پاره‌خط AA_1 برابر ۲۲ سانتیمتر و طول پاره‌خط CC_1 برابر ۲۰ سانتیمتراست ونقطهٔ K، پاره‌خط BB_1 را به‌نسبت $(9+\sqrt{2}):(9-\sqrt{2})$ تقسیم می کند. شعاع کره را محاسبه کنید، به‌شرطی که نقطهٔ K از مرکز کره به‌فاصله $\sqrt{65}$ سانتیمتر باشد.

گروه چهارم

۱. نامعادلهٔ $3^{1+x}-3^{2-x}<26$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\frac{\cos 2x-\sin x}{12x^2+8\pi x+\pi^2}=0$ را حل کنید.

۳. معادلهٔ $x^2-6|x-2|-8x+11=0$ را حل کنید.

۴. موتورسیکلت سوار و دوچرخه سوار، در یك لحظه، از نقطه‌های A و B، به‌طرف یکدیگرحرکت کردند. موتورسیکلت سوار، در دقیقه‌اول ۴۵۰متر ودر دقیقه‌های بعد هردقیقه ۳۰ متر کمتراز دقیقهٔ قبل حرکت می کرد. دوچرخه‌سوار شش دقیقه اول باسرعت ۶۰ متر دردقیقه و دقیقه‌های بعد را، هردقیقه ۱۰ متر بیشتر از دقیقه قبل جلو می‌رفت. دوچرخه سوار چه مسافتی را بپیماید تا به موتورسیکلت سوار برسد، به شرطی که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B ۴۳۵۰ متر باشد؟

۵. روی‌سطح کرهٔ به‌شعاع ۹سانتیمتر، نقطه‌های L، L_1، M، M_1، N و N_1 واقع شده‌اند. پاره خط‌های LL_1، MM_1 و NN_1 دو به‌دو برهم عمودند و فاصلهٔ نقطهٔ A، نقطهٔ برخورد این سه پاره خط، تا مرکز کره، برابر $\sqrt{47}$ سانتیمتراست. اگر بدانیم که طول پاره‌خط LL_1 برابر ۱۶ سانتیمتر و طول پاره‌خط MM_1 برابر ۱۴ سانتیمتر است، نقطهٔ A به چه نسبتی

پاره‌خط NN_1 را قطع می‌کند؟

۱۹۸۱

گروه اول

۱. معادلهٔ $x^2-4x+|x-3|+3=0$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $3\log_3 x-\log_9 x=5$ را حل کنید.

۳. مساحت شکلی را پیدا کنید که روی صفحهٔ محورهای مختصات، به وسیلهٔ این دستگاه نامعادله‌ها، داده شده است.

$$\begin{cases} y\leqslant 6-2|x| \\ y\geqslant 2+2|x| \end{cases}$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin x\cdot \sin y=\frac{1}{4} \\ \\ 3\operatorname{tg} y=\operatorname{cotg} y \end{cases}$$

۵. برای تهیهٔ آمیزه‌ای از دو مایع A و B، دو ظرف در نظر گرفته‌ایم: اولی به گنجایش ۱۰ لیتر و دومی به گنجایش ۲۰ لیتر. ابتدا در هردو ظرف، روی هم، ۱۵ لیتر از مایع A را ریخته‌ایم. بعد ظرف اول را با مایع B پر کرده و خوب برهم زده‌ایم. سپس از مایع مخلوط ظرف اول در ظرف دوم ریخته‌ایم تا پر شود. وقتی که به ظرف اول به همان اندازهٔ دفعهٔ اول، از مایع A اضافه کردیم، نسبت مقدار مایع A به حجم کل مایعی که در هر ظرف وجود دارد، برای هردو ظرف، برابر بود. دفعهٔ اول چقدر از مایع A در ظرف اول ریخته‌ایم؟

۶. معادلهٔ $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $x^2-6x+|x-4|+8=0$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $6 \times 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \times 5^{x} = 22$ را حل کنید.

۳. مساحت شکلی را محاسبه کنید که در صفحهٔ مختصات، به‌وسیلهٔ دستگاه نامعادله‌های زیر داده شده است:

$$\begin{cases} y \leqslant 5 - 2|x| \\ y \geqslant 2 - \frac{1}{2}|x| \end{cases}$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \\ tg\, x \cdot cotg\, y = 1 \end{cases}$$

۵. برای آماده کردن آمیزه‌ای از دو مایع A و B، دو ظرف داریم که گنجایش هرکدام برابر ۱۵ لیتر است و درآن‌ها، روی هم ۱۵ لیتر از مایع A وجود دارد. بقیهٔ ظرف اول را، از مایع B ریخته‌ایم تا پرشود و خوب مخلوط کرده‌ایم. سپس، ازآمیزهٔ ظرف اول، در ظرف دوم ریخته‌ایم تا پر شود. سپس، از محلول حاصل درظرف دوم، ۶ لیتر درظرف اول ریخته‌ایم. معلوم شدکه، در این موقع، مقدار مایع A در ظرف اول، به‌اندازهٔ یک لیتر بیشتر ازمقدار مایع A در ظرف دوم می‌باشد. در ابتدا، چند لیتر از مایع A، درظرف دوم بوده است؟

۶. معادلهٔ $|x + \sqrt{1 - x^2}| = \sqrt{2}(2x^2 - 1)$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $x^2 + 4x + |x + 1| + 3 = 0$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $5\log_{\sqrt{5}} x - \log_5 x = 18$ را حل کنید.

۳. مطلوب است محاسبهٔ مساحت شکلی که در صفحهٔ مختصات با دستگاه نامعادله‌های زیر مشخص شده است:

$$\begin{cases} y \leqslant 4 - |x| \\ y \geqslant 1 + \frac{1}{2}|x| \end{cases}$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \cos y \cdot \cos x = -\frac{۱}{۴} \\ \\ tg\, y = cotg\, x \end{cases}$$

۵. دوظرف، اولی به گنجایش ۱۵ لیتر و دومی به گنجایش ۶لیتر، برای آمیختن دو مایع A و B درنظر گرفته‌ایم. ابتدا ۱۲ لیتراز مایعA را، در دوظرف، روی‌هم، ریخته‌ایم. سپس، ظرف کوچکتررا با مایعB پر کرده وبه‌هم زده‌ایم. بعد، ظرف بزرگتررا باآمیزهٔ حاصل درظرف کوچکتر، پر کرده‌ایم. آن‌وقت، به‌همان‌اندازهٔ باراول، ازمایعA در ظرف کوچکتر ریخته‌ایم. مطلوب است محاسبهٔ مقداری از مایع A که، ابتدا، درظرف اول ریخته‌ایم، به‌شرطی‌که نسبت مقدار مایع A نسبت به‌کل مایعی‌که در هریك از ظرف‌ها وجود دارد، برای هردو ظرف یکی باشد.

۶. معادلهٔ $\sqrt{\frac{۱-۴x\sqrt{۱-۴x^۲}}{۲}} = ۱-۸x^۲$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $x^۲+۶x+|x+۲|+۸=۰$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $۳\times ۷^{x+۱}+۷^{x+۲}+۳۰\times ۷^{x}=۱۲۰$ را حل کنید.

۳. مساحت شکلی را پیدا کنید که در صفحهٔ مختصات، با این دستگاه نامعادله‌ها داده شده‌باشد:

$$\begin{cases} y \leqslant ۵+۲|x| \\ y \geqslant ۳+۴|x| \end{cases}$$

۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = \frac{۳}{۴} \\ \\ cotg\, x \cdot tg\, y = ۳ \end{cases}$$

۵. ۱۶ لیتر از مایع A را دردو ظرف ــ که گنجایش هرکدام ۱۶ لیتر است ــ ریخته‌ایم. بعد، بقیهٔ ظرف اول را با مایع B پر کرده و به‌هم زده‌ایم.

بعد، از آمیزهٔ حاصل در ظرف اول، ظرف دوم را پر کرده‌ایم. اگر ۸ لیتر از آمیزهٔ ظرف دوم را درظرف اول بریزیم، مقدار مایع A درظرف اول، ۳ لیتر بیشتر از ظرف دوم می‌شود. برای آماده کردن آمیزه، ازچند لیتر مایع B استفاده کرده‌ایم؟

۶. معادلهٔ $|2x-\sqrt{1-4x^2}|=\sqrt{2}(8x^2+1)$ را حل کنید.

§۹. دانشکدهٔ زمین‌شناسی
(بخش زمین‌شناسی عمومی)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $5 \geqslant \dfrac{11\times 3^{x-1}-31}{4\times 9^{x}-11\times 3^{x-1}-5}$ را حل کنید.

۲. دو دونده، پشت سرهم و به‌فاصلهٔ ۲ دقیقه، آغاز به‌دویدن کردند. دوندهٔ دوم، در فاصلهٔ ۱ کیلومتری نقطهٔ آغاز حرکت، به‌دوندهٔ اول رسید و، بعد از آن که ۵ کیلومتر از نقطهٔ آغاز حرکت دور شد، بر گشت و ۲۰ دقیقه بعد از آغاز حرکت، دوباره به‌اولی رسید. سرعت دوندهٔ دوم را پیدا کنید.

۳. این معادله را حل کنید:

$$\sin^2 1/5x+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2/5x\right)=\sin^2 5/5x+$$

$$+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-6/5x\right)$$

۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نیمساز BE زاویهٔ قائمهٔ B، به‌وسیلهٔ نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، به‌نسبت $|BO|:|OE|=\sqrt{3}:\sqrt{2}$ تقسیم شده است. زاویه‌های حادهٔ مثلث را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a $(a>0)$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از

آن‌ها ، مساحت محصور به‌وسیلهٔ سهمی وخط راست زیر ، حداکثر مقدار ممکن باشد:

$$y=x^{۲}-۲x\sqrt[۳]{\frac{a}{۱+a^{۲}}}+۳،\quad y=-۳x\sqrt[۳]{\frac{a}{۱+a^{۲}}}+۳$$

۶. مطلوب است محاسبهٔ شعاع کرهٔ محیطی هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظمی که ضلع قاعدهٔ آن برابر b و زاویهٔ بین هر دو یال جانبی‌آن برابر α باشد.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $\frac{۲}{۳}\leqslant\frac{۴-۷\times۵^{x}}{۵^{۲x+۱}-۱۲\times۵^{x}+۴}$ را حل کنید.

۲. دو یخ‌باز به‌فاصلهٔ ۶ دقیقه از یکدیگر آغاز به‌حرکت‌کردند. دومی در ۲ کیلومتری نقطهٔ حرکت به‌اولی رسید . وقتی که دومی به ۵ کیلومتری نقطهٔ آغاز حرکت رسید، برگشت و در یك‌کیلومتری نقطهٔ برگشت به‌اولی‌رسید. سرعت یخ‌باز اول‌را پیدا کنید.

۳. این‌معادله را حل کنید:

$$\cos ۳x+\sin ۷x=۲\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۵x}{۲}\right)-۲\cos^{۲}\frac{۹x}{۲}$$

۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، نیمساز AP زاویهٔ حادهٔ A به‌وسیلهٔ نقطهٔ O،مرکزدایرهٔمحاطی‌مثلث،به‌نسبت$|AO|:|OP|=(\sqrt{۳}+۱):(\sqrt{۳}-۱)$ تقسیم می‌شود. زاویه‌های حادهٔ مثلث را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a $(a>۰)$ را پیدا کنیدکه، به‌ازای هرکدام از آن‌ها ، مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های زیر ، حداکثر مقدار ممکن باشد:

$$y=(۱+a^{۲})^{۲}x^{۲}،\quad y=a$$

۶. درکرهٔ به‌شعاع R هرم منتظم با قاعدهٔ مربع را محاط‌کرده‌ایم. زاویهٔ بین یال جانبی هرم با ضلع قاعدهٔ آن برابر است با α . مساحت سطح جانبی هرم را پیدا کنید.

گروه سوم

۱. نامعادلهٔ $3 \leqslant \dfrac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^{x}-14}$ را حل کنید.

۲. دو شناگر در استخری بـه طول ۵۰ متر، از یك نقطه بـا یك فاصلهٔ زمانی، پشت سرهم حرکت کردند. شناگر دوم ،کـه با سرعت ۱/۵ متر در ثـانیه حرکت می‌کند، ۲۱ متر بعد از نقطهٔ حرکت به‌اولی رسید، سپس تاانتهای استخرشنا کرد و $\frac{2}{3}$ ثانیه بعداز برگشت دوباره به شناگر اول رسید. فـاصلهٔ زمانی بین آغاز حرکت دو شناگر را پیدا کنید.

۳. این معادله را حل کنید.

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=1+\sin 4x+2\sin 5x \cdot \cos^2 x$$

۴. در مثلث ABC ، نیمساز AP ، زاویهٔ A ، به‌وسیلهٔ نقطـهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ، به نسبت $|AO|:|OP|=\sqrt{3} : 2\sin\frac{5\pi}{18}$ تقسیم شده است. اگر زاویهٔ A برابر $\frac{5\pi}{9}$ باشد ، اندازهٔ زاویه‌های B و C را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر p $(p>0)$ را پیدا کنید ، به نحوی که.به ازای هر کدام از آن‌ها ، مساحت محدود به سهمی و خط راست زیر، بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$y=x^2+x\sqrt[3]{\frac{p}{1+p^2}}+1 \quad \text{و} \quad y=2x\sqrt[3]{\frac{p}{1+p^2}}+1$$

۶. زاویهٔ بین قاعده و وجه جانبی هرم مثلث القاعدهٔ منتظمی، برابر است با α. شعاع کرهٔ محیطی هرم برابر است با R. سطح کل هرم را پیدا کنید.

گروه چهارم

۱. نامعادلهٔ $2 \geqslant \dfrac{15-2\times 13^{x+1}}{6\times 13^{2x}-13^{x+1}+6}$ را حل کنید.

۲. از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B ، که فاصلهٔ بین آن‌ها برابر ۷۰ کیلومتر است ، دوچرخه سواری حرکت کرد ؛ بعداز مدتی موتورسیکلت سواری به دنبال او با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت به راه افتاد. موتورسیکلت سوار، در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری نقطهٔ A به دوچرخه سوار رسید. موتورسیکلت سوار راه خود را ادامه داد و وقتی که به B رسید ، بعداز یك توقف ۴۸ دقیقه‌ای به طرف نقطهٔ A برگشت و ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه بعداز حرکت دوچرخه‌سوار از نقطهٔ A ، به‌او رسید. سرعت دوچرخه سوار را پیدا کنید.

۳. این معادله را حل کنید:

$$cos^{2}\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)=sin^{2}cos9x+cos^{2}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)$$

۴. در مثلث ABC ، نسبت نیمساز AE به شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ، برابر است با $(\sqrt{2}-1):\sqrt{2}$. زاویه‌های B و C را محاسبه کنید ، به شرطی که زاویهٔ A برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد.

۵. پارامتر p $(p>0)$ را طوری پیدا کنید که مساحت شکل محدود به نمودار تابع‌های زیر، حداکثر مقدار ممکن باشد:

$$y=-(1+p^{2})^{2}\times 2+p \quad و \quad y=0$$

۶. یال جانبی هرم منتظم مثلث‌القاعده برابر است با b. شعاع کرهٔ محیطی هرم برابر است با R. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sqrt{2}sin x+cotg x=0$ را حل کنید.

۲. دوچرخه سواری ، از مرکز A به طرف مرکز B حرکت کرد ؛ ربع ساعت بعداز او اتومبیلی به‌دنبال او به‌راه افتاد. اتومبیل در وسط راه بین A تا B، به دوچرخه سوار رسید. و وقتی که اتومبیل به B رسید ، دوچرخه سوار هنوز ثلث راه را در پیش رو داشت. دوچرخه سوار فاصلهٔ A تا B را در چه مدتی طی می کند، به‌شرطی که بدانیم سرعت دوچرخهٔ سوار و اتومبیل، در تمام فاصله از A تا B ، مقدار ثابتی بوده، است؟

۳. حداقل مقدار تابع زیر را ، دربازهٔ [۱ ، ۵] ، پیدا کنید.

$$y(x)=x\cdot \ln x-x\cdot \ln ۵$$

۴. در مثلث ABC ، طول ضلع AC برابر ۳ ، $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{۶}$ و شعاع دایرهٔ محیطی برابر ۲ می‌باشد. ثابت کنید مساحت مثلث ABC ، از ۳ کمتر است.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که ، به‌ازای هر کدام ازآن‌ها، دست‌کم یك مقدار x وجود داشته باشد که در شرطهای زیر صدق کند:

$$\begin{cases} x^۲+(۵a+۲)x+۴a^۲+۲a<۰ \\ x^۲+a^۲=۴ \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $\log_x \frac{۲x+\frac{۲}{۵}}{۵(۱-x)}>۰$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\cos x-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,tg\,x=۰$ را حل کنید.

۲. پیاده‌ای از A به طرف B به‌راه افتاد. $\frac{۳}{۴}$ ساعت بعداز او، دوچرخه سواری از A به طرف B حرکت کرد. وقتی که دوچرخه‌سوار به B رسید ، پیاده هنوز $\frac{۳}{۸}$ راه را در پیش داشت. اگر دوچرخه سواردر وسط راه ازA تا B به پیاده رسیده باشد و ، ضمناً ، سرعت آن‌هـا ، در تمام مسیر مقدار ثابتی باشد ، ببینید پیاده ، برای رسیدن از A به B ، به‌چه زمانی نیاز دارد؟

۳. کمترین مقدار این تابع را ، در بازهٔ [۱ ، ۴] ، پیدا کنید:

$$y(x)=\frac{۱}{۲}x\cdot \ln x-x\cdot \ln ۲$$

۴. در مثلث ABC ، طول ضلع AB برابر ۴ ، $\widehat{CAB}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ و شعاع دایرهٔ محیطی برابر ۲/۲ است. ثابت کنید که طول ارتفاع‌وارد ازراس C برضلع AB ، از $\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۵}$ کمتر است.

۵. مقدارهایی از پارامتر a را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها، دست‌کم یك مقدار x پیدا شود که با شرط‌های زیر سازگار باشد:

$$\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0 \\ ax=1 \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $\log_x \frac{4x+1}{6(x-1)}<0$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\cos x+\sin x-\frac{1}{4}=0$ را حل کنید.

۲. قطار مسافری از مرکز A به طرف مرکز B حرکت کرد. سه ساعت بعد، قطار سریع‌السیر، از A به سمت B، به‌دنبال او به راه افتاد. قطار سریع‌السیر، در وسط راه A تا B به قطار مسافری رسید. وقتی که قطار سریع‌السیر به B رسید، قطار مسافری $\frac{13}{16}$ راه را طی کرده بود. قطار مسافری، برای پیمودن مسیر از A تا B، به‌چه زمانی نیاز دارد، به‌شرطی که‌سرعت حرکت هردو قطار، ثابت باشد؟

۳. حداقل مقدار تابع زیر را، در بازهٔ [۳ ، ۱]، پیدا کنید:

$$y(x)=\frac{1}{3}x\cdot\ln x-\frac{1}{6}x\cdot\ln 9$$

۴. در مثلث ABC، طول ضلع AB برابر ۵، $\widehat{CAB}$ برابر $\frac{\pi}{6}$ و شعاع دایرهٔ محیطی برابر $2\sqrt{2}$ می‌باشد. ثابت کنید، مساحت مثلث ABC از $5\sqrt{2}$ کمتر است.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، دست‌کم یك مقدار برای x پیدا شود که در شرط‌های زیر صدق کند.

$$\begin{cases} x^2-(3a+1)x+3a^2+2a<0 \\ x+a^2=0 \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)}>0$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $4\sin^2 x-4\cos x-1=0$ را حل کنید.

۲. کشتی از بندر A به سمت بندر B حرکت کرد. $۷\frac{۱}{۲}$ ساعت بعد، قایق موتوری به دنبال او از A به راه افتاد. قایق موتوری در وسط راه از A تا B به کشتی رسید. وقتی که قایق موتوری به B رسید، کشتی هنوز $\frac{۳}{۱۰}$ راه را باقی داشت. کشتی، برای رسیدن از A به B، به چه زمانی احتیاج دارد، به شرطی که سرعت کشتی و قایق موتوری در تمام مسیر، ثابت باشد؟

۳. حداقل مقدار این تابع را، در بازهٔ [۱ ، ۷]، پیدا کنید:

$$y(x) = ۲x \cdot \ln x - x \cdot \ln ۴۹$$

۴. در مثلث ABC، طول ضلع AB برابر ۴، $\widehat{CAB}$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ و شعاع دایرهٔ محیطی برابر ۳ می‌باشد. ثابت کنید، طول ارتفاع وارد از رأس C بر ضلع AB، از ۳ کمتر است.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، دست کم یك مقدار x وجود داشته باشد که با شرط‌های زیر بسازد:

$$\begin{cases} x^{۲}+\left(۱-\frac{۳}{۲}a\right)x+\frac{a^{۲}}{۲}-\frac{a}{۲}<۰ \\ x=a^{۲}-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۶. نامعادلهٔ $\log_{۲}\frac{۲x+۵}{۴(x-۱)}<۰$ را حل کنید.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. معادلهٔ $|۲x-۳|=۳-۲x$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\log_{۲}(x-۱)+\log_{۲}x=۱$ را حل کنید.

۳. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \sqrt{2}y+\sqrt{12}\,\mathrm{cotg}\,x=4 \\ 2\sqrt{2}y-\sqrt{27}\,\mathrm{cotg}\,x=1 \end{cases}$$

۴. ماشین خاک‌برداری، سفارشی برای کندن دو خندق، با یک عمق، در دو زمین مختلف دریافت کرد. ماشین ابتدا به خاک‌برداری از زمین اول به طول ۵ متر پرداخت و، سپس، سراغ زمین دوم به طول ۳ متر رفت. زمانی که ماشین برای آماده‌کردن خندق اول صرف کرد، ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه کمتر از زمانی بودکه برای جابه‌جا شدن‌ماشین وکندن خندق دوم لازم بود. اگر قدرت کار ماشین برابر $\frac{1}{4}$ قدرت کار فعلی آن بود، آن وقت، زمانی که برای کندن خندق اول لازم داشت، با زمان انتقال آن از یک خندق‌به‌خندق دیگر برابر می‌شد. ببینید، این ماشین خاک‌برداری، درهرساعت چه طولی از خندق را می‌تواند خاک برداری کند؟

۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، قاعدهٔ هرم $SABC$ را تشکیل داده است. طول ضلع مثلث قاعده، برابر است با $\sqrt{3}$. نقطهٔ O، پای ارتفاع وارد ازرأس S برقاعده، در درون مثلث ABC قراردارد. فاصلهٔ‌نقطهٔ O ازضلع AC، برابراست با ۱. نسبت سینوس‌زاویهٔ OBA برسینوس زاویهٔ OBC برابر است با ۱ : ۲. مساحت وجه SAB برابـر $\sqrt{\frac{5}{6}}$ است. حجم هـرم را پیدا کنید.

۶. پارامتر α را طوری پیدا کنید که معادلهٔ زیـر، یک جواب منحصر داشته باشد:

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{9\sqrt{3}}{\sin\alpha}+36=0$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $4-5x=|5x-4|$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$ را حل کنید.

۳. دستگاه دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} y+\sin x=5 \\ 4y+2\sin x=19 \end{cases}$$

۴. ماشین حفاری، در نقطهٔ A، مشغول حفاری یک چاه نفت به عمق ۱۸۰۰ متر شد؛ سپس، به سمت نقطهٔ B حرکت کرد تا، در آن‌جا، چاهی به‌عمق ۷۵۰ متر را حفر کند. ماشین، برای حفر چاه اول، یک ماه بیشتر از زمان لازم برای جابه‌جا شدن از A به B وحفر چاه دوم، وقت صرف کرد. اگر ماشین، در نقطهٔ A، با سرعت دو برابر کار می‌کرد، آن وقت، زمان لازم برای حفاری چاه اول، برابر با زمانی می‌شد که برای جابه‌جا شدن ماشین A به B لازم است. سرعت کار ماشین حفاری را، برحسب متر، در یک ماه پیدا کنید.

۵. مثلث‌متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$، قاعدهٔ هرم $SABC$ را تشکیل می‌دهد. نقطهٔO، پای ارتفاع وارد از رأس S، بر قاعدهٔ هرم، در درون مثلث ABC قراردارد. فاصلهٔ نقطهٔO تا ضلع‌های AB، BC وCA، به‌ترتیب، برنسبت ۳ : ۱ : ۲ شده است. مساحت وجه SAB برابر است با $\sqrt{\frac{۱۵}{۲}}$. طول ارتفاع هرم را پیدا کنید.

۶. به ازای چه مقدارهایی از α، معادلهٔ زیر، دارای یک جواب منحصر به‌فرد می‌شود:

$$x^{۲}+\frac{۲x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{۱}{\cos\alpha}+۲\sqrt{۲}=۰$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $۵-۳x=|۳x-۵|$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\log_{۲}(x+۱)+\log_{۲}x=۱$ را حل کنید.

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases}۳y+۲\,tg\,x=۴\\ ۲y+۳\,tg\,x=۱\end{cases}$$

۴. دانش‌آموز، در ایستگاه A از تراموا پیاده شد و پیاده به مدرسه رفت. اگر او تا ایستگاه B با تراموا و، سپس، از B تا مدرسه پیاده می‌رفت، یک دقیقه وقت‌کمتر صرف‌می‌کرد. ولی، اگر دانش‌آموز، سرعت پیاده‌روی خودرا از A تامدرسه، دو برابر کند، برای رسیدن به‌مدرسه، به‌همان‌زمانی نیاز داردکه برای رسیدن تراموا از A به B لازم است. سرعت پیاده‌روی

دانش‌آموز را پیدا کنید، به شرطی که فاصلهٔ A تا مدرسه ۳۰۰متر و فاصلهٔ B تا مدرسه ۱۰۰متر باشد.

۵. قاعدهٔ هرم $SABC$، عبارت است از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، که طول ضلع آن برابر است با ۱. پای ارتفاع وارد از رأس S برقاعدهٔ هرم، یعنی نقطهٔ O، در درون مثلث ABC قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ O تا ضلع CA، برابر است با $\sqrt{\frac{3}{4}}$ و نسبت فاصلهٔ نقطهٔ O از ضلع AB، به‌فاصلهٔ نقطهٔ O از ضلع BC برابر است‌با ۴ : ۳ مساحت وجه SBC برابر $\sqrt{\frac{61}{28}}$ است. حجم هرم را پیدا کنید.

۶. به ازای چه مقدارهایی از α، معادلهٔ زیر، یك جواب منحصر دارد.

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos\alpha}+12\sqrt{3}=0$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $|4x-7|=7-4x$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $\lg x+\lg(x-3)=1$ را حل کنید.

۳. این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} 4y+\sqrt{3}\cos x=-\frac{1}{2} \\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1 \end{cases}$$

۴. هواپیما، در یك پرواز آزمایشی، روی یك مسیر بستهٔ مثلثی است:

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & C & \end{array}$$

روی مسیر AB با سرعت v کیلومتر در ساعت، و روی میسرهای BC و CA با سرعت w کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. در پرواز از C تا A، ۲ ساعت کمتر از پرواز A تا C-روی مسیر-صرف می‌کنند. اگرسرعت هواپیماروی پاره‌خط CA ثلث‌سرعت فعلی‌آن بودآن‌وقت، زمان پرواز از C تا A برابرزمان پرواز ازA تا B (باسرعت v کیلومتر درساعت) می‌شد.

مطلوب است مقدار سرعت w ، به شرطی‌که فاصلهٔ از B تا C برابر ۸۰۰ کیلومتر و فاصلهٔ از C تا A برابر ۵۰۰ کیلومتر باشد.

۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، با طول‌ضلع برابر ۲، قاعدهٔ هرم SABC را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع وارد از رأس S بر قاعدهٔ هرم، در درون مثلث ABC قراردارد. می‌دانیم ، نسبت سینوس زاویهٔ OAB بر سینوس زاویهٔ OAC، برابر است با نسبت ۳ : ۲ ونسبت سینوس‌زاویهٔ OCB برسینوس زاویهٔ OCA برابر است با نسبت ۳ : ۴. مساحت‌وجه SAB برابر $\sqrt{\frac{۱۳}{۳}}$ است. طول ارتفاع هرم را پیداکنید.

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر α را پیداکنید، که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، معادلهٔ زیر دارای تنها یك جواب باشد:

$$x^{۲}-\frac{۲x}{\sqrt{\sin\alpha}}-\frac{۱}{\cos\alpha}-۲\sqrt{۲}=۰$$

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sin ۲x = ۲\sqrt{۳}\cos^{۲}x$ را حل کنید.

۲. محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیداکنیدکه فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی‌آن، تا وتر به‌طول ۲ سانتیمتر از همان دایره، برابر ۳ سانتیمتر باشد.

۳. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{۲}(x^{۲}+y^{۲})=۵ \\ ۲\log_{۴}x+\log_{۲}y=۴ \end{cases}$$

۴. مغازهٔ وسیله‌های الکتریکی، درنخستین روزکار ماه، ۱۰۵ تلویزیون‌فروخت. هرروزکاری بعد، روزانه ۱۰ تلویزیون نسبت به‌روز قبل بیشتر فروخت و برنامهٔ فروش ماهانهٔ خودرا ــ که ۴۰۰۰ تلویزیون بود ــ درجائی تمام‌کرد. از آن‌جا به بعد، هرروز ۱۳ تلویزیون کمتر از آخرین روز اجرای برنامهٔ ماهانه فروخت. اگر در هرماه، ۲۶ روزکار وجود داشته باشد، این مغازه ، چند درصد بیشتر از برنامهٔ اصلی خود، تلویزیون فروخته است.

۵. مساحت شکلی را پیدا کنیدکه، در صفحهٔ مختصات، با این شرط‌ها مشخص

شده است:

$$\begin{cases} ||x-y|-|y-1||=x-2y+1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1 \end{cases}$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sin 2x+2\sin^2 x=0$ را حل کنید.

۲. مطلوب است مساحت شش‌ضلعی منتظمی که بردایره‌ای محیط شده است، به‌شرطی که فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر به‌طول ۴ سانتیمتری آن، برابر ۵ سانتیمتر باشد.

۳. این دستگاه معادله را حل کنید:

$$\begin{cases} 3^{x^2+y^2}=81 \\ \log_2 x+2\log_4 y=1 \end{cases}$$

۴. شیرینی‌پزی، روز اول کار ماه، ۱۰۰ جعبه شیرینی تازه درست کرد. سپس، هرروز ۵ جعبه بیشتر از روز پیش آماده و قبل از پایان ماه، ۳۱۵۰ جعبه شیرینی، برنامهٔ ماهانهٔ خود راآماده کرده بود. ازآن به‌بعد، در هرروزکار، ۱۱ جعبه کمتر ازآخرین‌روز پایان اجرای برنامهٔ خود، شیرینی تهیه کرد. اگر ماه دارای ۲۴ روزکارباشد، این شیرینی‌پز، چند درصد بیش ازبرنامهٔ ماهانهٔ خود، شیرینی پخته است؟

۵. مساحت شکلی را پیدا کنید که، در صفحهٔ مختصات، با این شرط‌ها داده شده باشد:

$$\begin{cases} ||x-y|-|y+1||=2y-x+1 \\ (x+1)^2+(y+1)^2\leqslant 2 \end{cases}$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\frac{1}{2}\sin 2x-\cos^2 x=0$ را حل کنید.

۲. وتری با طول ۲ سانتیمتر در دایره‌ای، از مرکز آن به‌فاصلهٔ ۳ سانتیمتر قراردارد. ضلع مربع محاط در این دایره‌را پیدا کنید.

۳. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۳\log_{۲۷}x + ۲\log_{۹}y = ۳\log_{۳}۲ \\ x^{۲}+y^{۲}=۲۰ \end{cases}$$

۴. طبق برآورد دایرهٔ حفاظت از محیط زیست، می‌بایستی در فاصلهٔ ۲۶سال– از سال ۱۹۵۴ تا سال ۱۹۷۹–۴۰۰۰ گوزن از ناحیه‌های دیگری که برای شکار آزاد است، به‌منطقهٔ ممنوع و حفاظت‌شده مهاجرت کنند . در واقع ، در سال ۱۹۵۴ ، ۱۰۵ گوزن به‌این منطقه مهاجرت کرد و در سال‌های بعد ، هرسال ۱۰ گوزن مهاجر بیشتر از تعداد سال قبل‌آن بود تا این‌که تعداد گوزن‌های مهاجر به ۴۰۰۰ پیش‌بینی شده رسید . در سال‌های بعد از آن ، تا پایان سال ۱۹۷۹ ، تعداد گوزن‌های مهاجر در هرسال، ۱۳ عدد کمتر از تعداد مهاجران سال حداکثر مهاجرت بود . در این ۲۶ سال ، چند درصد بیشتر از پیش‌بینی اولیه ، مهاجرت گوزن‌ها به‌منطقهٔ حفاظت شده، افزوده شده است؟

۵. مساحت شکلی را پیدا کنید که ، در صفحهٔ مختصات ، با این‌شرط‌ها داده شده باشد:

$$\begin{cases} \big||x-y|-|y-۲|\big| = x-۲y+۲ \\ (x-۲)^{۲}+(y-۲)^{۲} \leqslant ۳ \end{cases}$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\sin ۲x = ۲ - ۲\cos^{۲}x$ را حل کنید.

۲. مرکز دایرهٔ محیطی یك‌شش ضلعی منتظم، از ضلع آن به‌چه فاصله‌ای است ، اگر بدانیم که مرکز همین دایره از وتر آن‌که طولی برابر ۳ سانتیمتر دارد، به‌فاصلهٔ ۰/۵ سانتیمتر قرار گرفته است؟

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} ۴^{\log_{۲}(x^{۲}+y^{۲})} = ۳۶ \\ \log_{۲}x+\log_{۲}y = \log_{۴}۵ \end{cases}$$

۴. بنابر پیش‌بینی جامعه‌شناسان ، در فاصلهٔ سال‌های از ۱۹۵۶ تا ۱۹۷۹ ، باید ۳۱۵۰ ازدواج انجام می‌گرفت. در واقع، در سال ۱۹۵۶، ۱۰۰ ازدواج انجام شد. ولی در سال‌های بعد، هرسال ۵ ازدواج بیش ازسال قبل انجام شد تا به‌مرز برآورد قبلی ۳۱۵۰ ازدواج رسید . از آن به‌بعد ، تعداد

ازدواج‌های هرسال ۱۱ عدد کمتر از سالی بودکه رکورد تعداد ازدواج‌ها را شکسته بود. در این ۲۶ سال ، چند درصد، نسبت به تعداد پیش‌بینی شده، ازدواج صورت گرفته است؟

۵. مساحت شکلی را پیدا کنید که، در صفحهٔ مختصات ، به‌وسیلهٔ شرط‌های زیر داده شده باشد:

$$\begin{cases} ||x-y|-|x-۱||=y-۲x+۱ \\ (x-۱)^۲+(y-۱)^۲\leqslant ۴ \end{cases}$$

۱۹۸۱

گروه اول

۱. معادلهٔ $۳\times ۲^{x+۱}+۵\times ۲^{x}-۲^{x+۲}=۲۱$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $۳\sin^۲x-\cos^۲x-۱=۰$ را حل کنید.

۳. فاصلهٔ بین دو شهر را ، قطار سریع‌السیر ، ۴ ساعت زودتر از قطار باری و ۱ ساعت زودتر از قطار مسافری طی می‌کند. سرعت قطار باری و قطار سریع‌السیر را پیدا کنید، به‌شرطی که سرعت قطار باری $\frac{۵}{۸}$ سرعت قطار مسافری و ۵۰ کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت قطار سریع‌السیر باشد.

۴. مساحت شکلی را پیدا کنید که، در صفحهٔ مختصات، باشرط $|x|+|y-۱|\leqslant ۴$ داده شده باشد.

۵. چهارضلعی محدب ABCD در دایره‌ای محاط شده‌است. قطر AC، نیمساز زاویهٔ BAD است و قطر BD را در نقطهٔ K قطع می‌کند. طول پاره‌خط KC را پیدا کنید، به‌شرطی که طول پاره‌خط AK برابر ۶ و طول پاره‌خط BC برابر ۴ باشد.

۶. ثابت کنید که تابع

$$y(x)=\sin^۲x-۱۲\sin x\cos x+۳\cos^۲x-۲\sqrt[۴]{۶۶}$$

می‌تواند مقدارهای غیر منفی را قبول کند.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $log_2 x - log_{16} x = 3$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $5sin^2 x = 2 - cos^2 x$ را حل کنید.

۳. برای آماده کردن یک‌تونل، سه گروه‌کارگر در سه‌نوبت‌کار می‌کنند؛ میزان کارگروه‌ها، یکی است. سرعت حفر تونل درنوبت دوم ۱/۲ برابر سرعت حفر در نوبت اول است و در نوبت سوم، ساعتی ۰/۶ متر بیشتر ازنوبت دوم‌کار انجام می‌شود. کارگران نوبت‌دوم،کارخودرا درزمانی که یک‌ساعت کمتر از زمان اتمام‌کار به‌وسیلهٔ‌کارگران نوبت اول بود، انجام دادند؛ و کارگران نوبت سوم، نیمی ازکل برنامهٔ خود را ۳ ساعت سریع‌تر از تمام برنامهٔ گروه دوم به‌پایان رساندند. کارگران نوبت اول، هرساعت چند متر از تونل را حفر می‌کنند؟

۴. مساحت شکلی را پیدا کنید که، در صفحهٔ مختصات، به‌وسیلهٔ شرط $|x - 2| + |y| \leqslant 2$ داده شده است.

۵. در چهارضلعی محدب MNPQ، قطر NQ نیمساز زاویهٔ PNM است و قطر PM را در نقطهٔ S قطع می‌کند. طول پاره‌خط NS را پیدا کنید، به‌شرطی که چهارضلعی ما، یک چهارضلعی محاطی باشد و طول پاره‌خطهای PQ و SQ، به‌ترتیب، برابر ۱۲ و ۹ باشد.

۶. ثابت کنیدکه تابع زیر، تنها مقدارهای مثبت را قبول می‌کند.

$$y(x) = sin^2 x - 14 sin x cos x - 5 cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $4 \times 3^{x+2} + 5 \times 3^x - 7 \times 3^{x+1} = 40$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $2sin^2 x - 3 = -6cos^2 x$ را حل کنید.

۳. سه‌اتومبیل مسابقه‌ای بامارک‌های مختلف، در یک‌لحظه آغاز به‌حرکت کردند. اتومبیل اول، به‌خاطر خراب‌شدن اتومبیل دربین راه، ۳ ساعت ازوقت خود را از دست داد و، در نتیجه، یک‌ساعت بعد ازاتومبیل دوم، به‌مقصد رسید. مطلوب است سرعت اتومبیل‌ها، به‌شرطی که نسبت سرعت اتومبیل دوم به‌سرعت اتومبیل سوم برابر است بانسبت ۴:۵ و سرعت اتومبیل دوم، ۳۰ کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت اتومبیل اول باشد. ضمناً می‌دانیم که بین

رسیدن اتومبیل‌های دوم و سوم، به‌انتهای خط، ۳ ساعت فاصلهٔ زمانی بوده است.

۴. مساحت شکلی را پیدا کنید که، در صفحهٔ مختصات، باشرط $|x|+|۲-y|\leqslant ۳$ مشخص شده باشد.

۵. قطرهای چهارضلعی محدب $ABCD$، که در دایره‌ای محاط شده است، در نقطه E یکدیگر را قطع کرده‌اند. مطلوب است طول پاره‌خط BE، به‌شرطی که بدانیم، قطر BD نیمساز زاویهٔ ABC است و طول پاره‌خطهای BD و CD، به‌ترتیب برابرند با ۲۵ و ۱۵.

۶. ثابت کنید که تابع

$$y(x)=۳\sin^۲x+۱۶\sin x\cos x+\cos^۲x+۲\sqrt[۴]{۴۴}-۱$$

می‌تواند مقدارهای غیرمثبت را قبول کند.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $۷\log_{۲۵}x-\log_۵x=۵$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $۸\sin^۲x-۷\cos^۲x=۸$ را حل کنید.

۳. سه‌کارگر، هریک پشت دستگاه خود به‌تهیهٔ قطعه‌هایی مشغول‌اند، تعداد قطعه‌ها و نوع آن‌ها، برای هرسه‌کارگر یکی است و، ضمناً، هرسه‌کارگر در یک لحظه شروع به‌کار کرده‌اند، کارگر دوم، ۱/۵ ساعت زودتر از کارگر سوم و ۱ ساعت دیرتر از کارگر اول، کار خود را تمام کرد. مطلوب است تعداد قطعه‌هایی که هرکارگر می‌تواند در یک‌ساعت تهیه کند، به‌شرطی که قدرت‌کار گر اول ۱/۲ برابر قدرت‌کار دومی باشد و کارگر سوم، درهرساعت ۲ قطعه کمتر از کارگر دوم تهیه کند.

۴. مساحت شکلی را پیدا کنید که، درصفحهٔ مختصات، باشرط $|۳-x|+|y|\leqslant ۱$، داده شده باشد.

۵. قطر MP از چهارضلعی محدب $MNPQ$، نیمساز زاویهٔ MNQ است و قطر NQ را در نقطهٔ T قطع می‌کند؛ ضمناً، چهارضلعی قابل محاط در یک‌دایره‌است. طول پاره‌خط NP را پیدا کنید، به‌شرطی که طول پاره‌خط MT برابر ۵ وطول پاره‌خط TP برابر ۴ باشد.

۶. ثابت کنید، تابع

$$y(x)=۲\sin^۲x+۱۲\sin x\cos x+۴\cos^۲x-۵\sqrt[۴]{۶}$$

تنها مقدارهای منفی را قبول می‌کند.

§ ۱۰. دانشکدهٔ اقتصاد
(بخش اقتصاد سیاسی)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. دو گروه باید بارکشتی را تخلیه‌کنند. اگر زمانی‌راکه برای تخلیهٔ بارکشتی تنها به‌وسیلهٔ گروه اول لازم است، به زمـان لازم برای تخلیه‌کشتی به‌وسیلهٔ تنها گروه‌دوم، اضافه‌کنیم، ۱۲ ساعت به‌دست می‌آید. این‌زمان‌هارا پیداکنید، به‌شرطی‌که تفـاضل این‌دو زمان، برابر ۴۵٪ زمانی بـاشد که برای تخلیهٔ بارکشتی به‌وسیلهٔ دو گروه باهم، لازم است.

۲. معادلهٔ $۸\sin^۴ x + ۱۲\cos ۲x = ۷$ را حل کنید.

۳. کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۰، -۲)$ را تانقطهٔ $(x، y)$ پیداکنید، به‌شرطی‌که

$$y = \frac{۱۶}{\sqrt{۳}x^۲} - ۲ \text{ و } x > ۰$$

۴. در چهارضلعی محدب $ABCD$، نقطه‌های E، F، H و G، به‌ترتیب، وسط پـاره‌خط‌های AB، BC، CD و AD هستند و O، نقطهٔ برخورد پـاره‌خط‌هـای EH و FG است. می‌دانیم: $|EH| = a$، $|FG| = b$ و $\widehat{FOH} = \frac{\pi}{۳}$. طول قطرهای چهارضلعی $ABCD$ را پیداکنید.

۵. همهٔ‌مقدارهای پارامتر a را پیداکنیدکه، به‌ازای‌هرکدام ازآن‌ها، نابرابری

$$۲۵y^۲ + \frac{۱}{۱۰۰} \geqslant x - axy + y - ۲۵x^۲$$

برای هرزوج عدد $(x، y)$، باشرط $|x| = |y|$ برقرار باشد.

۶. همهٔ عددهـای مثبت x و y را پیداکنید کـه در دستگاه معـادله‌هـای زیر صدق کنند.

$$\begin{cases} x^{y+4x}=y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)} \\ x^{2}=y^{-1} \end{cases}$$

۷: همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام‌ازآن‌ها، نامعادلهٔ

$$3-|x-a|>x^{2}$$

دست‌کم دارای یک‌ریشهٔ منفی باشد.

گروه دوم

۱. دوچرخه‌سوار و اتوبوس، از نقطه‌های A و B، در یک زمان به‌طرف یکدیگر حرکت‌کردند. دوچرخه‌سوار، برای رسیدن از A به B، ۲ ساعت‌و ۴۰ دقیقه بیشتر از اتوبوس، برای رسیدن از B به A، وقت لازم دارد؛ و مجموع این‌دو زمان $5\frac{1}{3}$ برابر زمانی است که دوچرخه‌سوار، از آغاز حرکت تا لحظه برخورد با اتوبوس، صرف می‌کند. دوچرخه‌سوار، برای رسیدن از A به B و اتوبوس برای رسیدن از B به A، به‌چه‌زمانی نیاز دارند.

۲. معادلهٔ $2\cos^{4}x+1=3\cos 2x$ را حل کنید.

۳. کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(2 , 0)$ را تا نقطه‌ای از نمودار تابع $y(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27\sqrt{(x-2)}}}$ پیدا کنید.

۴. در چهارضلعی محدب $ABCD$، طول قطرهای AC و BD، به‌ترتیب، برابرند با a و b. نقطه‌های E، F، G و H را، به‌ترتیب، وسط‌ضلع‌های AB، BC، CD و DA می‌گیریم. مساحت چهارضلعی $EFGH$ برابر است با S. طول قطرهای EG و HF از چهارضلعی $EFGH$ را پیدا کنید.

۵. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، برای هریک ازآن‌ها، نابرابری

$$16x^{2}+axy-y\geqslant x-16y^{2}-\frac{1}{64}$$

برای هرزوج عدد (x , y)، با شرط $|x|=|y|$ برقرار باشد.

۶. همهٔ مقدارهای مثبت x ، y را ، که در دستگاه معادله‌های زیر صدق می‌کنند، به‌دست‌آورید:

$$\begin{cases} y^{\frac{۱}{۲}} = x^{-۱} \\ (xy)^{x} \cdot x^{-y} = y^{\frac{۲۸x-۷y}{۲}} \end{cases}$$

۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که نامعادلهٔ زیر، دست‌کم، یک‌جواب مثبت داشته‌باشد:

$$۲ > |x+a| + x^{۲}$$

گروه سوم

۱. برای کندن یك گودال، از دو ماشین خاك‌برداری، با قدرت‌های متفاوت‌کار ، استفاده می‌شود . زمانی که برای آماده‌کردن گودال به‌وسیلهٔ ماشین اول به‌تنهائی، لازم است، ۳ ساعت کمتر است از زمانی‌که ماشین دوم بخواهد مستقلاً گودال‌را خاك‌برداری کند. مجموع این‌دو زمان $۴\frac{۴}{۳۵}$ برابر زمانی است‌که برای کندن گودال، باکار مشترك هردو ماشین، لازم است . هرکدام از ماشین‌ها ، اگر به‌تنهائی‌کار کنند، درچه‌مدت گودال را خاك‌برداری می‌کنند؟

۲. معادلهٔ $۴\sin^{۴}x + ۷\cos ۲x = ۱$ را حل‌کنید.

۳. حداقل فاصلهٔ نقطهٔ $M(۰ ، ۱)$ را از نقطه‌ای واقع برنمودار تابع $y(x) = ۱ + \frac{۱}{۴\sqrt{۳}\, x^{\frac{۳}{۲}}}$ پیداکنید.

۴. $EFGH$ را یك چهارضلعی محدب و نقطه‌های K ، L ، M و N را ، به‌ترتیب، وسط پاره‌خط‌های EF، FG ، GH و HE و O را نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های KM و LN می‌گیریم . می‌دانیم‌که : $\widehat{LOM} = \frac{\pi}{۲}$، $|KM| = ۳|LN|$ و مساحت چهارضلعی $KLMN$ برابر S است. طول قطرهای چهارضلعی $EFGH$ را محاسبه‌کنید.

۵. همهٔ مقدارهـای پـارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌هـا ، نابرابری

$$9x^2-x+\frac{1}{36}\geqslant y-9y^2-axy$$

برای هرزوج عددهای (x , y)، با شرط و $|x|=|y|$ برقرار باشد.

۶. همهٔ عددهای مثبت x و y را که در دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیرصدق می‌کنند، به‌دست آورید:

$$\begin{cases} x^{\frac{x+3y}{2}}=y^{62x-4y} \\ y^3=\frac{1}{xy} \end{cases}$$

۷. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیداکنید که، برای هر کدام ازآن‌ها ، نامعادلهٔ

$$x^2<4-|x+a|$$

دست کم، یك جواب منفی داشته باشد.

گروه چهارم

۱. اتوبوس، ازنقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B می‌رود؛ وقتی که به‌نقطهٔ B رسید، راه خودرا درهمان جهت ادامه می‌دهد. درلحظه‌ای که اتوبوس به‌نقطهٔ B رسیده بود، اتومبیلی از A، ودرهمان مسیر اتوبوس، حرکت کـرد. اتومبیل فاصلهٔ بین A تا B را ۳ ساعت و ۲۰ دقیقه زودتر ازاتوبوس ــ برای پیمودن همین فاصله ــ طی می‌کند. زمان لازم برای‌رسیدن اتومبیل از A به B وهمچنین، زمـان لازم برای رسیدن اتوبوس از A به B را پیدا کنید، به شرطی که مجموع این دو زمان، ۱/۵ برابـر زمانی باشد که برای رسیدن اتومبیل به اتوبوس لازم است.

۲. معادلهٔ $8\cos^4 x = 11\cos 2x - 1$ را حل کنید.

۳. کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(-1 , 0)$ را از نقطه‌های واقع بر نمودار تابـع $y=\frac{27}{\sqrt{2}(x+1)^2}$، $(x>-1)$ پیدا کنید.

۴. درچهار ضلعی محدب $KLMN$، نقطه‌های E، F، G و H، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های KL، LM، MN و NK هستند. مساحت چهـار ضلعی $EFGH$

برابراست با Q و $\widehat{HEF}=\frac{\pi}{۶}$ و $\widehat{EFH}=\frac{\pi}{۲}$. طول قطرهای چهار ضلعی KLMN را محاسبه کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، برای هر کدام ازآن‌ها، نامعادلهٔ

$$۴x^۲+۴y^۲+axy\geqslant x+y-\frac{۱}{۱۶}$$

برای هرزوج عددهای دلخواه (x , y)، باشرط $|x|=|y|$، برقرار باشد.

۶. همه عددهای مثبت x و y راکه در دستگاه معادله‌های زیر صدق می‌کنند، پیدا کنید :

$$\begin{cases}(xy)^{y}\cdot x^{۶x}=y^{x}\\ x^۲y=۱\end{cases}$$

۷. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، برای هرکدام از آن‌ها، نامعادلهٔ زیر، دست‌کم یك جواب مثبت داشته باشد:

$$x^۲+|x-a|<۱$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. معادلهٔ $\log_{۱-۲x^۲}x=\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{\log_۲(۱-۲x^۲)^۴}$ را حل کنید.

۲. نقطهٔ O و مربع ABCD (با ردیف رأس‌های A، B، C و D) در صفحه داده شده‌است. می‌دانیم: $|OB|=|OD|=۱۳$، $|OC|=۵\sqrt{۲}$ و، ضمناً، مساحت مربع بزرگتراز ۲۲۵ است. طول ضلع مربع راپیدا کنیدومشخص کنید که نقطهٔ O، کجا واقع شده است: دردرون مربع یا بیرون آن.

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر b را پیدا کنید که، به‌ازای هـر کدام ازآن‌ها، این دستگاه معادله‌ها، دست‌کم یك جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} bx+2y=b+2 \\ 2bx+(b+1)y=2b+4 \end{cases}$$

۴. بار را درواگون‌هایی به‌ظرفیت هرکدام ۸۰ تن جا دادند. ولی معلوم‌شدکه یکی ازواگون‌ها، کاملا پرنشده است. آنوقت، همهٔ بارها را به‌واگون‌هایی منتقل‌کردند که ظرفیت هرکدام ۶۰ تن بود؛ دراین‌جا ناچار شدند به‌تعداد واگون‌ها، ۸ واگون اضافه‌کنند، با وجود این، معلوم شدکه بازهم یکی از واگون‌ها کاملا پرنیست. بالاخره از واگون‌های با ظرفیت ۵۰ تن استفاده کردند؛ بازهم به ۵ واگون اضافی نیازپیداکردند، ولی همهٔ واگون‌هاکاملا پرشده بود. وزن‌کل بار چقدربوده است؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها، تابع

$$y(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$$

صعودی باشد و در هیچ‌جا دارای نقطهٔ بحرانی نباشد.

۶. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید‌که برای هریك ازآن‌ها، نابرابری

$$a(2-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$$

برای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد.

گروه دوم

۱. این معادله را حل‌کنید:

$$\log_{2x^2-1}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)=2-\frac{1}{\log_3(2x^2-1)}$$

۲. مربع با ردیف رأس‌های A، B، C و D و نقطهٔ O واقع دربیرون مربع، واقــع بریك صفحــه داده شده است. می‌دانیم: $|OA|=|OB|=5$ و $|DO|=\sqrt{13}$. مساحت مربع را پیداکنید.

۳. به ازای چـه مقدارهــایی از پارامتر a ، دستگاه معادله‌هــای زیر ، بدون جواب است:

$$\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=6a-2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

۴. مایعی را درظرف‌هایی که‌گنجایش هرکدام ۴۰ لیتراست، ریخته‌ایم، ضمناً معلوم‌شدکه یکی ازظرف‌هاکاملا پرنیست. ولی اگرمایع را درظرف‌های ۵۰ لیتـری می‌ریختیم، همه ظرف‌ها پرمی‌شد و، ضمناً، ۵ ظرف کمتر احتیاج

داشتیم. اگر مایع را درظرف‌های ۷۰ لیتری می‌ریختیم، بازهم به۴ ظرف کمتر احتیاج داشتیم، ولی دوباره یکی‌از ظرف‌ها، دربخشی، خالی می‌ماند. چند لیترمایع داشته‌ایم؟

۵. پارامتر a را طوری پیدا کنیدکه تابع

$$y(x) = a\sin ۷x + ۸ax + \sin ۴x - ۵x$$

نزولی باشد ونقطهٔ بحرانی، درهیچ‌جا، نداشته باشد.

۶. پارامتر a را طوری پیدا کنید کـه این نابرابری برای همـهٔ مقدارهای x برقرار باشد :

$$۲a - ۴ + a(۳ - \sin^۲ x)^۲ + \cos^۲ x < ۰$$

گروه سوم

۱. این معادله را حل کنید :

$$\log_{۲-۲x^۲}(۲ - x^۲ - x^۴) = ۲ - \frac{۱}{\log_{\frac{۴}{۳}}(۲ - ۲x^۲)}$$

۲. مربع ABCD (با همین ردیف رأس‌ها) و نقطهٔ O واقع بریك صفحه داده شده است. می‌دانیم: $|OA| = |OC| = ۱۰$، $|OD| = ۶\sqrt{۲}$ و، ضمناً، طول ضلع مربع، از ۳ تجاوز نمی‌کند. مساحت مربع را پیدا کنید. نقطهٔ O درکجا قرار دارد، بیرون یا درون مربع؟

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر c را پیداکنید که، برای هر کدام از آن‌ها، دستگـاه معادله‌های زیر، حتی یك جواب‌هم نداشته باشد:

$$\begin{cases} -۴x + cy = ۱ + c \\ (۶ + c)x + ۲y = ۳ + c \end{cases}$$

۴. مقداری مفتول داریم. اگر آن‌ها را به قرقره‌هایی بپیچیم، که هر کدام ۸۰۰ مترمفتول را جا می‌دهند، یکی‌از قرقره‌ها پرنمی‌شود. اگر از قرقره‌هایی‌هم استفاده کنیم که هر کدام جای ۹۰۰ متر مفتول را دارند، بازهم همین وضع پیش می‌آید، با این تفاوت که ۳ قرقره کمتـر احتیاج داریم. ولی اگر از قرقره‌های ۱۱۰۰ متری استفاده کنیم، عـلاوه‌بر آن که بازهم ۶ قرقره کمتر مصرف می‌شود، همهٔقرقره‌هاکاملا پرمی‌شوند. چندمترمفتول دراختیارداریم؟

۵. به ازای چه مقدارهایی از پارامتر a ، این تابع صعودی است و نقطه‌های

بحرانی ندارد:

$$y(x)=5ax-\sin 8x-a\sin 2x-3x$$

۶. پارامتر a را طوری پیدا کنید که نابرابری زیر، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد:

$$-5+5a+\sin^2 x+a(3-\cos x)^3>0$$

گروه چهارم

۱. این معادله را حل کنید:

$$\log_{3-4x^2}(9-16x^4)=2+\frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$$

۲. A، B، C و D را رأس‌های متوالی یك مربع و نقطهٔ O را واقع دردرون آن می گیریم. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مربع، به‌شرطی که بدانیم: $|OC|=|OD|=\sqrt{10}$ و $|OB|=\sqrt{26}$.

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر d را پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(2-d)x+d^2y=3d^2+2\\(2d-1)x+dy=d-1\end{cases}$$

یك جواب داشته باشد.

۴. گروهی سربازرا می‌خواهیم به ردیف‌های ۸ نفری مرتب کنیم، ولی یکی‌از ردیف‌هاکامل نشد. وقتی همین سربازهارا به‌ردیف‌های ۷نفری تنظیم کردیم، همه ردیف‌هاکامل شد و، ضمناً، ۲ ردیف‌هم، نسبت به قبل، اضافه شد. ولی اگرآن‌ها را به‌ردیف‌های ۵ نفری مرتب می‌کردیم، علاوه‌برآن‌که ۷ ردیف بیشتر به‌دست می‌آمد، یکی از ردیف‌هاهم کامل نمی‌شد. تعداد سربازها را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنیدکه تابع زیرنزولی‌باشد ونقطه‌های بحرانی هم نداشته باشد:

$$y(x)=a\sin 4x-10x+\sin 7x+4ax$$

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، این نابرابری برای همهٔ مقدارهای x برقرارباشد:

$$\sin^2 x-6+4a+a(5-\cos^4 x)^2<0$$

۱۹۷۹

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sqrt{۳۷-۴۸\cot g\,x}=۸\cot g\,x-۵$ را حل کنید.

۲. درمثلث متساوی‌الساقین ABC $(|AB|=|BC|=۸)$، نقطهٔ E، ساق AB را به نسبت ۳:۱ تقسیم کرده است (با درنظر گرفتن ازنقطهٔ B). زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CA}$ را پیدا کنید، به‌شرطی که $|CA|=۱۲$.

۳. ازظرفی که پر ازگلیسرین خالص بود، ۲ لیتر را در ظرف دیگری ریختیم و روی بقیهٔ گلیسرین‌ها، ۲ لیتر آب ریختیم. بعد از آن آن‌ها را خوب مخلوط کردیم، دوباره ۲ لیترازمخلوط را ازظرف خارج کردیم و به‌جای آن، ۲ لیترآب ریختیم. برای بارسوم، ۲ لیترازمخلوط تازه را برداشتیم وبه‌جای آن دولیترآب اضافه کردیم. درنتیجه این عمل‌ها، مقدارآب داخل ظرف، ۳ لیتر بیشترازمقدار گلیسرین باقی مانده درآن شد. درپایان‌کار، چند لیترآب و چند لیتر گلیسرین درظرف وجود دارد؟

۴. حداکثر وحداقل این تابع را، دربازهٔ $[\frac{۱}{۲}\,،\,۴]$ پیدا کنید:

$$y(x)=|x^{۲}\times ۲x-۳|+\frac{۳}{۲}\ln x$$

۵. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۳x+۷}(۹+۱۲x+۴x^{۲})+\log_{۲x+۳}(۶x^{۲}+۲۳x+۲۱)=۴$$

۶. درمثلث ABC، ارتفاع DB برابراست با ۱۱/۲ وارتفاع AE برابراست با ۱۲. نقطهٔ E روی ضلع BC واقع‌است وداریم: $BE:CE=۵:۹$. طول ضلع AC را پیدا کنید.

۷. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} ۳x^{۲}+۲y^{۲}-۳x+۵y=۳ \\ ۴/۵x^{۲}+۳y^{۲}-۳x+۸y=۷ \end{cases}$$

گروه‌دوم

۱. معادلهٔ $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$ را حل کنید.

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ AB و BC ($|AB|=8$ و $|BC|=6$)، خط راست AD را طوری رسم کرده‌ایم که BC را به نسبت $|BD|:|DC|=4:5$ تقسیم کرده‌است. زاویهٔ بین‌بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ را پیدا کنید.

۳. دوظرف داریم که اولی پراز گلیسرین و دومی پراز آب است. دو ملاقهٔ ۳ لیتری برمی‌داریم، اولی را از ظرف اول پراز گلیسرین ودومی را ازظرف دوم پرازآب می کنیم، سپس، ملاقهٔ اول را درظرف دوم وملاقهٔ دوم را در ظرف اول می‌ریزیم. بعدازآن که مایع هریك ازظرف‌هارا خوب به‌هم‌زدیم، دوباره همان‌عمل‌را تکرارمی کنیم، یعنی ملاقهٔ اول را از ظرف اول و ملاقهٔ دوم را ازظرف دوم پر می کنیم وسپس‌ملاقهٔ اول را درظرف دوم وملاقهٔدوم را درظرف اول می‌ریزیم. بعد از این عمل‌ها، نیمی از حجم ظرف اول را گلیسیرین تشکیل می‌داد. مطلوب است حجم ظرف‌ها، به شرطی که مجموع حجم‌های آن‌ها، ۱۰ برابر حجم ظرف اول باشد.

۴. بیشترین‌وکمترین‌مقدارااین تابع‌را، دربازهٔ $[\frac{1}{2}, 2]$، پیدا کنید:

$$y(x)=|x^2+x-2|-\ln\frac{1}{x}$$

۵. این معادله را حل کنید :

$$\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2$$

۶. مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را پیدا کنیدکه طول ارتفـاع وارد برقاعدهٔ آن برابر۱۰ وارتفاع وارد برساق‌آن به‌طول ۱۲ باشد.

۷. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+x-2y=1 \\ 5x^2+2/5y^2+3x-4y=4 \end{cases}$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\sqrt{13-18\,tg\,x}=6\,tg\,x-3$ را حل کنید.

۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($|AB|=|BC|=۱۵$)، نقطهٔ E ضلع BC را به‌نسبت ۱:۴ (با درنظر گرفتن ازرأس B) تقسیم می‌کند. مطلوب است زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$، به‌شرط $|AC|=۲۰$.

۳. ازظرفی پراز گلیسرین خالص، یك لیتر گلیسرین برداشتیم وبه‌جای آن یك لیتر آب ریختیم. دوباره وبعداز آن‌که مخلوط راکاملا به‌هم زدیم، یك لیتر ازمخلوط را برداشتیم و به جـای‌آن آب اضافه کردیم. برای بارسوم، از مخلوط حاصل یك لیتر برداشتیم و به‌جای‌آن یك لیتر آب ریختیم. درمخلوط حاصل، مقدارآب ۷ برابرمقدار گلیسرین باقی مانده شد. درمخلوط حاصل، چند لیتر گلیسرین وچند لیتر آب داریم؟

۴. حداکثر و حداقل تابع زیـر را، در بازهٔ $[\frac{۱}{۲}, ۴]$، پیدا کنید:

$$y=-\frac{۳}{۲}\ln x-|x^{۲}+۲x-۳|$$

۵. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۲x+۱}(۵+۸x-۴x^{۲})+\log_{۵-۲x}(۱+۴x+۴x^{۲})=۴$$

۶. درمثلث ABC، ارتفاع CD برابر ۷ وارتفاع AE برابر۶ می‌باشد. نقطهٔ E، ضلع BC را طوری تقسیم کرده است که‌داریم: $BE:EC=۳:۴$. طول ضلع AB را پیدا کنید.

۷. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases}۲x^{۲}-۴y^{۲}-۱/۵x+y=۰\\ ۳x^{۲}-۶y^{۲}-۲x+۲y=۰/۵\end{cases}$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\sqrt{۵-۲\sin x}=۶\sin x-۱$ را حل کنید.

۲. درمثلث‌قائم‌الزاویه باضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ BC وBA ($|BA|=۳$ و $|BC|=۴$)، خطراست DA راطوری‌رسم کرده‌ایم که ضلع BC را به نسبت $|BD|:|DC|=۳:۵$ تقسیم کند. زاویهٔ بین بـردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ را پیدا کنید.

۳. دوظرف داریم: ظرف اول پراز گلیسرین خالص وظرف دوم پراز آب‌است. دوملاقهٔ دولیتری برمی‌داریم؛ اولی‌را ازظرف اول‌پراز گلیسرین‌ودومی را از ظرف دوم پرازآب می کنیم، سپس، ملاقهٔ اول‌را درظرف دوم وملاقهٔ دوم‌را درظرف اول خالی می کنیم ومحتوی هردوظرف راکاملا به‌هم می‌زنیم. بعد دوباره، ملاقهٔ اول‌را ازمخلوط ظرف اول وملاقهٔ دوم‌را ازمخلوط ظرف دوم پرمی کنیم و، سپس،ملاقهٔ دوم را درظرف اول‌خالی می کنیم. محلول حاصل درظرف اول، شامل ۴۰٪ گلیسرین خالص می‌شود. مجموع حجم‌های دو ظرف را پیدا کنید، به‌شرطی‌که حجم ظرف‌دوم، چهار برابرحجم ظرف اول باشد.

۴. بیشترین و کمترین مقداراین تابع را، در بازهٔ $[\frac{1}{2}, 2]$، پیدا کنید:

$$y(x)=\ln\frac{1}{x}-|x^2+x-2|$$

۵. این معادله را حل کنید:

$$\log_{5x-1}(10x^2-7x+1)^4-\log_{2x-1}(25x^2-10x+1)=2$$

۶. درمثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=BC)$، ارتفاع AE برابر ۱۲ و قاعدهٔ AC برابر ۱۵ می باشد. مساحت مثلث را محاسبه کنید:

۷. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} 5x^2+y^2+4x-8y=-7 \\ 2x^2+0/4y^2+2x-3y=-1/6 \end{cases}$$

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $\log_2\left(\frac{1}{|x-1|-1}\right)=1$ را حل کنید.

۲. مساحت شکلی را پیدا کنید که به وسیلهٔ نمودار تابع‌های زیر محصور شده باشد :

$$y=-x^2+x+2,\ y=0,\ x=0,\ x=1$$

۳. دودایره به‌مرکزهای O_1 و O_2 وشعاع‌های ۱۲ سانتیمتر و ۷ سانتیمتر، برخط راستی، واقع درصفحهٔ دودایره، درنقطه‌های M_1 و M_2 مماس‌اند و، ضمناً، دودایره دریك طرف خط راست قراردارند. نسبت پاره‌خط M_1M_2 بر پاره‌خط O_1O_2، برابراست با $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. طول پاره‌خط M_1M_2 را پیدا کنید.

۴. دوآلیاژ از روی، مس وقلع داریم. می‌دانیم، آلیاژ اول شامل ۴۰٪ قلع ودومی شامل ۲۶٪ مس است. درصد روی درهردوآلیاژیکی است. با ۱۵۰ کیلوگرم ازآلیاژ اول و ۲۵۰ کیلوگرم ازآلیاژدوم، آلیاژتازه‌ای ساخته‌ایم که درآن ۳۰٪ روی وجوددارد. معلوم کنید، درآلیاژجدید، چندکیلوگرم قلع وجوددارد؟

۵. همهٔ مقدارهای درست پارامتر k را پیداکنید که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، معادلهٔ

$$5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3k$$

دارای جواب باشد. همهٔ این‌جواب‌ها را پیدا کنید.

۶. نامعادلهٔ $3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\log_2(|x+1|-2)=-2$ را حل کنید.

۲. مساحت شکلی را پیداکنید که محدود به‌نمودار تابع‌های زیرباشد:

$$y=x^2-4x+5,\ y=0,\ x=0,\ x=2$$

۳. دودایره، به مرکزهای O_1 و O_2وشعاع‌های ۴ سانتیمتر و ۳ سانتیمتر، روی یك صفحه داده شده است. این دودایره، درنقطه‌های M_1 و M_2 برخط راستی مماس‌اند و، ضمناً، دایره‌ها دردوطرف خط راست قرارگرفته‌اند. نسبت طول پاره خط O_1O_2 به‌طول پاره خط M_1M_2، برابراست با $2\sqrt{2}$. طول پاره‌خط O_1O_2 را پیداکنید.

۴. گروهی ازپسران و دختران دانش‌آموز دریك مسابقهٔ شطرنج گروهی، که با گروه دیگری انجام می‌شد، شرکت کردند. پسران این گروه، روی‌هم، ۶۰

دورودختران، روی‌هم، ۴۰ دور بازی کردند. از بین‌پسرانی که دربازی‌شرکت کرده بودند، ۴۵٪ برد داشتندواز بین‌دختران‌شرکت کننده، ۵۰٪ باختند. تعداد پسرانی که‌باختند ۷ نفر بیشتراز تعداد دخترانی‌بود که‌مساوی کرده‌بودند. به‌خاطر هرپیروزی ۱ امتیازو به‌خاطر هرتساوی ۰/۵ امتیاز می‌دهند و باخت امتیازی ندارد. دانش‌آموزان هر گروه، باخودشان بازی نکرده‌اند. تعداد امتیازهای پسران‌این گروه را پیدا کنید، به‌شرطی که همهٔ گروه ۵۲ امتیاز کسب کرده‌باشد.

۵. مقدارهای درست پارامتر k راطوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، معادله

$$۲ - ۲\cos ۲x = ۳k + ۴\sin x$$

دارای جواب باشد. همهٔ این جواب‌ها را پیدا کنید.

۶. نامعادلهٔ $\left(\frac{۱}{۷}\right)^{-۹x^۲ - ۸x + ۳} < ۷^{-۷x^۲}$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\log_۳ \frac{۲}{|x+۲| - ۳} = ۰$ را حل کنید.

۲. مساحت شکلی را پیدا کنید که به وسیلهٔ نمودار تابع‌های زیرمحصور شده باشد :

$$y = -x^۲ + x + ۶,\ y = ۰,\ x = ۰,\ x = -۱$$

۳. دوآلیاژ از روی، مس وقلع دراختیار داریم. می‌دانیم، آلیاژاول شامل ۲۵٪ روی وآلیاژ دوم، شامل ۵۰٪ مس است. درصد قلع درآلیاژ اول، ۲ برابر درصد قلع درآلیاژ دوم است. از ۲۰۰ کیلو گرم آلیاژاول و ۳۰۰ کیلو گرم آلیاژدوم، آلیاژجدیدی ساختیم که درآن ، ۲۸٪ قلع وجود داشت. مطلوب است مقدارمس‌آلیاژ جدید (برحسب کیلو گرم).

۵. همهٔ مقدارهای درست پارامتر k را پیداکنید که ، برای هر یك از آن‌ها ، معادلهٔ

$$۲\sin^۲ x + ۶\cos^۲ \frac{x}{۲} = ۵ - ۲k$$

جواب داشته باشد. همهٔ این‌جواب‌ها را پیداکنید.

۶. نامعادلهٔ $5^{x^2+x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{5x^2}$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\log_5(|x-3|-2) = -1$ را حل کنید.

۲. مساحت شکل محدود به نمودار تابع‌های زیر را محاسبه کنید:

$$y=x^2+2x+3, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=-2$$

۳. دو دایرهٔ به مرکزهای S_1 و S_2 وشعاع‌های برابر ۵ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر، در یك صفحه، مفروض‌اند. این دو دایره، برخط راستی در نقطه‌های A_1 و A_2 مماس‌اند و، ضمناً، دایره‌ها در دو طرف مختلف خط راست واقع شده‌اند. نسبت طول پاره‌خط A_1A_2 برطول پاره‌خط S_1S_2 برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. طول پاره‌خط A_1A_2 را محاسبه کنید.

۴. در یك جشن ورزشی ۲۰۰ مدال داده شد که، از آن‌ها، ۸۰ مدال به‌زن‌ها، و بقیه به‌مردها تعلق می‌گرفت. از بین مدال‌هایی که به زن‌ها دادند، ۳۰٪ طلا، و از بین مدال‌هایی که به مردان دادند، ۵۰٪ نقره بود. مجموع مدال‌های طلا و نقره‌ای که به زن‌ها تعلق گرفت، برابر بود با کل مدال‌های برنجی برای تمام ورزشکاران. مجموع مدال‌های طلا و برنج مردها، ۱/۲ برابرمجموع مدال‌های طلا و برنج زن‌ها بود. معلوم کنید، همه ورزشکاران، چند مدال طلا گرفته‌اند؟

۱۹۸۱

همان مسأله‌های ۱۹۸۱ از § ۹.

§ ۱۱. دانشکدهٔ اقتصاد
(بخش برنامه‌ریزی و سیبرنتیك اقتصادی)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. معادلهٔ $|\cos x| = \dfrac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}$ را حل کنید.

۲. دوچرخه‌سوار از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت کرد. وقتی که دوچرخه‌سوار $\frac{1}{4}$ فاصلهٔ بین A و B را پیموده بود، موتورسیکلت سواری از B به طرف A حرکت کرد و، وقتی که به A رسید، بدون توقف، برگشت و همراه با دوچرخه‌سوار به B رسید. سرعت موتورسوار از B تا A با سرعت آن از A تا B متفاوت بود و می‌دانیم که زمان لازم برای نخستین ملاقات موتورسوار با دوچرخه سوار، برابر است با زمان لازم برای حرکت موتورسوار از A تا B. سرعت موتور سوار، در فاصلهٔ از A تا B، چند برابر سرعت دوچرخه‌سوار است؟

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به ازای هرکدام از آن‌ها، دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر، دارای دو جواب باشد:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$

۴. همهٔ ذوزنقه‌هایی را درنظرمی‌گیریم که در دایره‌ای به‌شعاع R محاط باشند: مرکز دایره در درون ذوزنقه ویکی از قاعده‌های ذوزنقه برابر $R\sqrt{3}$ باشد. از میان این ذوزنقه‌ها، طول ساق ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که دارای مساحت حداکثر باشد.

۵. درهرم‌مثلث‌القاعدهٔ $SA_1A_2A_3$، روی‌ضلع‌های A_1A_2، A_2A_3 و A_3A_1 از قاعده، نقطه‌های K_1، K_2 و K_3 را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$|A_1K_1| : |K_1A_2| = |A_2K_2| : |K_2A_3| = |A_3K_3| : |K_3A_1| = 2$$

صفحهٔ π را از وسط یال SA_1 موازی صفحهٔ قاعده رسم می‌کنیم تا پاره‌خط‌های SK_1، SK_2 و SK_3 را، به ترتیب، نقطه‌های L_1، L_2 و L_3 قطع کند. مثلث $L_1L_2L_3$ را به‌عنوان‌قاعدهٔ بالای‌منشورقائمی درنظرمی‌گیریم که‌قاعدهٔ پایین آن برصفحهٔ قاعدهٔ هرم منطبق‌باشد. حجم منشور را پیدا کنید، به‌شرطی که حجم هرم $SA_1A_2A_3$ برابر با V باشد.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}} \\ 1+\log_x\left(1-\dfrac{3y}{x}\right) = \log_x 4 \end{cases}$$

۷. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ زیر دو جواب داشته باشد:

$$\log_3(9^x+9a^3)+x$$

گروه اول

۱. معادلهٔ $(x-2)^2|\cos x| = \cos x$ را حل کنید.

۲. قایقی، درجهت جریان آب، از A به B می‌رود. هم زمان با او، ناوچه‌ای، در خلاف جهت حرکت آب، از B به طرف A حرکت کرد؛ ناوچه پس‌از رسیدن به A بدون توقف به سمت B برگشت و بعد ازرسیدن به B، بازهم بدون توقف، به طرف A رفت. ناوچه، در بخش آخرمسیر خود، وقتی به قایق رسیدکه او $\frac{3}{4}$ مسیر خود را، از A تا B، طی کرده بود سرعت قایق در جهت حرکت آب، ۹ برابر سرعت آن در خلاف جهت حرکت آب است. سرعت ناوچه، وقتی که در جهت آب حرکت می‌کند، چند برابر سرعت قایق در جهت حرکت آب است؟

۳. مقدارهای پارامتر a را پیدا کنیدکه به‌ازای هرکدام از آن‌ها، دستگاه زیر دارای دو جواب باشد:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ xy=a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

۴. همهٔ ذوزنقه‌هایی را درنظرمی‌گیریم که طول هریك از دو ساق آن‌ها و، طول قاعدهٔ کوچکتر آن‌ها، برابر a باشد. از بین این ذوزنقه‌ها، طول قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه‌ای را پیداکنیدکه مساحت آن، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۵. مثلث ABC، قاعدهٔ هرم SABC را تشکیل‌می‌دهد. نقطه‌های L، M و N

به‌ترتیب، روی یال‌های AB ، BC و AC طوری قرار گرفته‌اند که داریم:

$$|AL| : |LB| = |BM| : |MC| = |CN| : |NA| = ۲$$

روی پاره‌خط‌های SL ، SM و SN ، به ترتیب، نقطه‌های E و F و G واقع شده‌اند، به نحوی که

$$|SE| : |EL| = |SF| : |FM| = |SG| : |GN| = ۲$$

نقطهٔ K روی قاعدهٔ ABC از هرم قرار دارد. حجم هرم SABC برابر است با V . حجم هرم KEFG را پیدا کنید.

۶. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{۵}{۲}} \\ \log_۴ y \cdot \log_y (y - ۳x) = ۱ \end{cases}$$

۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ زیر دارای دوجواب باشد:

$$\log_۲ (۴^x - a) = x$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $\frac{\sin x}{(x-۴)^۲} + |\sin x| = ۰$ را حل کنید.

۲. سه گروه می‌توانند کاری را به‌انجام برسانند. گروه اول، $\frac{۲}{۳}$ کار را در مدتی انجام داد. اگر گروه دوم $\frac{۱}{۳}$ کار را و، سپس، گروه سوم $\frac{۹}{۱۰}$ بقیهٔ کار را انجام می‌دادند، روی‌هم، به‌همان مقدار زمان احتیاج داشتند. قدرت کار گروه سوم برابر است با نصف مجموع قدرت کار گروه اول و گروه دوم. قدرت کار گروه دوم، چند برابر قدرت کار گروه سوم است؟

۳. پارامتر a را طوری پیدا کنید که دستگاه زیر دارای دوجواب باشد:

$$\begin{cases} (x-y)^۲ = \frac{۲}{۳} \\ xy = ۵a - \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

۴. همهٔ ذوزنقه‌های محاط در دایرهٔ به‌شعاع R را درنظر می‌گیریم که یکی از قاعده‌های آن‌ها منطبق برقطر دایره باشد. از بین این‌ذوزنقه‌ها، اندازهٔ زاویه‌های ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که دارای حجم حداکثر باشد.

۵. متوازی‌الاضلاع $ABCD$، قاعدهٔ هرم $SABCD$ را تشکیل می‌دهد. نقطه‌های K، L، M و N را، به‌ترتیب، بریال‌های AB، BC، CD و DA طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|AK|:|KB|=|BL|:|LC|=|CM|:|DM|=|DN|:|NA|=\frac{۱}{۳}$$

صفحهٔ π را از وسط یال SA و موازی با قاعدهٔ هرم رسم می‌کنیم. صفحهٔ π پاره‌خط‌های SK، SL، SM و SN را، به‌ترتیب، درنقطه‌های E، F، G و H قطع می‌کند. حجم هرم $SABCD$ برابر است با V. نقطهٔ P بر قاعدهٔ $ABCD$ هرم قراردارد. حجم هرم $PEFGH$ را پیدا کنید.

۶. این‌دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲(۲\log_{y}۲x+\times_{\frac{۱}{x}}y)=۳ \\ xy=۲۷ \end{cases}$$

۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که این معادله، دارای دوجواب باشد:

$$x+\log_{\frac{۱}{۲}}(۴^{x}+a^{۳})=۰$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}|\sin x|+\sin x=۰$ را حل کنید.

۲. سه‌ماشین خاک‌برداری، منطقه‌ای را خاک‌برداری می‌کنند. تفاوت قدرت‌کار ماشین اول و سوم، ۳ برابر تفاوت قدرت‌کار ماشین‌های سوم و دوم است. زمانی که لازم است تا با ماشین اول $\frac{۴}{۵}$ تمام‌کار را انجام‌دهد، برابراست با زمانی که لازم است تاابتدا ماشین دوم $\frac{۱}{۱۵}$ کار و، سپس، به‌دنبال او، ماشین

سوم $\frac{۹}{۲۸}$ بقیهٔ کار را انجام‌دهد. قدرت‌کار ماشین اول، چندبرابر قدرت‌کار ماشین دوم است؟

۰۳ همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، دستگاه معادله‌های زیر دارای دوجواب باشد:

$$\begin{cases}(x-y)^{۲}=۶a-۱۴\\ x^{۲}+y^{۲}=۳(۲+a)\end{cases}$$

۰۴ وتر AB برابر است با شعاع دایره. وتر CD را موازی با AB طوری رسم کرده‌ایم که مساحت چهارضلعی ABCD ، حداکثر مقدار ممکن باشد. مقدار کمان کوچکتر وتر CD را پیدا کنید.

۰۵ مربع ABCD ، قاعدهٔ هرم SABCD را تشکیل می‌دهد. نقطه‌های K، L، M و N را، به‌ترتیب، برضلع‌های AB، BC، CD و DA از مربع انتخاب کرده‌ایم؛ ضمناً، نقطه‌های K و M ، ضلع‌های متناظر مربع‌را نصف‌کرده‌اند. نقطهٔ $A_۱$ بریال SA قراردارد و $|SA_۱|:|A_۱A|=۹$. از نقطهٔ $A_۱$ ، صفحهٔ π را موازی قاعدهٔ هرم رسم کرده‌ایم تا پاره‌خط‌های SK، SL، SM و SN را، به‌ترتیب، در نقطه‌های $K_۱$، $L_۱$، $M_۱$ و $N_۱$ قطع کند. نقطهٔ $S_۱$ بر قاعدهٔ هرم SABCD واقع است. حجم هرم SABCD برابر است با V. مطلوب است حجم هرم $S_۱K_۱L_۱M_۱N_۱$.

۰۶ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}۲\log_{x^{۲}} y+۳\log_{\frac{۱}{y}} x=۲\\ xy=۸۱\end{cases}$$

۰۷ همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها، معادلهٔزیر دارای دوجواب باشد:

$$x+\log_{\frac{۱}{۳}}(۹^{x}-۲a)=۰$$

۱۹۷۸

گروه اول

۰۱ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$|x^2+x-1|=2x-1$$

را پیدا کنید که با شرط $x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ سازگار باشند.

۲. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، قطرهای AC و BD، یکدیگر را در نقطهٔ F قطع می کنند. می‌دانیم :

$$|AF|=|CF|=2,\ |BF|=1,\ |DF|=4,\ \widehat{BFC}=\frac{\pi}{3}$$

کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را پیدا کنید

۳. معادلهٔ $\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{57x}{4}-\frac{11}{x}\right)=\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}+3$ را حل کنید.

۴. سه آلیاژ داریم. آلیاژ اول شامل ۳۰٪ نیکل و ۷۰٪ مس ، آلیاژ دوم شامل ۱۰٪ مس و ۹۰٪ منگنز و آلیاژ سوم شامل ۱۵٪ نیکل، ۲۵٪ مس و ۶۰٪منگنز است. از آن‌ها ، می‌خواهیم آلیاژ تازه‌ای درست کنیم که شامل ۴۰٪ منگنز باشد. حداقل و حداکثر درصد مس، دراین آلیاژ تازه چقدر می‌تواند باشد؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، تابع

$$f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$$

در تمام محور عددی صعودی باشد و، ضمناً، نقطه‌های بحرانی نداشته‌باشد.

۶. در مستطیل $ABCD$ ، ضلع AB سه برابر ضلع BC است. نقطهٔ N در درون مستطیل طوری قرار گرفته است که داریم: $AN=\sqrt{2}$، $BN=4\sqrt{2}$ و $DN=2$. کسینوس زاویهٔ BAN و مساحت مستطیل $ABCD$ را پیدا کنید.

۷. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که ، برای هریك از آن‌ها ، نابرابری زیر به‌ازای هرمقدار دلخواه x ، برقرار باشد:

$$a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$$

گروه دوم

۱. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $1+x+|x^2-x-3|=0$ را که با نابرابری $x+\frac{\sqrt{14}}{3}>0$ سازگارند، پیدا کنید.

۲. در چهارضلعی $ABCD$ ، زاویهٔ راس A برابر است با ۱۲۰ درجه و قطر AC نیمساز همین زاویه است. می‌دانیم:

$|AC| = \frac{|AB|}{۵} = \frac{|AD|}{۳}$. کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CD}$ را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $۳ - \frac{۱}{log_{۵۶}(۲x)} = log_{۲x}\left(\frac{۳۲}{x} = ۱۶x\right)$ را حل کنید.

۴. سه آلیاژ داریم. اولی شامل ۷۰٪ قلع و ۳۰٪ سرب ، دومی شامل ۸۰٪ قلع و ۲۰٪ روی و سومی ۵۰٪ قلع ، ۱۰٪ سرب و ۴۰٪ روی است. می‌خواهیم از آن‌ها، آلیاژ جدیدی بسازیم که شامل ۱۵٪ سرب باشد. حداکثر وحداقل درصد قلع در این آلیاژ جدید چقدر می‌تواند باشد؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر b را طوری پیدا کنیدکه ، به‌ازای هریك از آن‌ها، تابع

$$f(x) = sin۲x - ۸(b+۲)cos x - (۴b^۲ + ۱۶b + ۶)x$$

در تمامی محور عددی نزولی باشد و، ضمناً، نقطهٔ بحرانی نداشته‌باشد.

۶. در مستطیل $ABCD$ ، طول ضلع AD دو برابر طول ضلع AB است. نقطهٔ M در درون مستطیل قراردارد و می‌دانیم:

$$AM = \sqrt{۲},\ BM = ۲,\ CM = ۶$$

مطلوب است محاسبهٔ کسینوس زاویهٔ ABM ومساحت مستطیل $ABCD$.

۷. پارامتر b را طوری پیدا کنیدکه نابرابری زیر ، برای هرمقدار دلخواه x برقرار باشد:

$$cos^۲x + ۲b\,sin x - ۲b < b^۲ - ۴$$

گروه سوم

۱. ریشه‌هایی از معادلهٔ $۲|x^۲ + ۲x - ۵| = x - ۱$ را پیدا کنیدکه در نابرابری $x < \sqrt{۲}$ صدق کنند.

۱. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، قطرهای AC و BD برهم عمودند و در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می کنند می‌دانیم:

$$|OB| = |OC| = ۱,\ |OA| = ۸,\ |OD| = ۷$$

کسینوس زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DO}$ را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $\dfrac{1}{\log_{11}\frac{x}{3}}-3=\log_{\frac{x}{3}}\left(\dfrac{114}{x}-9x\right)$ را حل کنید.

۴. سه آلیاژ در اختیار داریم. اولی شامل ۶۰٪ آلومی‌نیوم، ۱۵٪ مس و ۲۵٪ منگنز است. دومی ۳۰٪ مس و ۷۰٪ منگنز دارد و، بالاخره، سومی دارای ۴۵٪ آلومی‌نیوم و ۵۵٪ منگنز است. از آن‌ها، آلیاژ جدیدی شامل ۲۰٪ مس درست کرده‌ایم. حداکثر و حداقل درصد آلومی‌نیوم را در این آلیاژ جدید پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، برای هرکدام از آن‌ها، تابع

$$f(x)=8(2a+1)\cos x-\sin 2x+(16a^2+16a-18)x$$

در تمامی محور عددی صعودی باشد و، ضمناً، نقطهٔ بحرانی نداشته‌باشد.

۶. در مستطیل $ABCD$، ضلع AB، نصف ضلع BC است. نقطهٔ F در درون مستطیل است و داریم: $BF=\sqrt{17}$، $CF=\sqrt{2}$ و $DF=1$. کسینوس زاویهٔ DCF و، همچنین، مساحت مستطیل $ABCD$ را پیدا کنید.

۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که نابرابری زیر، برای هر مقدار دلخواه x، برقرار باشد:

$$a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$$

گروه چهارم

۱. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $|x^2+2x-4|+2x+6=0$ را با شرط $x+\sqrt{18}<1$ پیدا کنید.

۲. در چهارضلعی $ABCD$، زاویهٔ راس B برابر $\frac{\pi}{2}$ و قطر BD نیمساز همین زاویه است. می‌دانیم:

$$\frac{|AB|}{2}=\frac{|BC|}{3}=\frac{|BD|}{4\sqrt{2}}$$

زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $\log_{3x}\left(31x-\frac{3}{x}\right)=\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(3x)}+3$ را حل کنید.

۴. سه آلیاژ در اختیار داریم. اولی شامل ۴۵٪ قلع و ۵۵٪ سرب، دومی شامل ۱۰٪ بیسموت، ۴۰٪ قلع و ۵۰٪ سرب و سومی شامل ۳۰٪ بیسموت و ۷۰٪ سرب است. از آن‌ها می‌خواهیم آلیاژ تازه‌ای درست کنیم که ۱۵٪ بیسموت داشته باشد. حداکثر و حداقل درصد سرب در این آلیاژ تازه، چقدر می‌تواند باشد؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر b را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، تابع

$$f(x)=8(2b+2)\sin x-\sin 2x-(16b^2+32b-10)x$$

روی همهٔ محور عددی نزولی باشد و، ضمناً، نقطه‌های بحرانی نداشته باشد.

۶. در مستطیل ABCD، طول ضلع BC نصف طول ضلع CD است. نقطهٔ E در درون مستطیل قرار دارد و می‌دانیم:

$$AE=\sqrt{2},\quad CE=3,\quad DE=1$$

کسینوس زاویهٔ CDE و مساحت مستطیل ABCD را پیدا کنید.

۷. همهٔ مقدارهای پارامتر b را پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، نابرابری

$$\cos^2 x+2b\sin x-b^2<b-2$$

برای هر مقدار دلخواه x، برقرار باشد.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y\\ \cos^2 x=0\end{cases}$$

۲. مساحت مستطیل ABCD برابر با ۴۸ و طول قطر آن برابر با ۱۰ می‌باشد. نقطهٔ O را در صفحهٔ مستطیل، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $|OB|=|OD|=13$. فاصلهٔ نقطهٔ O را از دورترین رأس مستطیل نسبت به آن پیدا کنید.

۰۳ می‌دانیم، اگر مبلغی را درابتدای سال به‌بانك بگذاریم، تا آخر سال، چیزی به‌آن اضافه می‌شود. (که البته، برای هربانك فرق می‌کند). در ابتدای سال، $\frac{5}{6}$ مبلغی را به‌بانك اول و بقیهٔ آن‌را به‌بانك دوم سپردیم. در پایان سال، مجموع پول‌ها برابر ۶۷۰ واحد پول باشد و ، در پایان سال بعد ، ۷۴۹ واحد پول. اگر در ابتدا ، $\frac{5}{6}$ پول را به‌بانك دوم و بقیه را به‌بانك اول می‌سپردیم، در جریان یك سال، کل مبلغ برابر ۷۱۰-واحد پول می‌شد. اگر تمامی پول را در بانك اول بگذاریم، بعد از ۲ سال به‌چه مبلغی می‌رسد؟

۰۴ همهٔ مقدارهای پارامتر a $(a \geqslant 1)$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مساحت شکل واقع در نیم‌صفحهٔ $x \geqslant 0$ و محدود به‌خط‌های راست $y=1$ ، $y=2$ و منحنی‌های $y=ax^2$ ، $y=\frac{1}{2}ax^2$ ؛ حداکثر مقدار ممکن باشد. این‌مساحت S را پیدا کنید.

۰۵ این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0$$

۰۶ در ذوزنقهٔ ABCD، طول قاعده‌های AD و BC ، به‌ترتیب، برابر است با ۸ و ۴. روی‌امتداد ضلع BC، نقطهٔ ~~M را طوری انتخاب کرده‌ایم~~ که خط راست AM ، مثلثی را از ذوزنقه جدا کند که مساحت آن برابر $\frac{1}{4}$ مساحت ذوزنقه باشد. طول پاره‌خط CM را پیدا کنید.

۰۷ این دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-4x+2y=1 \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5 \end{cases}$$

گروه دوم

۰۱ این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} 1+2\cos 2x=0 \\ \sqrt{6}\cos y-4\sin x=2\sqrt{3}(1+\sin^2 y) \end{cases}$$

۲. طول ضلع مربع $ABCD$ برابر است با $۴\sqrt{۲}$. نقطهٔ O را درصفحهٔ مربع طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $|OB| = ۱۰$ و $|OD| = ۶$. مطلوب است زاویـهٔ بین بردار $\overrightarrow{OB}$ و برداری که از نقطهٔ O درجهت دورترین راس مربع قرار دارد.

۳. اگر مبلغی را، در ابتدای سال، در بانکی بگذاریم، درآخر سال، درصد معینی به آن اضافه می‌شود (و این درصد، برای بانک‌های مختلف، متفاوت است). درآغاز سال، $\frac{۳}{۵}$ پولی را در بانك اول و بقیه را در بـانك دوم گذاشته‌ایم. در پایان سال اول، مجموع پول‌های دو بانك، روی‌هم، ۵۹۰ واحد پول و در پایان سال بعد، ۷۰۱ واحد پول شد. اگر در ابتدا، $\frac{۳}{۵}$ پول را در بـانك دوم و بقیه را در بانك اول می گذاشتیم، در جریان یك‌سال، مجموع پول‌ها، برابر ۶۱۵ واحد پول می‌شد. مجموع پول‌ها، در انتهای سال دوم، در این بانك‌ها، چقدر می‌شود؟

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a $(a \geqslant ۲)$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مساحت شکل واقع درنیم‌صفحهٔ $x \geqslant ۰$ ومحدود به‌خط‌های راست $y = ۱$ و $y = ۲$ و منحنی‌هـای $y = \sqrt{ax}$ و $y = \frac{۱}{۲}\sqrt{ax}$، حداکثر مقدار ممکن شود. این مساحت S را پیدا کنید.

۵. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{log_{۲}(x^{۲} - ۲x - ۷)^{۵} - log_{۳}(x^{۲} - ۲x - ۷)^{۸}}{۳x^{۲} - ۱۳x + ۴} \leqslant ۰$$

۶. قاعده‌های AD و BC از ذوزنقهٔ $ABCD$، به‌ترتیب، برابرند با ۱۲ و ۸. در امتداد ضلع BC، نقطهٔ M را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $CM = ۲/۴$. خط راست AM، مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ را، به‌چه‌نسبتی قطع می‌کند؟

۷. این دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} ۳x^{۲} + ۲y^{۲} + ۱۲x - ۴y = -۸ \\ ۲x^{۲} - y^{۲} + ۸x + ۲y = -۹ \end{cases}$$

۱. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x + 6\sin y = 3 + 12\sin^2 x \\ 4\sqrt{3}\sin x + 2\sin y = 7 \end{cases}$$

۲. مساحت مستطیل ABCD برابر ۴۸ و طول قطر آن برابر ۱۰ می‌باشد. نقطهٔ O را در صفحهٔ مستطیل، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $|OB| = |OD| = \sqrt{61}$. فاصلهٔ نقطهٔ O را از نزدیکترین راس مستطیل پیدا کنید.

۳. فرض می‌کنیم که اگر پولی، درآغاز سال، به‌بانك سپرده شود، در پایان‌سال درصد معینی به‌آن‌اضافه می‌شود (که برای بانك‌های مختلف، متفاوت است). ثلث پولی را درآغاز سال به‌بانك اول و بقیهٔ پول را به‌بانك دوم داده‌ایم. در آخرسال، مجموع سپرده‌ها، برابر ۳۸۰ واحد پول؛ ودر پایان سال بعد برابر ۴۸۲ واحد پول‌شد. اگر ازابتدا، ثلث پول را به‌بانك دوم وبقیهٔ‌آن‌را به‌بانك اول می‌سپردیم، در طول یك‌سال، مبلغ سپرده‌ها در مجموع، برابر ۳۷۰ واحد پول می‌شد. اگر تمامی پول را به‌بانك‌دوم می‌سپردیم، درجریان ۲ سال به‌چه مبلغ تبدیل می‌شد؟

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a $(1 \leqslant a \leqslant 4)$ را پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، مساحت شکل واقع در نیم‌صفحهٔ $x \geqslant 0$ و محدود به‌خط‌های‌راست $y = 2$ ، $y = 3$ و منحنی‌های $y = ax^2$ ، $y = \frac{2}{3}ax^2$، حداقل مقدارممکن باشد. این مساحت S را پیداکنید.

۵. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{\log_5(x^2-2x-14)^9 - \log_2(x^2-2x-14)^4}{2x^2-9x-5} \leqslant 0$$

۶. در ذوزنقهٔ ABCD، قاعده‌های $AD = 12$ و $BC = 3$ داده شده است. نقطهٔ M را روی امتداد ضلع BC طوری انتخاب کرده‌ایم که خط راست AM، مثلثی به مساحت سه‌چهارم مساحت ذوزنقه را، از ذوزنقه جدا کند. مطلوب است طول پاره‌خط CM.

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} 5x^2-3y^2+10x-12y=17 \\ 2x^2+y^2+4x+4y=-2 \end{cases}$$

گروه چهارم

۱. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2(5+2\sqrt{6})\sin x+2\cos y=2\sqrt{2}\cos 2x-5\sqrt{2}-3\sqrt{3} \\ 2(3+\sqrt{6})\sin x+2\cos y+3\sqrt{2}+\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

۲. طول ضلع مربع ABCD برابر است با ۸. نقطهٔ O را در صفحهٔ مربع طوری اختیار کرده‌ایم که داریم: $|OB|=10\sqrt{2}$، $|OD|=6\sqrt{2}$. زاویهٔ بین بردار $\overrightarrow{OB}$ و برداری که از نقطهٔ O در جهت نزدیکترین راس مربع قرار گرفته است، پیدا کنید.

۳. اگر پولی در آغاز سال به‌بانك سپرده شود، در پایان سال، درصد معینی (که در هر بانك، مخصوص به‌خود آن است) به‌آن اضافه می‌شود. در آغاز سال، ربع پولی را به‌بانك اول و بقیهٔ آن را به‌بانك دوم سپرده‌ایم. مجموع سپرده‌های دو بانك، در پایان سال اول برابر ۴۷۰ و در پایان سال دوم برابر ۵۵۳ واحد پول شد. معلوم شد که اگر ربع پول‌را، در ابتدا، به‌بانك دوم و بقیهٔ آن‌را به‌بانك اول می‌سپردیم، در پایان سال اول ۴۵۰ واحد پول داشتیم. در این‌حالت، مجموع سپرده‌ها در پایان سال دوم چقدر می‌شد؟

۴. همهٔ مقدارهای پارامتر a ($2\leqslant a\leqslant 5$) را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مساحت شکل واقع در نیم صفحهٔ $x\geqslant 0$ و محدود به‌خط‌های راست $y=2$، $y=3$، منحنی‌های $y=\sqrt{ax}$، $y=\frac{2}{3}\sqrt{ax}$، کمترین مقدار ممکن باشد. این‌مساحت S را پیدا کنید.

۵. این‌نامعادله را حل کنید:

$$\frac{\log_7(x^2-4x-4)^8-\log_2(x^2-4x-4)^3}{3+x-2x^2}\geqslant 0$$

۶. در ذوزنقهٔ ABCD، طول قاعده‌های AD و BC، به‌ترتیب، برابرند با ۱۶ و ۹. نقطهٔ M را در امتداد ضلع BC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $CM=3/2$. خط‌راست AM، مساحت ذوزنقهٔ ABCD را به‌چه‌نسبتی قطع می‌کند؟

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x^۲-y^۲-۱۲x+۴y=-۱۱ \\ ۴x^۲+۲y^۲-۱۶x-۸y=-۱۸ \end{cases}$$

۱۹۸۰

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $۲ < \log_۵(۲۶-۳^x)$ را حل کنید.

۲. درمثلث قائم‌الزاویه‌ای که محیط آن برابر ۳۶ سانتیمتر است، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. وتر، به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس، به‌نسبت ۲:۳ تقسیم شده است. طول ضلع‌های مثلث‌را پیدا کنید.

۳. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} ۳x^۲+۲xy-۹x-۴y+۶=۰ \\ ۵x^۲+۲xy-۱۲x-۴y+۴=۰ \end{cases}$$

۴. بیشترین مقدارتابع زیررا، درفاصلهٔ $(-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴})$ پیداکنید:

$$y(x)=۵\cos x-\cos ۵x$$

۵. مرکزهای A، B، C و D، پشت سرهم، درکنار یک جادهٔ مستقیم‌الخط قرار دارند. فاصلهٔ مرکز A، ازمرکزهای B،C و D، به نسبت‌های ۱:۲:۴ قرار دارد. اتوبوس‌هایی، درجهت ازA به D، با سرعت‌هایی برابر و درفاصله زمان‌های برابر، روی جاده حرکت می کنند. سه پیاده، درزمان‌های مختلف وبا سرعت‌های برابر، روی جاده، از A به طرف B حرکت‌کردند. وقتی‌که پیادهٔ اول، فاصلهٔ بین مرکزهای A تا B را می‌پیمود، سه اتوبوس ازاوجلو افتادند. درفاصلهٔ زمانی‌که پیادهٔ دوم، فاصلهٔ ازA تا C را طـی می کرد، ۴ اتوبوس ازاوجلوافتاد؛ ضمناً می‌دانیم، وقتی‌که پیادهٔ دوم ازA خارج‌می‌شد، اتوبوس نوبتی از A خارج نشده بـود. پیادهٔ سوم از A خارج شد وبه D رسید، وقتی‌که همهٔ اتوبوس‌های نوبتی از این مـرکزها گذشته بودند. در فاصلهٔ از A تا D، چنداتوبوس ازپیادهٔ سوم جلوزده‌اند؟

۶. معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{۳}-x)+\cos(\frac{\pi}{۶}-x)=\sqrt{۳}$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $\log_{۲}(۱۳-۴^{x})>۲$ را حل کنید.

۲. درمثلث قائم‌الزاویه‌ای، دایره‌ای را محاط کرده‌ایم. نقطهٔ تماس، وتر را به‌پاره خطهایی به‌طول ۵ سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را پیدا کنید.

۳. این دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲xy+y^{۲}-۴x-۳y+۲=۰ \\ xy+۳y^{۲}-۲x-۱۴y+۱۶=۰ \end{cases}$$

۴. حداکثر مقدار تابع زیر را، در بازهٔ $[۰ ، \frac{۵\pi}{۴}]$، پیدا کنید:

$$y(x)=۲\sin x+\sin ۲x$$

۵. نقطه‌های A، B، C و D، درمسیر یك جادهٔ مستقیم قراردارند. فاصلهٔ نقطهٔ A، از نقطه‌های B، C وD به‌نسبت‌های ۶: ۴: ۱ قراردارد. اتوبوس‌هایی به‌نوبت پشت سرهم، درفاصلهٔ زمان‌های برابر، از D به‌سمت A، باسرعت‌های برابر حرکت می‌کنند. سه پیاده، از A به طرف B، در زمان‌های مختلف ولـی با سرعتهای برابر، حرکت کردند. پیادهٔ اول، بعد از حرکت از A و تا رسیدن به B، با ۲ اتوبوس برخوردکرد. پیادهٔ دوم، بعد ازخروج ازA وتا رسیدن به C با ۴ اتوبوس برخوردکرد. پیاده سوم، از A حرکت‌کرد ووقتی به D رسید که اتوبوس‌های نوبتی، ازاین نقطه‌ها گذشته بودند. پیادهٔ سوم، درفاصلهٔ از A تا D به‌چند اتوبوس برخورد کرده است؟

۶. معادلهٔ $\cos(\frac{\pi}{۴}-x)+\sin(\frac{۳\pi}{۴}+x)=\sqrt{۲}$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. نامعادلهٔ $\log_{۴}(۱۹-۳^{x})>۲$ را حل کنید.

۲. درمثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌محیط ۳۰ سانتی‌متر، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. یکی از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه، به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس، به‌نسبت ۲:۳ تقسیم

شده است (با به‌حساب آوردن از رأس زاویهٔ قائمه). طول ضلع‌های مثلث را پیدا کنید.

۳. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۳x^۲+xy-۲x+y-۵=۰ \\ ۲x^۲-xy-۳x-y-۵=۰ \end{cases}$$

۴. بیشترین مقدار تابع $y(x)=۵\sin x-\sin ۵x$ را در بازهٔ $[\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}]$، پیدا کنید.

۵. نقطه‌های A، B، C و D، به‌دنبال‌هم، روی یك جادهٔ مستقیم قرار دارند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطه‌های B، C و D، بر نسبت‌های ۳:۵:۱۵ قرار دارد. اتوبوس‌هایی از A به‌طرف B، در فاصله‌زمان‌های مساوی، پشت سرهم، حرکت‌می‌کنند. سه پیاده، درزمان‌های مختلف وباسرعت‌های برابر، از A به‌طرف D می‌روند. پیادهٔ اول، درفاصلهٔ از A تا D، از ۳ اتوبوس عقب افتاد. از پیادهٔ دوم‌هم، درفاصلهٔ حرکت او از A تا C، ۲ اتوبوس جاوافتاد ومی‌دانیم که درلحظهٔ حرکت او از نقطهٔ A، اتوبوس‌های نوبتی آغاز به‌حرکت نکرده بودند. پیاده سوم، از A حرکت کرد ووقتی به D رسید که اتوبوس‌های نوبتی ازاین نقطه‌ها گذشته بودند. چند اتوبوس، درفاصلهٔ از A تا D، ازپیادهٔ سوم جلو می‌افتند؟

۶. معادلهٔ $\cos(\frac{\pi}{۳}-x)-\sin(\frac{\pi}{۶}-x)=\sqrt{۳}$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $\log_۲(۹-۲^x)>۳$ را حل کنید.

۲. درمثلث قائم‌الزاویه، دایره‌ای محاط شده است. یکی از ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه، با درنظر گرفتن از رأس زاویهٔ قائمه، به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس به دو پاره ۶ سانتی‌متری و ۱۰ سانتی‌متری تقسیم شده است. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلث.

۳. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} xy+۳y^۲-x+۴y-۷=۰ \\ ۲xy+y^۲-۲x-۲y+۱=۰ \end{cases}$$

۴. حداکثر مقدارتابع $y(x)=2\cos x-\cos 2x$ را، دربازهٔ $[\frac{1}{6}\pi , \frac{7}{6}\pi]$، پیدا کنید.

۵. مرکزهای A، B، C و D، پشت سرهم، روی یك جاده مستقیم واقع شده‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A ازنقطه‌های B، C وD به‌نسبت‌های ۵:۷:۴۰ قراردارد. اتوبوس‌هایی بافاصلهٔ زمانی برابر نسبت به‌هم وباسرعت‌های برابر، به‌دنبال‌هم ازD به‌طرف A حرکت می‌کنند. سه‌پیاده درزمان‌های مختلف و با سرعت‌های برابر، ازA به‌طرفD، درروی جاده، حرکت کردند. پیادهٔ اول، ضمن پیمودن فاصلهٔ ازA تا B، با ۳ اتوبوس برخوردکرد. پیادهٔ دوم، ازلحظه‌ای که ازA خارج شد، تازمانی که به‌C رسید، با ۲اتوبوس برخوردکرد. پیاده سوم ازA حرکت کرد ووقتی به‌D رسید که اتوبوس‌های نوبتی ازاین نقطه‌ها رد شده‌بودند. پیادهٔ سوم، درفاصلهٔ ازA تا D، با چنداتوبوس برخورد کرده‌است؟

۶. معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{4}-x)-\cos(\frac{3\pi}{4}+x)=\sqrt{2}$ راحل کنید.

۱۹۸۱

همان مساله‌های §۸ سال ۱۹۸۱.

§۱۲. دانشکدهٔ روان‌شناسی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. معادلهٔ $3\log^2 x-8\cos^2 x+1=0$ را حل کنید.

۲. روی نمودارتابع $y(x)=x^3-3x^2-7x+6$، همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که مماس درهرکدام ازآن‌ها برنمودارتابع، پاره‌خطی را ازنیم محور مثبت Ox جدا کند که نصف پاره‌خطی باشد که ازنیم محورمنفی Oy جدا می‌کند. طول پاره‌خط‌های جدا شده‌را محاسبه کنید.

۳. قدرت تولیدکارخانهٔ اتومبیل‌سازی اول، از ۹۵۰ ماشین درشبانه‌روز تجاوز

نمی کند. قدرت کارخانهٔ دوم اتومبیل‌سازی، درابتدا، برابر۹۵٪ قدرت تولید کارخانهٔ‌اول بود. ولی، وقتی که یك خط دیگر کارخانهٔ دوم به‌راه افتاد، قدرت تولید آن درهرشبانه روز، به اندازهٔ۲۳٪قدرت تولید کارخانه‌اول بیشترشد.و به بیش‌از ۱۰۰۰ عدد درشبانه‌روز رسید. قبل‌ازبازسازی کارخانهٔ دوم، هریك از کارخانه‌ها چنداتومبیل درشبانه‌روز تولید می کردند؟ فرض براین است که تعداد اتومبیل‌های تولیدی هرکارخانه، درشبانه‌روز، عددی درست است.

۴. دردایرهٔ به‌شعاع ۱۷سانتی‌متر، یك چهارضلعی محاط کرده‌ایم که قطرهای آن برهم عمودند و به‌فاصله‌های ۸ سانتی‌متر و ۹ سانتی‌متر از مرکز دایره، قرار دارند. طول ضلع‌های چهار ضلعی را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام ازآن‌ها،دست‌کم یك زوج عدد $(x \text{ ، } y)$ وجودداشته باشد که باشرطهای زیر بسازد:

$$\begin{cases} x^{۲}+(y+۳)^{۲}<۴ \\ y=۲ax^{۲} \end{cases}$$

۶. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} (۱+۲\log_{|xy|}{}^{۲}) \cdot \log_{x+y}|xy|=۱ \\ x-y=۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

۷. به‌ازای هرمقدار پارامتر a، همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a^{۲}-۹^{x+۱}-۸\times ۳^{x}\times a>۰$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $۲tg^{۲}x+۴cos^{۲}x=۷$ را حل کنید.

۲. روی نمودارتابع $y(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۲x^{۲}-۲۲x-۲۸$، همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که مماس درهر کدام ازآن‌ها، برنمودارتابع، ازنیم محورهای مثبت، پاره‌خطهای برابر جدا کنند.

۳. تعداد قطعه‌هایی که گروه اول درنوبت‌کارخود تهیه می کنند، ۱۵٪ تعداد قطعه‌هایی است که گروه‌دوم، درنوبت‌کارخود، آماده می‌سازند. محصول کاردو

گروه‌را، در ۲ جعبه بسته‌بندی کردند. در جعبهٔ اول $\frac{۲}{۳}$ قطعه‌هایی که به وسیلهٔ گروه اول تهیه شده بود و $\frac{۱}{۷}$ قطعه‌های ساخت گروه دوم، جا گرفت (و بنا بر این، در جعبهٔ دوم، $\frac{۱}{۳}$ قطعه‌های ساخت گروه اول و $\frac{۶}{۷}$ قطعه‌های ساخت گروه دوم، جا داشت). درجعبهٔ اول چندقطعهٔ ساخت گروه اول وچند قطعهٔ ساخت گروه دوم قراردارد، به‌شرطی که درجعبهٔ اول کمتراز ۱۰۰۰ قطعه و درجعبهٔ دوم بیشتراز ۱۰۰۰ قطعه وجوددارد؟

۴. دردایرهٔ به‌شعاع ۱۰ سانتی‌متر، یك چهارضلعی محاط کرده‌ایم که قطرهای آن برهم عمودند. طول قطرها، به‌ترتیب، برابرند با ۱۲ سانتی‌متر و $۱۰\sqrt{۳}$ سانتی‌متر. طول ضلع‌های چهارضلعی را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به ازای هرکدام از آن‌ها، دست‌کم، یك زوج عددهای (x,y) وجود داشته باشد که در شرط‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} x^{۲}+(y-۲)^{۲}<۱ \\ y=۲ax^{۲} \end{cases}$$

۶. دستگاه معادله‌های زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{|xy|}(x-y)=۱ \\ ۲\log_{۵}|xy|.\ \log_{|xy|}(x+y)=۱ \end{cases}$$

۷. برای هرمقدار پارامتر a، همهٔ مقدارهای x راپیداکنیدکه بااین شرط‌سازگار باشند:

$$a^{۲}-۲\times ۴^{x+۱}-a\times ۲^{x+۱}>۰$$

گروه سوم

۱. معادلهٔ $cotg^{۲}x-۸sin^{۲}x=۱$ را حل کنید.

۲. نقطه‌های $M_{۱}$ و $M_{۲}$، به ترتیب به‌طول‌های برابر $-\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$، برنمودار

تابع $y(x)=2x^3+3x^2+3x^2-\frac{1}{2}x-1$ قرار دارنـد. همهٔ نقطه‌ها‌یی ازنمودار‌این تابع‌را پیدا کنید‌که مماس درهر کدام از آن‌ها، بر‌نمودار تابع، با خط راست M_1M_2 موازی باشد.

۳. تعداد کتاب‌های علمی وفنی، درکتاب‌خانه، برابر با $\frac{11}{13}$ تعداد کتاب‌های‌هنری این کتاب‌خانه است. برای انتقال کتاب‌خانه به‌شهری دیگر، کتاب‌ها را در دوواگن جا داده‌اند. معلوم شد‌که $\frac{1}{15}$ کتاب‌های علمـی وفنی و $\frac{18}{19}$ کتاب‌هـای هنری، در واگن اول جـا داشتند (و بنابـراین، در واگن دوم، $\frac{1}{19}$ کتاب‌های هنـری و $\frac{14}{15}$ کتاب‌های علمی وفنی). در کتاب‌خانه، چند‌کتـاب علمی وفنی وچند‌کتاب هنری وجود دارد، به شرطی‌که درواگن اول بیش‌از ۱۰۰۰۰ کتاب ودرواگن دوم، کمتر‌از ۱۰۰۰۰ کتاب جا گرفته است؟

۴. دردایرهٔ به‌شعاع ۱۳ سانتی‌متر، یك چهارضلعی محاط شده است که قطرهای آن برهم عمودند. یکی از قطرها برابر ۱۸ سانتی‌متر وفاصلهٔ مرکزدایره از محل برخورد دو قطـر برابر $4\sqrt{6}$ سانتی‌متر است. مساحت چهارضلعی را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید‌که، به‌ازای هر کدام از‌آن‌ها، دست‌کم، یك زوج عدد $(x ، y)$ پیدا شود‌که باشرط‌های زیرسازگار باشد:

$$\begin{cases} x^2-y^2>1 \\ y=ax^2+1 \end{cases}$$

۶. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر‌را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{|x+y|}[4xy+(1+\sqrt{2})^2]=2 \\ x-y=2xy \end{cases}$$

۷. برای هرمقدار پارامتر a، همهٔ x هایی را پیدا کنید‌که با شرط زیرسازگار باشند:

$$4^{2x+1}a^2-65\times 4^{x-1}\times a+1>0$$

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $9\cot g^2 x + 4\sin^2 x = 6$ را حل کنید.

۲. روی نمودار تابع $y(x)=\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{14}{5}$، نقطه‌هایی را پیدا کنید که مماس در هریك از آن‌ها، برمنحنی نمودار تابع، برخط $5x-3y+2=0$ عمود باشد.

۳. دریك صندوق چند گلولهٔ قرمز ودرصندوق دوم چند گلولهٔ آبی وجود دارد، ضمناً تعداد گلوله‌های قرمز $\frac{15}{19}$ تعداد گلوله‌های آبی است. وقتی $\frac{3}{7}$ گلوله‌های قرمز و $\frac{2}{5}$ گلوله‌های آبی‌را ازصندوق‌ها خارج کردیم، درصندوق‌اول کمتراز ۱۰۰۰ گلوله ودرصندوق‌دوم بیشتراز ۱۰۰۰ گلولهٔ باقی‌ماند. درابتدا، درهر صندوق، چندگلوله بوده است؟

۴. دردایرهٔ به‌شعاع ۶سانتی‌متروبه‌مرکزنقطهٔ O، چهارضلعی ABCD را محاط کرده‌ایم. قطرهای AC و BC این چهارضلعی برهم عمود و در نقطهٔ K یکدیگررا قطع کرده‌اند. نقطه‌های E و F، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های AC و BD هستند. طول پاره‌خط OK برابر ۵ سانتی‌متر ومساحت چهارضلعی OEKF برابر ۱۲ سانتی‌متر مربع است. مساحت چهارضلعی ABCD را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها، دست‌کم یك زوج عدد (x ، y) وجودداشته باشدکه درشرط‌های زیرصدق کند:

$$\begin{cases} x^2-(y-a)^2>1 \\ y=x^2+1 \end{cases}$$

۶. این دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{|x-y|}\frac{xy}{2}=2 \\ x+y=xy+1 \end{cases}$$

۷. برای‌هرمقدارپارامتر a، همهٔ مقدارهای x راپیدا کنیدکه با شرط‌زیرسازگار باشد:

$$۴^{x+۱}.a^{۲}-۳۳\times ۲^{x}\times a+۸>۰$$

۱۹۷۸

گروه اول

۱. این معادله را حل کنید:

$$\left(\log_{۳}\frac{۳}{x}\right)(\log_{۲}x)-\log_{۳}\frac{x^{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲}+\log_{۲}\sqrt{x}$$

۲. قطر BD چهارضلعی ABCD، عبارت است از قطر دایره‌ای که بر این چهارضلعی محیط شده است. مطلوب است محاسبهٔ طول قطر AC، به‌شرطی که بدانیم:

$$(BD)=۲,\ |AB|=۱,\ \widehat{ABD}:\widehat{DBC}=۴:۳$$

۳. پیاده، دوچرخه سوار و موتور سوار، روی جادهٔ شوسه، در یك جهت و با سرعت‌های ثابتی حرکت می‌کنند. وقتی که پیاده ودوچرخه سوار دریك نقطه بودند، موتور سوار ۶ کیلومتر ازآن‌ها عقب بود. وقتی که موتورسوار به دوچرخه سواررسید، پیاده ۳ کیلومتر باآن‌ها فاصله داشت. وقتی که موتورسوار به‌پیاده رسید، دوچرخه‌سوار، چند کیلومترجلوافتاده بود؟

۴. همهٔ زوج عددهای (a, b) را پیدا کنید که، برای هریك ازآن‌ها، برابری زیر به‌ازای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد:

$$a(\cos x-۱)+b_{۲}=\cos(ax+b^{۲})-۱$$

۵. می‌دانیم که برای تابع درجه دوم

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c$$

این نابرابری‌ها برقرار است:

$$f(-۱)<۱,\ f(۱)>-۱,\ f(۳)<-۴$$

علامت ضریب a را پیدا کنید.

۶. حداقل مقداراین تابع را، دربازهٔ $۰<x<+\infty$ پیدا کنید:

$$f(x)=۴x+\frac{۹\pi^{۲}}{x}+\sin x$$

۱. معادلهٔ $\frac{\log_5 x}{\log_3 \frac{1}{\sqrt{x}}} + \frac{1}{2} = \log_5 \frac{x^3}{\sqrt{5}}$ را حل کنید.

۲. ضلع AD از چهارضلعی ABCD، قطر دایره‌ای است که بر این چهارضلعی محیط شده‌است. طول ضلع BC را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$|AD| = 6,\ |BD| = 3\sqrt{3},\ \widehat{BAC} : \widehat{CAD} = 1:3$$

۳. پیاده‌ای با سرعت ثابت درجاده‌ای شوسه حرکت می‌کند، در همین جاده، دوچرخه‌سوار و موتورسواری به طرف او می‌آیند. وقتی که دوچرخه‌سوار و موتورسوار در یك نقطه بودند، پیاده، ۸ کیلومتر از آن‌ها فاصله‌داشت. وقتی که موتورسوار به‌پیاده رسید، دوچرخه‌سوار ۴ کیلومتر از موتورسوار عقب مانده بود. وقتی که دوچرخه‌سوار به پیاده برسد، موتورسوار چند کیلومتر از دوچرخه‌سوار جلو افتاده است؟

۴. همهٔ زوج عددهای (a, b) را پیداکنید که، به ازای هرکدام از آن‌ها، برابری زیر، برای همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد:

$$a \cdot e^x + b = e^{ax+b}$$

۵. می‌دانیم، برای تابع درجه‌دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$f(-3) < -5,\ f(-1) > 0,\ f(1) < 4$$

علامت ضریب a را پیداکنید.

۶. بیشترین مقدار این تابع را در بازهٔ $-\infty < x < +\infty$، پیداکنید:

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x$$

گروه سوم

۱. این معادله را حل کنید:

$$\log_3 \sqrt{x} - 2 = (\log_3 x) \cdot \left(\log_2 \frac{1}{x}\right) + \log_2 \frac{x^3}{4}$$

۲. قطر AC از چهار ضلعی ABCD ، قطری از دایرهٔ محیطی چهار ضلعی است. مطلوب است طول قطر BD ، به شرطی که بدانیم:

$$|AC| = ۴ ، |CD| = ۲\sqrt{۲} ، \widehat{BAC} : \widehat{CAD} ۲ : ۳$$

۳. پیاده ، دوچرخه‌سوار و موتورسوار ، روی جادهٔ شوسه ، در یک جهت و با سرعت ثابت، حرکت می‌کنند. وقتی که دوچرخه سوار و موتورسوار در یک نقطه بودند ، پیاده ۱۰ کیلومتر از آن‌ها جلو بود. وقتی که موتورسوار به پیاده رسید ، دوچرخه‌سوار، ۵ کیلومتر از آن‌ها عقب بود. وقتی که دوچرخه‌سوار به پیاده برسد ، موتورسوار چند کیلومتر از آن‌ها جلوتر است؟

۴. مجموعهٔ همهٔ زوج عددهای (a ، b) را پیدا کنیدکه ، برای هر کدام از آن‌ها ، برابری زیر برای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد:

$$a \sin x + b = \sin(ax + b)$$

۵. برای تابع درجه دوم $f(x) = a x^{۲} + bx + c$ ، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$f(-۱) > -۴ ، f(۱) < ۰ ، f(۳) > ۵$$

علامت ضریب a را پیدا کنید.

۶. کمترین مقدار این تابع را ، در بازهٔ $۰ < x < +\infty$ ، پیدا کنید:

$$f(x) = ۲x + \frac{۱۸\pi^{۲}}{x} + \cos x$$

گروه چهارم

۱. این معادله را حل کنید.

$$۲\log_{۳} \frac{x^{۲}}{۲۷} - \frac{\log_{۳} \frac{۱}{x}}{\log_{۵}\sqrt{x}} = ۲$$

۲. ضلع BC از چهار ضلعی ABCD ، قطری از دایرهٔ محیطی چهار ضلعی است. طول ضلع AB را پیدا کنید ، به شرطی که بدانیم:

$$|BC| = ۸ ، |BD| = ۴\sqrt{۲} ، \widehat{DCA} : \widehat{ACB} = ۲ : ۱$$

۳. پیاده و دوچرخه سوار، در یك لحظه و از یك نقطه ، به‌طرف موتور سواری که به‌سمت آن‌ها می آمد، حرکت کردند ؛ هرسه باسرعت‌هایی ثابت‌حرکت می‌کنند. وقتی کـه دوچرخه سوار و موتورسوار بـه هم رسیدند ، پیاده ۳ کیلومتر عقب‌تر از دوچرخه سواز بود. وقتی‌که پیاده و موتور سوار به هم رسیدند ، دوچرخـه‌سوار ۶ کیلومتر از پیاده جلو بود. در لحظـهٔ حرکت ، پیاده و موتورسوار، چندکیلومتر با هم فاصله داشتند؟

۴. مجموعهٔ همهٔ زوج عددهای $(a ، b)$ را پیدا کنیدکـه ، به ازای هرکدام از آن‌ها ، برابری زیر، برای همهٔ مقدارهای $x>۰$ برقرار باشد:

$$a \ln x+b=\ln(ax+b)$$

۵. برای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می‌دانیم:

$$f(-۳)>۳ ، f(-۱)<۱ ، f(۱)>۰$$

علامت ضریب a را پیدا کنید.

۶. حداکثر مقداراین تابع‌را ، دربازهٔ $-\infty<x<+\infty$ ، به‌دست آورید:

$$f(x)=\frac{۴}{x^{۲}+۳\pi x+۲۳}+\sin x$$

۱۹۷۹

گروه اول

۱. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۳+۴\sqrt{۶}-(۱۶\sqrt{۳}-۸\sqrt{۲})\cos x}=۴\cos x-\sqrt{۳}$$

۲. همهٔ مقدارهـای پارامتر b $(b>۰)$ را پیدا کنیدکه ، به ازای هرکدام از آن‌ها، مساحت شکل محدود به‌منحنی تابع‌های $y=۱-x^{۲}$ و $y=bx^{۲}$، برابر باعدد C باشد. برای چه‌مقدارهایی از C، مسأله دارای جواب‌است؟

۳. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{۳}{|x+۳|-۱}\geqslant|x+۲|$$

۴. در هرم مثلث‌القاعدهٔ $ABCD$ ، طول همهٔ یال‌ها ، با هم برابرند. نقطهٔ P ، از دو رأس A و D بـه یك فاصله است و ، همچنین ، از دو رأس B و C

به فاصلهٔ $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ قرار دارد. می‌دانیم که خط راست PC ، برارتفاعی ازمثلث ACD ، که ازرأس D گذشته است، عمود است. حجم هرم ABCD را پیدا کنید.

۰۵ همهٔ عددهای درست سه‌گانه $(u ، v ، w)$ را پیدا کنید که ، برای هر کدام از آن‌ها ، این شرط برقرار باشد:

$$۳(u-۳)^۲+۶v^۲+۲w^۲+۳v^۲w^۲=۳۳$$

۰۶ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲\log_{۱-x}(-xy-۲x+y+۲)+\log_{۲+y}(x^۲-۲x+۱)=۶ \\ \log_{۱-x}(y+۵)-\log_{۲+y}(x+۴)=۱ \end{cases}$$

۰۷ در هرم مثلث القاعدهٔ ABCD ، طول همهٔ یال‌ها یکی است. نقطهٔ M در بیرون هرم قرار دارد و داریم:

$$MD=\frac{۱}{۵}\sqrt{\frac{۲}{۳}}، MA=MB=MC=\sqrt{\frac{۹۷}{۷۵}}$$

حجم هرم ABCD را محاسبه کنید.

گروه دوم

۰۱ این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۲+\sqrt{۶}-(۶\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳})\sin x}=۲\sin x-\sqrt{۲}$$

۰۲ همهٔ مقدارهای پارامتر b $(b>۰)$ را پیدا کنید که ، به ازای هر کدام از آن‌ها، مساحت سطح محصور به‌منحنی تابع‌های $y=b\sqrt{x}$ و $y=۲-\sqrt{x}$ و محور Oy ، برابر عدد C باشد. مسأله ، برای چه مقدارهایی از C ، جواب دارد؟

۰۳ این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{۴}{|x+۱|-۲}\geqslant|x-۱|$$

۰۴ در هرم مثلث القاعدهٔ ABCD ، طول همهٔ یال‌ها ، یکی است. نقطهٔ M از سه رأس A ، B و C به یك فاصله است و ضمناً

$$|MA|=|MB|=|MC|=۲\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

می‌دانیم، پاره‌خط MA بر ارتفاعی از مثلث BCD که از رأس B می گذرد، عمود است. حجم هرم ABCD را محاسبه کنید.

۵. همهٔ عددهـای درست سه‌گانهٔ (x ، y ، z) را طوری پیدا کنید که ، برای هر یك از آن‌ها ، شرط زیر برقرار باشد:

$$۵x^۲+y^۲+۳z^۲-۲yz=۳۰$$

۶. دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{۱+x}(y^۲-۲y+۱)+\log_{۱-y}(x^۲+۲x+۱)=۴ \\ \log_{۱+x}(۲y+۱)+\log_{۱-y}(۲x+۱)=۲ \end{cases}$$

۷. در هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD ، همهٔ یال‌ها ، طولی برابـر دارند. نقطهٔ P در درون هرم قرار دارد، از دو رأس A و D به‌یك فاصله است وفاصلهٔ آن از هر یك از دو رأس B و C برابر $\sqrt{\frac{۵۱}{۵۰}}$ است. می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ P تا خط راست AD برابراست با $\frac{۹}{۵\sqrt{۲}}$. حجم هـرم ABCD را محاسبه کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\sqrt{۹-۶\sqrt{۲}-(۱۲-۸\sqrt{۲})\cos x}+۲\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}\cos x+۱$$

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر p ($p<۰$) را پیدا کنید که ، برای هر کدام ازآن‌ها، مساحت شکل محدود به‌منحنی تابع‌های $y=x^۲$ و $y=۲+px^۲$ برابر با عدد q باشد. به ازای چه مقداری از q ، مسأله جواب دارد؟

۳. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{۹}{|x-۶|-۳}\geqslant|x-۲|$$

۴. در هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD ، همهٔ یال‌ها، طولی برابر دارند. نقطهٔ P از رأس‌های A و D به یك فاصله است و از رأس‌هـای B و C به فاصلهٔ

است، می‌دانیم، خط راست PB برارتفاعی از مثلث ABC که از $\sqrt{\frac{۱۱}{۸}}$
رأس C می گذرد، عمود است. حجم هرم ABCD را محاسبه کنید.

۵. همهٔ عددهای درست سه گانهٔ (p , q , s) را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها ، شرط زیر برقرار باشد:

$$۴p^۲+۳q^۲+۵s^۲-۲۴q-۱=۰$$

۶. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{۳+x}(xy+x+۳y+۳)+۰/۵\log_{۱+y}(x^۲+۶x+۹)=۳ \\ \log_{۳+x}(۰/۵-y)+\log_{۱+y}(۳x+۸)=۱ \end{cases}$$

۷. در هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD ، همهٔ یال‌ها، طولی برابر دارند. نقطهٔ P در درون هرم قراردارد و ضمناً

$$PA=PB=PC=\frac{۳}{۵} ,\ PD=\frac{۴}{۵}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

حجم هرم ABCD را محاسبه کنید.

گروه چهارم

۱. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۹-۴\sqrt{۳}-(۱۶-۸\sqrt{۳})\sin x}=۴\sin x-۳$$

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر a $(a>۰)$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مساحت شکل محدود به محور Oy و منحنی تابع‌های $y=\sqrt{x}$ و $y=۱-a\sqrt{x}$ ، برابر با عدد b باشد. به ازای چه مقدارهایی ازعدد b، مسأله جواب دارد؟

۳. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{۷}{|x-۱|-۳}\geqslant|x+۲|$$

۴. درهرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD، طول همهٔ یال‌ها، با یکدیگر برابرند. نقطهٔ M، ازرأس‌های A، B و C به‌یك‌فاصله‌است. فاصلهٔ نقطهٔ M ازصفحهٔ ABC برابر است با $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$. می‌دانیم که سینوس زاویهٔ بین خط راست MC و ارتفاعی

از مثلث ABC که از رأس A می‌گذرد، برابر است با $۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$. حجم هرم $ABCD$ را محاسبه کنید.

۵. همهٔ عددهای درست سه‌گانهٔ $(x ، y ، z)$ را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، این شرط برقرار باشد:

$$۲x^۲+y^۲+۷z^۲+۲x^۲y^۲-۴۲z+۳۳=۰$$

۶. این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} \log_{۲+x}(y^۲-۶y+۹)+\log_{۳-y}(x^۲+۴x+x)=۴ \\ ۲\log_{۲+x}(۴-y)-\log_{۳-y}(۲-۲x)=۱ \end{cases}$$

۷. در هرم $ABCD$، همهٔ یال‌ها طولی برابر دارند. نقطهٔ P در بیرون هرم قرار دارد و ضمناً

$$PB=PC=\sqrt{\frac{۹۷}{۱۰۰}} \quad \text{و} \quad PA=PD$$

می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ P از خط راست AD، برابر است با $\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$. حجم هرم $ABCD$ را پیدا کنید.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $(\sqrt{۳})^{tg۲x}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۳^{tg۲x}}=۰$ را حل کنید.

۲. این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲u+v=۷ \\ |u-v|=۲ \end{cases}$$

۳. در مثلث ABC، زاویهٔ A قائمه و اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۳۰ درجه است. دایره‌ای درمثلث محاط شده است که شعاعی برابر $\sqrt{۳}$ دارد. مطلوب است، فاصلهٔ رأس C ازنقطهٔ تماس این دایره با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه AB.

۴. مساحت مثلثی را پیدا کنید که محدود است به‌محورهـای مختصات و مماس بر نمودار تابع $y(x)=\frac{x}{2x-1}$ ، در نقطهٔ به طول $x_0=1$.

۵. ثابت کنید که برای عددهای حقیقی و دلخواه p و t ، نابرابری

$$2(2p-1)^4+1+[1-2(2p-1)^4]\sin 2t \geqslant 0$$

برقرار است. همهٔ زوج عددهای (p , t) را پیدا کنید که این نابرابری را به برابری تبدیل می‌کنند.

۶. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geqslant 1$ را حل کنید.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $2^{\cos 2x}-\frac{1}{2\times 2^{\cos 2x}}=0$ را حل کنید.

۲. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 3u-v=1 \\ |u-2v|=2 \end{cases}$$

۳. در مربع ABCD با ضلع به طول a ، دایره‌ای محاط شده است که بر ضلع CD در نقطهٔ E مماس است. طول وتری از دایره را پیدا کنید که نقطه‌های برخورد دایره را با خط راست AE به‌هم وصل می‌کند.

۴. مساحتی مثلثی را پیدا کنید کـه به‌محورهای مختصات و مماس بـر نمودار تابع $y(x)=\sqrt{2x^2-4}$ ، درنقطهٔ به طول $x_0=2$ ، محدود شده باشد.

۵. ثابت کنید که برای همهٔ عددهای حقیقی p و t ، نابرابری

$$4(p-3)^4+2+[2-4(p-3)^4]\cdot \cos t \geqslant 0$$

برقرار است. همهٔ زوج عددهای (p , t) را که ، به ازای هریك از آن‌ها ، نابرابری مفروض به برابری تبدیل می‌شود، پیدا کنید.

۶. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant 1$ را حل کنید.

گروه سوم

۱. معادلهٔ $2^{tg 2x} - \frac{4}{2^{tg 2x}} = 0$ را حل کنید.

۲. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ |3u-v|=1 \end{cases}$$

۳. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی، برابـر است با ۲ سانتی‌متر. فاصلهٔ رأس زاویهٔ حادهٔ این مثلث را تا نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع مقابل به‌این رأس پیدا کنید.

۴. مساحت‌مثلثی‌را پیدا کنید که‌محدوداست به‌محورهای مختصات ومماس‌بر نمودار تابع $y(x)=\frac{x}{2-3x}$ ، در نقطهٔ به‌طول $x_0=1$.

۵. ثابت کنیدکه نابرابری زیر ، به ازای همهٔ مقدارهای حقیقی p و t برقرار است :

$$(5p+2)^4+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}-(5p+2)^4\right] \cdot \sin\frac{t}{2} \geqslant 0$$

و همهٔ زوج عددهای (p , t) را پیدا کنیدکه ، برای هرکدام از آن‌هـا ، این نابرابری، به برابری تبدیل شود.

۶. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-x\right)+\log_{\frac{1}{2}}(1-x) \geqslant 1$ را حل کنید.

گروه چهارم

۱. معادلهٔ $2^{\sin 2x} - \frac{1}{2 \times 2^{\sin 2x}} = 0$ را حل کنید.

۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} u+2v=2 \\ |2u-3v|=1 \end{cases}$$

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، زاویهٔ A قائمه، طول ضلع مجاور به زاویـهٔ

قائمهٔ AB برابر a وشعاع دایرهٔ محاطی برابر r است. دایرهٔ محاطی برضلع AC در نقطهٔ D مماس است. طول وتری از دایره را پیدا کنید که نقطه‌های برخورد دایره را با خط راست BD به هم وصل می کند.

۴. مساحت مثلثی را پیدا کنید که به محورهای مختصات و مماس برنمودار تابع $y(x)=\sqrt{\frac{x^{۲}}{۳}+۱}$ در نقطهٔ به طول $x_{\circ}=۳$ ، محدود باشد.

۵. ثابت کنید که نابرابری زیر، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی p و t درست‌است:

$$۶(۴p+۳)^{۴}+۳+[۳-۶(۴p+۳)^{۴}] . \sin t \geqslant \circ$$

همهٔ زوج عددهای (p ، t) را پیدا کنید که ، به ازای هر کدام از آن‌ها، این نابرابری تبدیل شود.

۶. نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)+\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۲)\geqslant -۱$ را حل کنید.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{x^{۲}-۴y^{۲}}=۲ \\ x^{۵}\sqrt{x^{۲}-۴y^{۲}}=\circ \end{cases}$$

۲. درمثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی، طول ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه برابر است با a . اگر این مثلث‌را درصفحهٔ خود، دوررأس زاویهٔ قائمه، به‌اندازهٔ ۴۵ درجه ، دوران دهیم، مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین تازه‌ای به‌دست می‌آید. مساحت چهار ضلعی را پیدا کنید کـه بخش مشترك این دو مثلث را تشکیل می‌دهد.

۳. همهٔ جواب‌هایی از معادلهٔ زیر را پیدا کنید که با شرط $\circ/۴\pi<x<\frac{۶\pi}{۷}$ سازگار باشند:

$$\cos ۷x-\sqrt{۳}\sin ۷x=-\sqrt{۲}$$

۴. این معادله را حل کنید:

$$\frac{4}{3}[\log_3(5x-6)^3]^2-[\log_3(5x-6)^3]\log_3 x^6=-6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر C را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، حداقل مقدار سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$$

دربازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 2$ ، برابر ۳ باشد.

گروه دوم

۱. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4 \\ y^9\sqrt{4y^2-x^2}=0 \end{cases}$$

۲. مربعی به ضلع a مفروض است. مربع را، در صفحهٔ خود و دور یکی از رأس‌های آن به‌اندازهٔ ۳۰ درجه دوران داده‌ایم تا مربع دیگری به‌دست آید. محیط چهارضلعی را پیدا کنید که بخش مشترك این دومربع را تشکیل می‌دهد.

۳. همهٔ جواب‌های این معادله را، که با شرط $\frac{3\pi}{8}<x<0/7\pi$ سازگارند، پیدا کنید:

$$\sqrt{2}\cos 8x+\sqrt{2}\sin 8x=-1$$

۴. این معادله را حل کنید:

$$\frac{3}{2}[\log_5(2x-3)^2]^2+12(\log_5\sqrt{x})^2=[\log_5(2x-3)^3]\log_5 x^3$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، بیشترین مقدار سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$-x^2+2ax-(a^2-2a+3)$$

در فاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، برابر ۲ — باشد.

گروه سوم

۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{4x^2-y^2}=1 \\ x^7\sqrt{4x^2-y^2}=0 \end{cases}$$

۲. مربعی که طول ضلع آن برابر است با a ، مفروض است. این مربع را، در صفحهٔ خود و دور یکی از رأس‌هایش به‌اندازهٔ ۴۵ درجه دوران داده‌ایم تا مربع دیگری به‌دست آید. مساحت چهار ضلعی را پیدا کنید که بخش مشترك این دو مربع را تشکیل می‌دهد.

۳. همهٔ جواب‌های این معادله را ، که با شرط $\frac{5\pi}{7}<x<1/1\pi$ سازگارند ، پیدا کنید .

$$\sqrt{3}\cos 7x+\sin 7x=-\sqrt{2}$$

۴. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{4}{9}[\log_6(4x-5)^3]^2=[\log_6(4x-5)^3]\log_6 x^2-2\left(\log_6\frac{1}{x}\right)^2$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، حداقل مقدار سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$4x^2-4ax+(a_2-2a-1)$$

در فاصلهٔ $-2\leqslant x\leqslant 0$ برابر ۲ باشد.

گروه چهارم

۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5 \\ y^3\sqrt{y^2-4x^2}=0 \end{cases}$$

۲. مثلث متساوی‌الساقینی با یك زاویهٔ منفرجه داریم که زاویهٔ منفرجهٔ آن برابر ۱۲۰ درجه و هریك از دو ساق آن ، برابـــر a می‌باشد، این مثلث را ، در صفحهٔ خود و دور رأس زاویهٔ منفرجه، به‌اندازهٔ ۶۰ درجه دوران داده‌ایم تا مثلث منفرجه‌الزاویه متساوی‌الساقین به دست آید. محیط چهارضلعی را پیدا کنید که بخش مشترك این دو مثلث را تشکیل می‌دهند.

۳. همهٔ جواب‌های این معادله را ، باشرط $0/6\pi<x<\frac{7\pi}{8}$، پیدا کنید.

$$\sqrt{2}\cos 8x-\sqrt{2}\sin 8x=-\sqrt{3}$$

۴. این معادله را حل کنید:

$$\frac{1}{3}[\log_2(3x-4)^6]\log_2 x^3=8(\log_2\sqrt{x})^2+[\log_2(3x-4)^2]^2$$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها، حداکثر مقدار سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$-x^2+2ax-(a^2-2a-3)$$

در فاصلهٔ $-1\leqslant x\leqslant 0$ ، برابر ۲ باشد.

§ ۱۳. دانشکدهٔ زبان‌شناسی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. در دو جعبه، بیش‌از ۲۹ قطعه یکسان وجود دارد، اگر دو عدد از قطعه‌های جعبهٔ اول را برداریم، آن چه می‌ماند، از سه‌برابر تعداد قطعه‌های جعبهٔ دوم بیشتر است. اگر به دو برابر تعداد قطعه‌های جعبه دوم ۶۰ عدد اضافه کنیم، از سه برابر تعداد قطعه‌های جعبه اول بیشتر می‌شود. در هر جعبه، چند قطعه وجود دارد؟

۲. مساحت شکل محدود به‌نمودار این تابع‌ها را پیدا کنید:

$$x=0\ ,\ y=\sin x\ ,\ y=\cos x\ ,\ x=\frac{\pi}{2}$$

۳. کوچکترین ریشهٔ مثبت این معادله را پیدا کنید:

$$\cos\pi x^2=\cos[\pi(x^2+2x+1)]$$

۴. برای هرمقدار پارامتر a ، تعداد جواب‌های این معادله را پیدا کنید:

$$\sqrt{2|x|-x^2}=a$$

۵. هرم SABC مفروض است. نقطه‌های D و E ، به ترتیب، بریال‌های SA

و SB قراردارند؛ ضمناً

$$|SD| : |DA| = ۱ : ۲ \quad و \quad |SE| : |EB| = ۱ : ۲$$

از نقطه‌های D و E ، صفحهٔ α را موازی یال SC رسم کرده‌ایم. صفحهٔ α، حجم هرم را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید :

$$\begin{cases} tg x \cdot tg y = ۵ - ۲\sqrt{۶} \\ x + y = \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

۷: دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + log_۲ y = y log_۲ ۳ + log_۲ x \\ x log_۲ ۷۲ + log_۲ x = ۲y + log_۲ y \end{cases}$$

گروه دوم

۱. دو گروه روی هم، بیش از ۷۲ نفرند. اگر ۱۲ نفر از دو برابر افراد گروه دوم کم کنیم، کمتر از تعداد گروه اول خواهند شد. اگر از ۹ برابر تعداد افراد گروه اول ۱۰ نفر کم کنیم، از تعداد افراد گروه دوم کمتر می‌شود. هر گروه چند نفر عضو دارد؟

۲. مطلوب است مساحت شکل محدود به‌نمودار تابع‌های

$$x = \frac{\pi}{۶} , \quad y = \frac{۱}{sin^۲ x} , \quad y = \frac{۱}{cos^۲ x} , \quad x = \frac{\pi}{۳}$$

۳. مطلوب است کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$sin \pi x^۲ = sin[\pi(x^۲ + ۲x)]$$

۴. به‌ازای هرمقدار پارامتر a ، مطلوب است تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$|x^۲ - ۲x - ۳| = a$$

۵. متوازی‌الاضلاع ABCD ، قاعدهٔ هرم SABCD را تشکیل می‌دهد. از وسط یال SA ، صفحهٔ α را موازی وجه SBC رسم کرده‌ایم. صفحهٔ α، حجم هرم را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۶. این دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را حل کنید:

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{۲} \\ tg x - tg y = \frac{۲\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۲}} \end{cases}$$

۰۷ دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x\log_{۲}۳ + \log_{۲}y = y + \log_{۲}x \\ x\log_{۳}۱۲ + \log_{۳}x = y + \log_{۳}y \end{cases}$$

۱۹۷۸

گروه اول

۰۱ دو گروه، که روی‌هم ۱۸ نفر بودند، مأموریت یافتند که نگهبانی یك‌نفره‌شبانه‌روزی‌را درطول ۳شبانه‌روز تأمین کنند.دوشبانه‌روز اول را، گروه‌اول نگهبانی دادند که‌این‌زمان را، به‌طور برابر، بین‌خود تقسیم کرده بودند.می‌دانیم که در گروه‌دوم سه‌دختر وجود دارد، آن‌ها هرکدام یك ساعت نگهبانی دادند و بقیهٔ ساعت‌های نگهبانی، به‌طور برابر، بین بقیه تقسیم شد. معلوم شد که مجموع نگهبانی هر پسر ازگروه دوم و هرعضو ازگروه اول، از ۹ ساعت کمتر بود. درهر گروه چند نفر بوده‌اند؟

۰۲ در شهر زمرد، بلیط‌های اتوبوس، دارای شش رقم از ۰۰۰۰۰۱ تا ۹۹۹۹۹۹ می‌باشند. دانش‌آموزان، شماره‌ای از بلیط اتوبوس را، شمارهٔ شانس می‌دانستند که سه رقم اول‌آن عددهای فرد مختلف وسه رقم بعدی‌آن زوج باشد، ضمناً، رقم‌های ۷ و ۸ پشت سر هم قرار نگیرند. روی هم چند شمارهٔ شانس وجود دارد!

۰۳ این معادله را حل کنید:

$$۵\sin x + ۶\sin ۲x + ۵\sin ۳x + \sin ۴x = ۰$$

۰۴ حداکثر و حداقل این تابع را پیدا کنید:

$$f(x) = \sin^{۲}x + \cos x - \frac{۱}{۲}$$

۰۵ پنج ضلعی ABCDE در دایره‌ای به‌شعاع واحد محاط شده است. می‌دانیم

$$|AB|=\sqrt{2}\cdot \widehat{ABE}=\frac{\pi}{4},\ \widehat{EBD}=\frac{\pi}{6},\ |BC|=|CD|$$

مساحت پنج‌ضلعی چقدر است؟

۶. عدد α طوری انتخاب شده است که معادلهٔ

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}+\alpha^2x^2+2\alpha x(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$$

دارای جواب باشد. این جواب را پیدا کنید.

۷. این معادله را حل کنید:

$$\log_9(x^2-5x+6)^2=2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$$

۱۹۷۹

گروه اول

۱. دو دایرهٔ غیرمتقاطع مفروض است. دو مماس مشترك آن‌ها را رسم کرده‌ایم و امتداد داده‌ایم تا پاره‌خط خط‌المرکزین را در نقطهٔ A قطع کنند. شعاع دایرهٔ کوچکتر برابر است با R. فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ بزرگتر برابر است با $6R$. نقطهٔ A ، پاره خط مماس ــ محدود به‌دو نقطهٔ تماس ــ را به نسبت ۳ : ۱ تقسیم می کند. مطلوب است مساحت شکل محدود به پاره‌خط‌های مماس و کمان‌های بزرگتر دایره‌ها ، که نقطه‌های تماس را به هم وصل کرده‌اند.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(x-\frac{7}{2}\pi\right)=1+2\sin x$$

۳. این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

۴. سه خط خودکار، یك‌نوع محصول تولید می کنند، ولی با قدرت‌های متفاوت. اگر هرسه خط کار کنند، قدرت تولیدی همهٔ آن‌ها ۱/۵ برابر قدرت تولیدی خط‌های اول و دوم است. خط‌های دوم و سوم، روی هم ، مقداری محصول را در ۴ ساعت و ۴۸ دقیقه زودتر از خط اول تولید می کنند ؛ همین‌مقدار

محصول را ، خط دوم ، ۲ ساعت زودتر از خط اول می‌تواند تولید کند. خط اول ، همین مقدار محصول را در چه مدتی تولید می‌کند؟

۵. m و n عددهایی طبیعی و $\frac{m}{n}$ کسری کوچکتر از واحد و ساده نشدنی است. به ازای کدام عددهای طبیعی می‌توان کسر $\frac{3n-m}{5n+2m}$ را ساده کرد؟

گروه دوم

۱. دو دایرهٔ غیرمتقاطع، به‌شعاع‌های R و $2R$ مفروض است. مماس‌های مشترك آن‌ها را رسم کرده‌ایم تا پاره‌خط خط‌المرکزین را در نقطهٔ A قطع کنند. فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره برابر است با $2R\sqrt{3}$. مساحت شکلی را پیدا کنید که به پاره‌خطهای مماس و کمان‌های بزرگتر دایره‌ها ــ که نقطه‌های تماس را به‌هم وصل می‌کنند ــ محدود است.

۲. معادلهٔ $\sin x+\sin 3x+4\cos^3 x=0$ را حل کنید.

۳. نامعادلهٔ $2-\log_2(x^2+3x)\geqslant 0$ را حل کنید.

۴. دو بافنده و یك شاگرد بافنده، یك سفارش فوری دریافت کردند. اگر بافندهٔ اول به‌تنهایی تمامی کار را انجام دهد ، نسبت به‌زمانی که برای انجام همین کار به‌وسیلهٔ بافندهٔ دوم و شاگرد لازم است ، ۳ ساعت بیشتر طول می‌کشد. ولی ، اگر بافندهٔ دوم بخواهدکار را به تنهایی انجام دهد ، به‌همان زمانی نیازداردکه بافندهٔ اول وشاگرد برای انجام همان‌کار احتیاج دارند. زمانی که بافندهٔ دوم، برای انجام تمامی‌سفارش به‌تنهائی لازم دارد ، هشت‌ساعت کمتر از دو برابر زمانی است که بافندهٔ اول برای انجام همان‌کار به‌تنهایی، احتیاج دارد. اگر دو بافنده وشاگرد ، باهم‌کار کنند ، در چه مدتی سفارش را انجام می‌دهند؟

۵. m و n را دو عدد طبیعی و $\frac{m}{n}$ راکسری کوچکتر از واحد و ساده‌نشدنی در نظر می گیریم. به ازای کدام عددهای طبیعی ، می‌توان کسر $\frac{2n-m}{3n+2m}$ را ساده کرد؟

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sqrt{3}\, sin 2x = 2 cos^2 x$ را حل کنید.

۲. نامعادلهٔ $log_3(x^2-1) \leqslant 1$ را حل کنید.

۳. در نقطهٔ به طول $x_0 = 1$، مماسی برسهمی $y = 4 - x^2$ رسم کرده‌ایم. نقطهٔ برخورد این مماس را با محور Oy پیدا کنید.

۴. در ذوزنقهٔ $ABCD$، با قاعده‌های BC و AD و ساق‌های AB و CD، دایره‌ای به مرکز O محاط کرده‌ایم. مطلوب است محاسبه مساحت ذوزنقه، به شرطی که زاویهٔ DAB قائمه باشد و داشته باشیم: $|OC| = 2$ و $|CD| = 4$.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را، از بازهٔ $[1 ، +\infty)$، پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

بیشترین مقدار ممکن باشد.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ zx = (z-4)y + 30 \\ 2zx = (2z-4)y \end{cases}$$

گروه دوم

۱. معادلهٔ $sin x = cos 2x$ را حل کنید.

۲. حوزهٔ تعریف این تابع را پیدا کنید:

$$y(x) = \sqrt{log_2(x^2-3)}$$

۳. برسهمی $y = 4x - x^2$، مماسی در نقطهٔ به طول $x_0 = 3$ رسم کرده‌ایم. نقطهٔ برخورد این مماس را با محور Ox پیدا کنید.

۴. در مثلث ABC، ارتفاع BK و میانهٔ BM را برضلع AC رسم کرده‌ایم؛ ضمناً می‌دانیم: $|AM| = |BM|$. کسینوس زاویهٔ KBM را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم: $|AB| = 1$ و $|BC| = 2$.

۵. همهٔ مقدارهای a، از بازهٔ $(-\infty ، -4]$ را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، کوچکترین ریشهٔ معادلهٔ

$$x^۲+ax-۳x-۲a-۲=۰$$
کمترین مقدار ممکن باشد.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} y-x=۵ \\ zx=(z-۴)y+۳۰ \\ ۲zx=(۲z-۴)y \end{cases}$$

۱۹۸۱

گروه اول

۱. این معادله را حل کنید.

$$\sin\left(۲x-\frac{۷\pi}{۲}\right)+\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-۸x\right)+\cos ۶x-۱$$

۲. نامعادلهٔ $\log_۲^۲(۲-x)-۸\log_{\frac{۱}{۴}}(۲-x)\geqslant ۵$ را حل کنید.

۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD ، ضلع AB برابر ۶ سانتی‌متر وارتفاع وارد برقاعدهٔ AD برابر ۳ سانتی‌متر است. نیمساز زاویهٔ BAD ، ضلع BC را را در نقطه M ، طوری قطع کرده است که داریم: $|MC|=۴^{cm}$. N را نقطهٔ برخورد نیمساز AM با قطر BD می‌گیریم. مساحت مثلث BNM را محاسبه کنید.

۴. هر یك ازکارگران باید ۳۶ قطعهٔ کاملاً مشابه تهیه کنند. کارگر اول، ۴ دقیقه دیرتر ازکارگر دوم شروع به‌کار کرد، ولی $\frac{۱}{۳}$ سفارش را در یك زمان تمام کردند. کارگر اول بعداز آن‌که کار خود را تمام کرد، با دو دقیقه وقفه، دوباره به‌کار پرداخت و تا وقتی‌که دومی‌کار خود را تمام کرد، باز هم ۲ قطعه آماده کرد. هرکارگر ساعتی چند قطعه آماده می‌کند؟

۵. ارتفاع وشعاع قاعدهٔ مخروط قائم دواری را پیدا کنید که درکرهٔ به‌شعاع R محاط و حداکثر حجم را داشته باشد.

۶. حجم منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظمی برابر است با V. زاویهٔ بین قطرهایی ازدو

وجه جانبی که از یك رأس گـذشته‌اند ، برابر است با α. طول ضلع قاعدهٔ منشور را پیدا کنید.

گروه دوم

۰۱ این معادله را حل کنید:

$$\left(x+\frac{۵\pi}{۲}\right)+۲\sin\left(۲x+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos(۳x+\pi)$$

۰۲ این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{۵}^{۲}(۶-x)+۲\log_{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}(۶-x)+\log_{۳}۲۷\geqslant ۰$$

۰۳ نقطهٔ M را روی ضلع AB از متوازی‌الاضلاع ABCD طوری انتخاب کردیم کـه داریم: $|AB|=۳|AM|$. نقطهٔ برخورد AC و DM را N می گیریم. نسبت مساحت مثلث AMN را به‌مساحت تمام متوازی‌الاضلاع، پیدا کنید.

۰۴ در دریاچه‌ای که سرعت جریان‌آب درآن را می‌توان صفر گرفت، یك کشتی از نقطهٔ A به سمت نقطهٔ B حرکت کرد، ۴ دقیقه بعد، یك قایق موتوری به طرف کشتی حرکت کرد و دردو کیلومتری نقطهٔ A به‌آن رسید. قایق‌موتوری به B ،که در فاصلهٔ ۱۹/۵ کیلومتری A بود ، رسید ، ۱۵ دقیقه در آن جا توقف کرد و بـه‌طرف A بر گشت و ، برای بار دوم ، در ۵ کیلومتری B به کشتی رسید. سرعت کشتی و سرعت قایق موتوری را پیدا کنید.

۰۵ ارتفاع وشعاع قاعدهٔ استوانهٔ قائم دواری را پیدا کنیدکه در کرهٔ به‌شعاع R محاط و حداکثر حجم را داشته باشد.

۰۶ در یك هرم منتظم مربع‌القاعده ، طول یال‌جانبی برابر است با b و باصفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α تشکیل می‌دهد. ازقطر قاعده، صفحه‌ای می‌گذرانیم که با یال جانبی موازی باشد. مساحت مقطع آن را پیدا کنید.

گروه سوم

۰۱ این معادله را حل کنید:

$$\sin\left(۳x-\frac{۳\pi}{۲}\right)+\sin\left(x+\frac{۷\pi}{۲}\right)=\sqrt{۳}\cos\left(x+\frac{۳\pi}{۲}\right)$$

۰۲ این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{\frac{1}{3}}^{2}(5-x)+5\log_{\frac{1}{3}}(5-x)+6\geqslant 0$$

۳. در ذوزنقهٔ ABCD ، طول قاعدهٔ AB سه برابر طول قاعدهٔ CD است. نقطهٔ M را روی قاعدهٔ CD ، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $|MC| = 2\,|MD|$. محل برخورد خطهای راست BM و AC را N می گیریم. نسبت مساحت‌مثلث MNC را به مساحت تمام ذوزنقه پیدا کنید.

۴. دو گروه درکار احداث یك جاده‌اند. گروه اول، باید ۱۲ کیلومتر از جاده و گروه دوم ۲ کیلومتر کمتر از آن، آماده کنند. گروه اول ۲۰ روز دیرتر آغاز به‌کار کرد، ولی چهار کیلومتر نخست‌کار خود را، هردوگروه در یك لحظه تمام‌کردند. اگر دوگروه‌کار را با هم شروع‌کرده بودند، گروه اول، کار خود را ۱۰ روز زودتر ازگروه دوم به‌پایان می‌رسانید. گروه اول، در هرروز، چند متر جاده را بیشتر ازگروه دوم، آماده می کند؟

۵. مطلوب‌است محاسبهٔ ارتفاع وشعاع قاعدهٔ استوانهٔ قائم دواری‌که درمخروط قائم دواری به‌شعاع قاعدهٔ R وارتفاع ۲R محاط شده‌باشد وحجمی حداکثر داشته باشد.

۶. در هرم مثلث‌القاعده‌ای، طول هریك‌ازیال‌های جانبی، برابراست با a. یکی از زاویه‌های مسطحهٔ رأس برابر ۹۰ درجه و هر یك ازدو زاویهٔ دیگربرابر ۶۰ درجه است. حجم هرم را پیدا کنید.

گروه چهارم

۱. این معادله را حل کنید:

$$\sin^{3}x+\cos^{3}x=1+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)$$

۲. این نامعادله را حل کنید:

$$\log_{2}^{2}(3-x)+\log_{\sqrt[3]{2}}(3-x)\geqslant 4$$

۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم: $|AB| = 4cm$ و $|AD| = 6cm$. نیمساز زاویهٔ BAD ، ضلع BC را در نقطهٔ M قطع می کند و داریم: $|AM| = 4\sqrt{3}\,cm$. مساحت چهارضلعی AMCD را پیدا کنید.

۴. دو دوچرخه‌سوار، از دو شهر A و B ، در یك زمان، به طرف یکدیگر حرکت کردند. دوچرخه‌سوار اول، تا لحظهٔ برخورد، یك برابر و نیم

دوچرخه‌سوار دوم راه پیمود: دوچرخه‌سوار اول ، ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه بعداز ملاقات با دوچرخه سوار دوم ، به B رسید. دوچرخه‌سوار دوم ، ۲ ساعت بعداز ملاقات ، در ۱۰ کیلومتری A بود. فاصلهٔ بین دو شهر A و B را پیدا کنید.

۵. ارتفاع و شعاع قاعدهٔ مخروط قائم دواری را پیدا کنید که حجمی حداکثر داشته باشد، محیط قاعدهٔ آن برسطح کره‌ای به‌شعاع R و رأس آن درمرکز کره واقع باشد.

۶. در هرم منتظم مثلث‌القاعده‌ای ، مساحت هروجه جانبی برابر S و هر زاویهٔ مسطحهٔ رأس برابر α است. حجم هرم را پیدا کنید.

بخش دوم

پاسخ‌ها و راه حل‌ها

مقدمه

در حل مسأله‌ها، که دراین بخش می‌آید، اغلب، از این تعریف‌ها و حکم‌ها استفاده کرده‌ایم.

۱. معادلهٔ یك مجهولی. دوتابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم M، اشتراك حوزه‌های تعریف این تابع‌ها باشد.

اگر بخواهیم همهٔ عددهای α را ازحوزهٔ M، طوری پیدا کنیم که، برای هرکدام از آن‌ها، برابری عددی $f(\alpha)=g(\alpha)$ برقرار باشد، می‌گوییم: باید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ راحل کرد، یا معادلهٔ $f(x)=g(x)$ داده شده است. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادلهٔ $f(x)=g(x)$، به فصل مشترك حوزه‌های تعریف دوتابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ گفته می‌شود، یعنی مجموعهٔ همهٔ مقدارهای عددی مجهول x که، به ازای هرکدام از آن‌ها، سمت چپ وسمت راست معادله دارای معنا باشد (معین باشد). عدد α، از حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادله، ریشه یا جواب معادله نامیده می‌شود، به شرطی که، با قراردادن α به جای x در معادله، به یك برابری درست عددی برسیم. حل معادله یعنی پیدا کردن مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های آن. یادآوری می‌کنیم که این مجموعه، ممکن است تهی باشد؛ در چنین موردی، معمولا، می‌گویند که، معادله ریشه ندارد.

روند حل معادله، معمولا ازیك رشته گام‌ها تشکیل شده است که، در هرکدام ازآن‌ها، تبدیل‌هایی، به‌منظور رساندن معادله، به‌یك معادلهٔ ساده‌تر، انجام می‌گیرد. این تبدیل یك‌معادله، به‌معادله‌ای دیگر، طبق قانون‌های‌معینی انجام می‌شود، به‌نحوی که، معادلهٔ بعدی، همان مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ قبلی را داشته باشد. گاهی، تبدیل طوری انجام می‌شود که معادلهٔ حاصل، شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ قبلی است. در این رابطه، باید بعضی اصطلاح‌ها

را یادآوری کنیم.

دومعادله را هم‌ارز گوییم، وقتی که مجموعهٔ ریشه‌های یکی، برمجموعهٔ ریشه‌های دیگری منطبق باشد.

دومعادله را هم‌ارز در یك حوزهٔ A از مقدارهای x (و در حالت خاص، درحوزهٔ مقدارهای قابل قبول) گوییم، وقتی که مجموعهٔ ریشه‌های آن‌ها، دراین حوزه، منطبق برهم باشد.

دومعادلهٔ $f_1=g_1(x)$ و $f_2=g_2(x)$ را درنظر می‌گیریم. اگرهر ریشهٔ معادلهٔ اول، ریشه‌ای ازمعادلهٔ دوم باشد، معادلهٔ دوم را نتیجهٔ معادلهٔ اول گویند. ازتعریف دومعادلهٔ هم‌ارز روشن می‌شود که به جای هرمعادله، می‌توان معادلهٔ هم‌ارز آن را حل کرد. ولی، اگرمعادله‌را به‌معادله‌ای که نتیجهٔ آن است تبدیل کرده باشیم، مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ جدید، شامل مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ اصلی است، ولی دربین آن‌ها ممکن است عددهای دیگری‌هم وجودداشته باشدکه، آن‌ها را، ریشه‌های خارجی معادلهٔ اصلی گوییم بنابراین، درروند حل: ازمعادله‌ای به‌معادلهٔ نتیجهٔ آن برسیم، درپایان حل، نیازبه‌تحقیق داریم، یعنی باید هریك ازریشه‌های به‌دست آمده را، درمعادلهٔ اصلی قراردهیم وآن‌هایی را انتخاب کنیم که معادلهٔ اصلی را منجربه‌یك برابری درست می‌کنند؛ آن ریشه‌هایی‌راکه معادلهٔ اصلی‌را به‌یك برابری نادرست تبدیل می‌کنند، بایدکنارگذاشت. روشن است، چنان‌تبدیلی که ما را ازمعادله‌ای به‌معادلهٔ دیگری برساندکه مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ دوم، شامل مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ اول نباشد، برای ما جالب نیست، زیرا درچنین موردی، ممکن است برخی ازریشه‌های معادلهٔ اول‌را ازدست بدهیم.

حالا به‌چند حکم، درمورد هم‌ارزی معادله‌ها و همچنین به‌چند حکم، درموردی‌که معادله‌ای تبدیل به‌معادلهٔ نتیجه می‌شود، می‌پردازیم.

حکم‌ها یا گزاره‌های مربوط به هم‌ارزی معادله‌ها.

۱. معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $f(x)-g(x)=0$ هم‌ارزند.

۲. معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$، به ازای همهٔ مقدارهای α، هم‌ارزند.

۳. معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $\alpha.f(x)=\alpha\cdot g(x)$، برای هرمقدار $\alpha\neq 0$، هم‌ارزند.

۴. معادله‌های $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ و $f(x)=g(x)$، به‌ازای هرمقدار ثابت ومثبت a، هم‌ارزند.

۵. اگر n عددی طبیعی وتابع‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$، درمجموعهٔ M، غیرمنفی باشند، آن وقت، در این مجموعه، معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $f^n(x)=g^n(x)$ هم‌ارزند.

۶. اگرعددثابت a، مثبت ومخالف واحد باشد وتابع‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$، در مجموعهٔ M، مثبت باشد، درآن صورت، دراین مجموعه، معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $log_a f(x)=log_a g(y)$ هم‌ارزند؛ در حالت خاص با فرض $b>0$، معادله‌های $a^{h(x)}=b$ و $h(x)=log_a b$ هم‌ارزند.

۷. اگرتابع $y=\varphi(x)$ درمجموعهٔ M، که جزئی ازحوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است، معین باشد و درهیچ نقطه‌ای از این مجموعه برابرصفر نشود، آن وقت، معادله‌های:

$$f(x)=g(x) \text{ و } f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$$

در مجموعهٔ M، هم‌ارزند. یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ M، می‌تواند برحوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادلهٔ $f(x)=g(x)$ منطبق باشد.

درحالت‌هایی که درهم‌ارزی دومعادله (یا دونامعادله) تردیدی وجود نداشته باشد، ازعبارت «معادله (یانامعادله) مفروض را می‌توان به‌صورت... نوشت» ویا عبارت‌هایی شبیه به‌آن استفاده کرده‌ایم.

حکم‌ها یاگزاره‌های مربوط به حالتی که یك معادله به‌معادلهٔ دیگری که نتیجهٔ آن است، تبدیل می‌شود.

۱. اگر n عددی طبیعی باشد، معادلهٔ $f^n(x)=g^n(x)$، نتیجه‌ای ازمعادلهٔ $f(x)=g(x)$ است.

۲. اگر $a>0$ و $a\neq 1$، آن‌وقت، معادلهٔ $f(x)=g(x)$، نتیجهٔ معادلهٔ $log_a f(x)=log_a g(x)$ است.

۳. معادلهٔ $f(x)=g(x)\varphi(x)$، نتیجه‌ای است ازمعادلهٔ

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)$$

این گزاره‌ها را، اغلب، به‌صورت دیگری تنظیم می‌کنند:

۱. اگردوطرف معادله را به‌توان یك‌عدد طبیعی برسانیم، ممکن است ریشه‌های‌خارجی وارد معادله شود(ولی‌هیچ ریشه‌ای از آن، ازبین نمی‌رود).

۲. اگردوطرف معادله را ازعلامت لگاریتم آزادکنیم (از دو طرف معادله، آنتی‌لگاریتم بگیریم)، ممکن‌است ریشه‌های خارجی‌وارد معادله‌شود (ولی‌هیچ ریشه‌ای ازآن، ازدست نمی‌رود).

۳. اگرمخرج کسررا در دوطرف معادله ازبین ببریم، ممکن است به‌ریشه‌های‌خارجی برسیم (ولی، هیچ ریشه‌ای ازآن، ازبین نمی‌رود).

به‌این ترتیب، درموردهایی‌که این‌گونه تبدیل‌ها را بپذیریم، باید در پایان‌کار، ریشه‌های حاصل را مورد آزمایش قراردهیم.

این معادله‌ها را درنظرمی گیریم:

$$f_1(x)=g_1(x),\quad f_2(x)=g_2(x),\dots,f_n(x)=g_n(x),\dots$$

که تعدادآن‌ها می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

Q را حوزهٔ فصل مشترك حوزه‌های مقدارهای قابل قبول همهٔ این معادله‌ها می‌گیریم. اگربخواهیم همهٔ عددهای α را پیداکنیم که، هرکدام‌از آن‌ها، دست کم ریشهٔ یکی از این معادله‌ها باشد، می‌گویندکه مجموعهٔ معادله‌های

$$f_1(x)=g_1(x),\ f_2(x)=g_2(x),\dots,\ f_n(x)=g_n(x),\dots$$

داده شده است، Q را حوزه مقدارهای قابل قبول این مجموعهٔ معادله‌ها گویند. ضمناً، اگرتعداد معادله‌ها، بی‌نهایت باشد، گویند که، مجموعه‌ای نامتناهی ازمعادله‌ها داده‌شده است. عدد α ازحوزهٔ مقدارهای قابل قبول‌را، ریشه(یا جواب) این‌مجموعه‌گویند، وقتی که، دست‌کم، ریشهٔ یکی ازمعادله‌های مجموعه باشد. حل مجموعهٔ معادله‌ها، به‌معنای پیداکردن مجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها است. اگرمجموعهٔ ریشه‌ها، مجموعه‌ای تهی باشد، گویند، مجموعهٔ معادله‌ها، دارای جواب نیست. معادلهٔ $F(x)=G(x)$ را، درحوزهٔ M(ودر حالت خاص، درحوزهٔ مقدارهای قابل قبول)، هم‌ارز مجموعهٔ معادله‌های

$$f_1(x)=g_1(x),\ f_2(x)=g_2(x),\dots,\ f_n(x)=g_n(x),\dots$$

گویند، وقتی که مجموعه‌ای از ریشه‌های معادله،که به‌حوزهٔ M تعلق‌دارد، برمجموعهٔ ریشه‌های مجموعهٔ معادله‌های مفروض، درهمان حوزهٔ M، منطبق باشد.

اغلب به‌معادلهٔ به‌صورت $f(x)=0$ برمی‌خوریم که درآن داریم:

$f(x)=p(g(x))$ و ، ضمنـاً ، $p(g)$، یك سه جملـه‌ای درجه دوم است: ag^2+bg+c. در چنین حـالتی، معادلهٔ $f(x)=0$ را به این صورت می‌نویسند :

$$a[g(x)]^2+b[g(x)]+c=0$$

وآن را، معادلهٔ درجه دوم نسبت به $g(x)$ گویند. برای حل این معادله، ابتدا معادلهٔ درجه دوم

$$at^2+bt+c=0 \qquad (1)$$

را حل می کنند. درحالتی که مبین Δb^2-4ac این معـادله مثبت بـاشد، معادلهٔ(۱) دارای دوریشهٔ t_1 و t_2 است ومعادلهٔ $f(x)=0$، بامجموعهٔ این معادله‌ها، هم‌ارزمی‌شود :

$$g(x)=t_1 \text{ و } g(x)=t_2$$

درحالت $\Delta=0$، معادلهٔ(۱)، تنها یك ریشه دارد $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ و معادلهٔ $f(x)=0$، هم‌ارز معادلهٔ زیرمی‌شود:

$$g(x)=-\frac{b}{2a}$$

درحالت $\Delta<0$، معادلهٔ(۱) و،به‌همراه‌آن، معادلهٔ $f(x)=0$ جواب ندارد.

فرض کنیم، معادله‌ای داده‌شده باشد که برخی ازجمله‌های‌آن درداخل علامت قدرمطلق باشند. دراین حالت، معمولاً باید از قاعدهٔ مقدار قدرمطلق استفاده کرد. بنابرتعریف داریم:

$$|F(x)|=\begin{cases} F(x) & (F(x)\geqslant 0) \\ -F(x) & (F(x)<0) \end{cases}$$

بنابراین، برای این‌که معادله‌را ازعلامت‌های قدرمطلق آزادکنیم، باید همهٔ نقطه‌هایی ازمحورعددی را پیداکنیم که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، دست‌کم یکی ازتابع‌های‌داخل علامت قدرمطلق، برابرصفر شود. سپس، روی محور عددی، همهٔ این نقطه‌ها را علامت می‌گذاریم. به‌این ترتیب، محور عددی، به‌تعدادی بازه تقسیم می‌شود. درهرکدام ازاین بازه‌ها، معادله‌های مفروض، به‌معادلهٔ دیگری تبدیل می‌شودکه، دربازهٔ مفروض، هم‌ارز آن است و شامل علامت قدرمطلق‌هم نیست.

هرکدام‌ازاین‌معادله‌ها را حل‌می‌کنیم وازمجموعه جواب‌های‌آن، تنها

عددهایی را انتخاب می کنیم که متعلق به بازهٔ مربوط به آن معادله باشد. مجموعهٔ جوابهائی کــه از این معادله‌ها حاصل می‌شود ، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ اصلی، دربازهٔ مربوط، خواهد بود.

۴. نامعادله‌های یك‌مجهولی. دوتابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را در نظرمی گیریم وفرض می کنیم، حوزهٔ M، فصل مشترك حوزه‌های تعریف این تابع‌ها، باشد. اگر بخواهیم، همهٔ عددهای α از حوزهٔ M را پیدا کنیم که، برای‌هر کدام از آن‌ها، نابرابری‌عددی $f(\alpha)>g(\alpha)$ برقرار باشد، گویند که می‌خواهیم نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ را حل کنیم یا این که، نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ داده شده است حوزهٔ مقــدارهای قابل قبول نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ ، بــه فصل مشترك حوزه‌های تعریف دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ گفته می‌شود. عدد α، ازحوزهٔ مقدارهای‌قابل‌قبول، را جواب نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ گویند، وقتی که با قراردادن عدد α به جای مجهول x، نامعادلهٔ مفروض به نابرابری درست عددی $f(\alpha)>g(\alpha)$ تبدیل شود. حل نامعادله، یعنی پیدا کردن مجموعهٔ همهٔ جواب‌ها. مجموعهٔ جواب‌ها، ممکــن است مجموعه‌ای تهی باشد و، در این صورت، معمولا می گویند که، نامعادله جواب ندارد. دونامعادله را هم‌ارز گویند، وقتی که مجموعهٔ جواب‌ها، برای هردوی آن‌ها، یکی باشد. دونامعادله‌را درحوزهٔ A هم‌ارز گویند، وقتی که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول (دراین حوزه)، بـرمجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم (درهمین حوزه) منطبق باشد.

برای حل نامعادله‌ها، تنها باید ازتبدیل‌های هم‌ارز استفاده کرد.

گزاره‌های مربوط به‌هم‌ارزی نامعادله‌ها.

۱. نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $f(x)-g(x)>0$ هم‌ارزند.

۲. نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $f(x)+\alpha>g(x)+\alpha$، به‌ازای همهٔ مقدارهای a، هم‌ارزند.

۳. نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $\alpha f(x)>\alpha g(x)$، برای همهٔ مقدارهای مثبت a، هم‌ارزند.

۴. نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $af(x)<ag(x)$ ، به‌ازای همهٔ مقدارهای منفی a، هم‌ارزند.

۵. نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $a^{f(x)}>a^{g(x)}$، به‌ازای هرمقدار ثابت ودلخواه a ازبازهٔ $(1 , +\infty)$، هم‌ارزند.

۶. دو نامعادلهٔ $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ ، $f(x)<g(x)$ ، به ازای هر مقدار ثابت ودلخواه a ازبازهٔ (۱ ، ۰)، هم‌ارزند.

۷. n راعددی‌طبیعی‌می‌گیریم وفرض‌می‌کنیم تابع‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$، در مجموعهٔ A، غیرمنفی باشند، آن وقت، در این مجموعه، نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $[f(x)]^n>[g(x)]^n$ هم‌ارزند.

۸. a را عدد ثابتی ازبازهٔ $(1, +\infty)$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، تابع‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$، درمجموعه‌ای مثل A، مثبت باشند؛ آن وقت، دراین‌مجموعه، نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ هم‌ارزند.

۹. aرا عددثابتی ازبازهٔ (۰،۱) می‌گیریم وفرض می‌کنیم، تابع‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$، بازه‌ای مثل A، مثبت باشد؛ در آن صورت، در این مجموعه، نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ هم‌ارزند.

۱۰. فرض می‌کنیم تابع $y=\varphi(x)$، در مجموعهٔ M که جزئی از مقدارهای‌قابل‌قبول‌نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$است، مثبت‌باشد؛ آن‌وقت،نامعادله های$f(x)>g(x)$و$f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x)$، دراین مجموعه، هم‌ارزند.

m نامعادلهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$f_1(x)>g_1(x),\ f_2(x)>g_2(x),\ldots,\ f_m(x)>g_m(x)$$

فصل مشترك حوزه‌های قابل قبول همهٔ این نامعادله‌ها را، Q می‌گیریم. اگر بخواهیم همهٔ عددهای α از حوزهٔ Q را پیدا کنیم‌که، هرکدام از آن‌ها، جوابی ازهریك ازاین نامعادله‌ها باشند،گویند، با دستگاهی از M نامعادله سروکار داریم :

$$\begin{cases} f_1(x)>g_1(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x)>g_m(x) \end{cases}$$

وحوزهٔ Q را، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول (یا حوزهٔ تعریف) این دستگاه گویند. عدد α، ازحوزهٔ تعریف این دستگاه، را جوابی از دستگاه گویند، وقتی‌که جوابی ازهریك ازمعادله‌های‌دستگاه باشد. حل دستگاه نامعادله‌ها، یعنی یافتن مجموعهٔ همهٔ جواب‌های‌آن. درحالتی‌که این مجموعه تهی باشد، گویند، دستگاه نامعادله‌ها، جواب ندارد.

فرض کنید، k دستگاه نامعادله داده شده باشد:

$$\begin{cases} f_1(x)>g_1(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_1(x)>s_1(x) \end{cases}, \ldots, \begin{cases} f_k(x)>g_k(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_k(x)>s_k(x) \end{cases} \qquad (۲)$$

Q را فصل مشترك حوزه‌های تعریف همهٔ این دستگاه‌ها فرض می کنیم. اگر بخواهیم همهٔ عددهای α را پیدا کنیم که، هر کدام از آن‌ها، جواب دست کم یکی از این دستگاه‌ها باشد، گویند که k دستگاه نامعادله داده شده است و Q را حوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول (یا حوزه تعریف) این مجموعه گویند. عدد α، ازحوزه مقدارهای قابل قبول دستگاه نامعادله‌های (۲)، وقتی جواب این‌مجموعه دستگاه نامیده‌می‌شود که،دست کم، جواب یکی ازدستگاه‌های(۲) باشد. حل‌مجموعهٔ‌دستگاه‌های نامعادله‌های(۲)، به‌معنای‌پیدا کردن مجموعهٔ جواب‌های آن است. یادآوری می کنیم که، اگر هریك از k دستگاه مجموعهٔ (۲)، تنها از یك نامعادله تشکیل شده باشد، می گویند که مجموعه‌ای از n نامعادله داده شده است. نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ را، در حوزهٔ A، هم‌ارز مجموعهٔ دستگاه نامعادله‌های(۲) گویند، به‌شرطی که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ (منطبق به‌این حوزه)، برمجموعهٔ جواب‌های‌مجموعهٔ دستگاه نامعادله‌های(۲) (درهمین حوزه) منطبق باشد.

فرض کنید بخواهیم، این نامعادله را حل کنیم

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0 \qquad (۳)$$

که در آن، a_1، a_2،...، a_n، عددهای ثابتی هستند، بین آن‌ها، عددهای برابر وجود ندارد وضمناً

$$a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$$

برای حل این معادله، می‌توان از روش به‌اصطلاح «فاصله‌ها» استفاده کرد. ماهیت این روش، به‌این قرار است، عددهای a_1، a_2،...، a_n راروی محور عددی به‌ردیف صعودی جا می‌دهیم؛ در بازهٔ سمت راست بزرگترین عدد، علامت مثبت وازآن به‌بعد، ازراست به‌چپ، یك درمیان، علامت‌های منفی و مثبت قراردارد. (شکل ۱). جواب نامعادلهٔ(۳)، عبارت است ازاجتماع همهٔ بازه‌هایی که، درآن‌ها، علامت مثبت وجوددارد.

برای این که بتوانیم، به‌کمك روش فاصله‌ها، نامعادلهٔ

شکل ۱

$$\frac{(x-\alpha_1)\dots(x+\alpha_n)}{(x-\beta_1)\dots(x+\beta_m)}>0 \qquad (۴)$$

را حل کنیم، که در آن، α_i و β_i، عددهـایی متفاوتند، باید همهٔ عددهای α_i و β_i را روی عددی قرارداد و سپس، به‌همان ترتیب قبل، فاصله‌ها را علامت‌گذاری کرد. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۴)، عبارت است از اجتماع فاصله‌هایی که‌دارای‌علامت مثبت هستند. اغلب، به‌نامعادلهٔ $f(x)>0$ برمی‌خوزیم، که در آن داریم: $f(x)=p[g(x)]$ ــ تابع مرکبی‌که ازدو تابع $g(x)$ و $p(g)$ تشکیل شده استــ که در آن، $p(g)$، یك سه‌جمله‌ای درجهٔ‌دوم است:

$$p(g)=ag^2+bg+c$$

درچنین‌موردی، نامعادلهٔ $f(x)>0$ را، به‌این صورت می‌نویسند:

$$a[g(x)]^2+b[g(x)]+c>0 \qquad (۵)$$

کـه نامعادلهٔ درجه دوم نسبت به $g(x)$ نامیده می‌شود. نامعادلهٔ (۵)، به این ترتیب، حل می‌شود. ابتدا، مبین $\Delta=b^2-4ac$ از سه‌جمله‌ای درجـه دوم at^2+bt+c را پیدا می‌کنیم. چهارحالت پیش می‌آید:

۱. $a<0$ و $\Delta\leqslant 0$، دراین حالت، نامعادلهٔ(۵) جواب ندارد.

۲. $a<0$ و $\Delta>0$؛ دراین حالت،اگر t_1 و t_2 را ریشه‌های سه‌جمله‌ای at^2+bt+c بگیریم و، ضمناً، داشته باشیم: $t_1<t_2$، آن وقت نامعادلهٔ (۵)، هم‌ارز نامعادلهٔ دوگانهٔ زیر است:

$$t_1<g(x)<t_2$$

۳. $a>0$ و $\Delta\geqslant 0$؛ دراین‌حالت، اگر t_1 و t_2 را ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم at^2+bt+c بگیریم، و، ضمناً،داشته باشیم $t_1<t_2$ (درحالت $\Delta=0$ داریم: $t_1=t_2$)، نامعادلهٔ(۵) بـا مجموعهٔ دو نامعادلهٔ زیر، هم‌ارز می‌شود:

$$g(x)<t_1 \quad و \quad g(x)>t_2$$

۴. $a>0$ و $\Delta<0$؛دراین حالت،مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۵)،

برحوزهٔ تعریف تابع $y=g(x)$ منطبق است.

اغلب، اصطلاح مبین را، که برای معادله یا نامعادلهٔ درجه دوم به‌کار می‌رود، برای سه‌جمله‌ای درجه‌دوم‌هم به‌کارمی‌برند.

فرض کنید با نامعادله‌ای سروکارداشته باشیم که برای برخی ازعبارت‌های آن، علامت قدرمطلق به‌کاربرده شده باشد. درمورد این گونه نامعادله‌ها، برای آزاد شدن از علامت‌های قدرمطلق، می‌توان به‌همان ترتیب معادله‌ها، عمل کرد. یادآوری می‌کنیم که جواب نامعادلهٔ $f(x)\geqslant g(x)$، از اجتماع جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>g(x)$ ومعادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید و، بنابراین، حل نامعادله غیراکید، به حل نامعادلهٔ اکید و معادله منجر می‌شود.

۳. معادله‌های جبری ودستگاه‌معادله‌های جبری. دوچندجمله‌ای $R(x,y)$ و $Q(x, y)$ را، نسبت به x و y، درنظر می‌گیریم. گویند، معادلهٔ جبری

$$R(x, y)=Q(x, y) \qquad (۶)$$

با دومجهول x و y، داده شده است، به‌شرطی که بخواهیم همهٔ زوج عددهای (x_0 , y_0) را پیدا کنیم که، برای هرکدام از آن‌ها، برابری عددی $R(x_0 , y_0)=Q(x_0 , y_0)$ برقرار باشد. هریك از زوج عددهای $(x_0 y_0)$ را، جوابی از معادلهٔ (۶) گویند. حل معادلهٔ (۶)، یعنی پیداکردن مجموعهٔ همهٔ جواب‌ها.

دومعادلهٔ جبری دومجهولی زیررا درنظر می‌گیریم:

$$R(x, y)=Q(x, y) \text{ و } T(x, y)=S(x, y)$$

این معادله‌ها را، وقتی هم‌ارز گویند که مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها برهم منطبق باشد.

گزاره‌های زیردرست است:

۱. معادله‌های $R(x,y)=Q(x,y)$ و $R(x,y)-Q(x,y)=0$ هم‌ارزند.

۲. معادله‌های

$$R(x,y)=Q(x,y) \text{ و } R(x,y)+P(x,y)=Q(x,y)+P(x,y)$$

ـ که در آن، $P(x, y)$ چند جمله‌ای دلخواهی نسبت به x و y استـ هم‌ارزند.

۳. دومعادلهٔ $R(x, y)=Q(x, y)$ و $\alpha R(x, y)=\alpha Q(x, y)$

ـ که درآن، α عدددلخواهی‌مخالف صفراست ـ هم‌ارزند.

ازاین گزاره‌ها، درحالت خاص، نتیجه می‌شود که هرمعادلهٔ جبری با دومجهول x و y را می‌توان بامعادلهٔ هم‌ارزآن

$$P(x, y) = 0 \qquad (7)$$

عوض کرد، که درآن، $P(x, y)$، یك چند جمله‌ای نسبت به x و y است.

می گویند، مجموعهٔ m معادلهٔ جبری، با دومجهول x و y داده شده است:

$$P_1(x, y) = 0,\ P_2(x, y) = 0, \ldots,\ P_m(x, y) = 0 \qquad (8)$$

که درآن، $P_1(x, y)$،...، $Pm(x, y)$، چند جمله‌ای‌هایی نسبت‌به x و y است، وقتی که بخواهیم همهٔ زوج عددهای (x_0 و y_0) را پیداکنیم که، هر کدام ازآن‌ها، جواب دست کم یکی از معادلـه‌های(۸) باشد. هریك ازاین زوج عددهای (x_0 و y_0) را، جوابی ازمجموعهٔ (۸) گویند. حل مجموعهٔ معادله‌های (۸)، یعنی پیداکردن مجموعهٔ جواب‌های آن. معادلهٔ(۷) را وقتی هم‌ارز مجموعهٔ معادله‌های(۸) گویند که، مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلـهٔ (۷)، منطبق برمجموعهٔ همهٔ جواب‌های مجموعهٔ معادله‌های(۸) باشد.

دوچند جمله‌ای $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ را، نسبت به x و y، درنظر می گیریم. گویند، دستگاهی ازدومعادلهٔ جبری با دومجهول

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

داده شده است، به‌شرطی که بخواهیم همهٔ زوج عددهای (x_0 و y_0) راپیدا کنیم که، هر کدام ازآن‌ها، جواب هریك ازدومعادلهٔ دستگاه(۹) باشند. زوج عددهای (x_0, y_0) را، جواب دستگاه معادله‌های (۹) گویند، وقتی که برابر-های عددی $P(x_0, y_0) = 0$ و $Q(x_0, y_0) = 0$، به طورهم‌زمان، برقرار باشند. حل دستگاه معادله‌های (۹)، یعنی پیدا کردن مجموعهٔ همهٔ جواب-های آن.

اکنون دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی دیگررا درنظرمی گیریم:

$$\begin{cases} R(x, y) = 0 \\ S(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

که درآن، $R(x, y)$ و $S(x, y)$، دوچند جمله‌ای نسبت به x و y هستند. دو دستگاه معادله‌های جبری (۹) و (۱۰) را هم‌ارز گویند، وقتی که مجموعهٔ

جواب‌های آن‌ها، برهم منطبق باشد. به‌همین ترتیب، وقتی که از مجموعهٔ k دستگاه دومعادلهٔ جبری دومجهولی

$$(11)\quad \begin{cases}P_1(x, y)=0\\ Q_1(x, y)=0\end{cases}, \dots, \begin{cases}P_k(x, y)=0\\ Q_k(x, y)=0\end{cases}$$

صحبت شود ــ که درآن $P_i(x, y)$ و $Q_i(x, y)$ $(i=1, 2, \dots, k)$، چند جمله‌ای‌هایی نسبت به x و y هستند، منظور پیدا کردن همهٔ زوج‌عددهای (x_0, y_0) است که، هر کدام از آن‌ها، جواب دست‌کم یکی از دستگاه‌های (۱۱) باشد.

هریك ازاین زوج عددهای (x_0, y_0) را جواب مجموعهٔ دستگاه‌های (۱۱) گویند. حل مجموعهٔ دستگاه‌های (۱۱)، یعنی پیدا کردن مجموعهٔ جواب‌های آن. دستگاه معادله‌های (۹) را، هم‌ارز مجموعهٔ دستگاه‌های (۱۱) گویند، به‌شرطی که مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها، برهم منطبق باشد.

گزاره‌های مربوط به‌هم‌ارزی دستگاه معادله‌ها.

۱. اگر ردیف معادله‌ها را در دستگاه (۹) تغییر دهیم، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه (۹) می‌رسیم.

۲. اگر یکی ازمعادله‌های دستگاه (۹)، به‌وسیلهٔ معادله‌ای هم‌ارز آن جانشین کنیم، دستگاهی هم‌ارز دستگاه (۹) به‌دست می‌آید.

۳. اگرمعادلهٔ اول دستگاه (۹) را درعدد ثابت ومخالف صفر α ومعادلهٔ دوم را درعدد ثابتی مثل β ضرب و، سپس، نتیجه‌های حاصل را باهم جمع کنیم و معادلهٔ به‌دست آمده را به‌جای معادله اول قرار دهیم، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه (۹) می‌رسیم؛ به‌زبان دیگر، به ازای هر $\alpha\neq 0$ و هر β، دو دستگاه زیر هم‌ارزند:

$$\begin{cases}P(x, y)=0\\ Q(x, y)=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\alpha P(x, y)+\beta Q(x, y)=0\\ Q(x, y)=0\end{cases}$$

۴. فرض کنید، معادلهٔ اول دستگاه به صورتی نوشته شده باشد که در سمت چپ معادله، تنها یکی ازمجهول‌ها، ومثلا مجهول x، ودرسمت راست آن یك چندجمله‌ای نسبت به y وجود داشته باشد. درچنین صورتی گویند، x بر حسب y بیان شده است.

اگر در معادلهٔ اول دستگاه، مجهول x برحسب مجهول y بیان شده باشد، کافی است درمعادلهٔ دوم دستگاه، به جای x، مقدار آن را برحسب y قرار دهیم، تا دستگاهی هم‌ارز دستگاه(۹) به دست آید؛ به‌زبان دیگر، دو دستگاه زیرهم‌ارزند:

$$\begin{cases} x=R(y) \\ Q(x,y)=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=R(y) \\ Q(R(y),y)=0 \end{cases}$$

۵. اگرمعادلهٔ اول دستگاه(۹)، با مجموعهٔ k معادلهٔ

$$P_1(x,y)=0,\dots \varphi_k(x,y)=0$$

هم‌ارزباشد، دستگاه(۹) با مجموعهٔ k دستگاه زیرهم‌ارزخواهد بود.

$$\begin{cases} P_1(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0 \end{cases},\dots,\begin{cases} P_k(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0 \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که، درمورد دستگاه معادله‌های جبری با n مجهول هم، می‌توان ازهمین تعریف‌ها و گزاره‌ها استفاده کرد.

§۱. دانشکدۀ مکانیک ـ فیزیک

۱۹۷۷

گروه اول

۱. سمت چپ نامعادلـه را تبدیل می کنیم. بنابـر رابطۀ نیوتون ـ لایب‌نیتس، داریم:

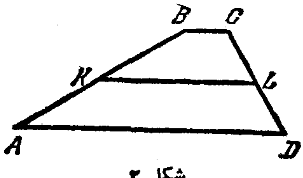
$$\int_{\circ}^{a}(۲-۴x+۳x^۲)dx=(۲x-۲x^۲+x^۳)\Big|_{\circ}^{a}=۲a-۲a^۲+a^۳$$

بنابراین، نابرابری مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$۲a-۲a_۲+a^۳\leqslant a\Longrightarrow a(a-۱)^۲\leqslant \circ$$

که با توجه به شرط $a>\circ$، $a=۱$ تنها جواب مسأله است.

۲. ABCD را ذوزنقۀ مفروض‌می گیریم (شکل ۲). $|AB|=۵$ ، $|CD|=۳$ و KL پاره‌خطی‌است که وسط دوساق را به هم وصل کرده است، اگر طول پاره خط هـای BC و AD را، به ترتیب، برابر x و y بگیریم، از آن‌جا که می‌توانیم‌دایره‌ای دراین چهار-ضلعی محاط کنیم، داریم:



شکل ۲

$$x+y=|AB|+|CD|=۸$$

و چون KL ، خط میانۀ ذوزنقه است، در نتیجه

$$|KL|=\frac{|BC|+|AD|}{۲}=۴$$

اگرطول ارتفاع ذرزنقه را برابر h بگیریم، به سادگی (ومثلاً به‌کمک قضیۀ

طالس) ثابت‌می‌شود که طول ارتفاع هریك از دو ذوزنقهٔ KBCL و AKLD برابراست با $\frac{h}{2}$. برای مساحت این ذوزنقه‌ها داریم:

$$S_{KBCL}=\frac{|BC|+|KL|}{2}\cdot\frac{|h|}{2}=\frac{x+4}{4}\cdot\frac{|h|}{2}$$

$$S_{AKLD}=\frac{|AD|+|KL|}{2}\cdot\frac{|h|}{2}=\frac{y+4}{2}\cdot\frac{|h|}{2}$$

به این ترتیب ، خواهیم داشت

$$\frac{S_{KBCL}}{S_{AKLD}}=\frac{5}{11}\Longrightarrow\frac{x+4}{y+4}=\frac{5}{11}\Longrightarrow 11x-5y=-24$$

و به دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 11x-5y=-24 \end{cases}$$

و جواب منحصر به‌فرد $x=1$ و $y=7$ به دست می‌آید.

پاسخ: $|BC|=1$ و $|AD|=7$

۳. ابتدا ، تابع را به‌ساده‌ترین صورت خود، تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=2\sin x\cos^2 x=2\sin x(1-\sin^2 x)=2\sin x-2\sin^3 x$$

نقطه‌های خاص (یا نقطه‌های بحرانی) $f(x)$ را جست وجو می‌کنیم. چون تابع $f(x)$ ، در همهٔ نقطه‌های محور عددی، مشتق‌پذیر است ، بنابراین، نقطه‌های خاص تابع $f(x)$ ، همان جواب‌های معادلهٔ $f'(x)$ است. $f'(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=2\cos x-6\sin^2 x\cos x=2\cos x(1-3\sin^2 x)$$

که اگرمعادله‌های $\cos x=0$ و $1-3\sin^2 x=0$ را ، در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ حل کنیم ، نقطه‌های بحرانی به‌دست می‌آید:

$$x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=-\frac{\pi}{2}, x_3=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_4=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x_5=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_6=-\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$$

که همه متعلق به بازهٔ موردنظر هستند. مقدار $f(x)$ را در نقطه‌های خاص و

در دو انتهای بازهٔ $[-\pi, \pi]$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x_۱)=f(x_۲)=۰,$$

$$f(x_۳)=f(x_۵)=۲\left[\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۳\right]=\frac{۲}{۳\sqrt{۳}},$$

$$f(x_۴)=f(x_۶)=۲\left[-\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۳\right]=-\frac{۴}{۳\sqrt{۳}},$$

$$f(-\pi)=f(\pi)=۰$$

کوچکترین مقدار، ازمقدارهای بالا، همان حداقل مقدارتابع $f(x)$، در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، خواهد بود. بنابراین

$$\min f(x)=f(x_۴)=-\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}\ (x\in[-\pi, \pi])$$

به‌این ترتیب، حل‌مسأله، منجر به‌آزمایش‌درستی نابرابری $-\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}>-\frac{۷}{۹}$ می‌شود. این نابرابری وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\sqrt{۳}<\frac{۷}{۴}$.

درستی نابرابری اخیر هم، از نابرابریِ روشن $\frac{۴۹}{۱۶}>۳$ ثابت می‌شود، یعنی در واقع داریم:

$$\min f(x)>-\frac{۷}{۹}\ (x\in[-\pi, \pi])$$

۰۴ اگر فرض کنیم $f(t)=t^۲-۳t+۳$، آن‌وقت، دستگاه مفروض‌را می‌توان چنین نوشت.

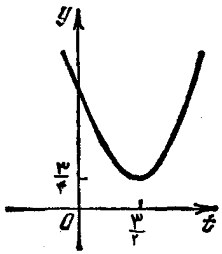
$$y^۳=۹f(x),\ z^۳=۹f(y),\ x^۳=۹f(z)$$

راه حل اول. از برابری $t^۲-۳t+۳=\left(t-\frac{۳}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}$ روشن می‌شود که حداقل مقدار تابع $f(t)$ برابر است با $\frac{۳}{۴}$ (شکل۳) واین مقدار در نقطهٔ $t=\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین، اگر $(x_۰, y_۰, z_۰)$ جوابی ازاین دستگاه باشد، داریم:

$$y_0^3 \geqslant \frac{27}{4},\ z_0^3 \geqslant \frac{27}{4},\ x_0^3 \geqslant \frac{27}{4}$$

که از آن جا، می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت:

$$x_0 > \frac{3}{2},\ y_0 > \frac{3}{2},\ z_0 > \frac{3}{2}$$



شکل ۳

تابع $f(t)$ هم، در حوزهٔ $t > \frac{3}{2}$، همواره صعودی است. بنابراین، اگر $(x_0 ، y_0 ، z_0)$ جوابی از دستگاه باشد، هر سه عدد x_0 ، y_0 ، z_0 در حوزه‌ای از تابع $f(t)$ قرار دارند که، در آن جا، تابع $f(t)$ به‌طور یکنوا (مونوتون) صعودی است. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $x_0 \geqslant y_0$. چون $x_0 > \frac{3}{2}$ و $y_0 > \frac{3}{2}$، پس $f(x_0) \geqslant f(y_0)$. از دو معادلهٔ اول دستگاه نتیجه می‌شود: $y_0^3 \geqslant z_0^3$، یعنی $y_0 \geqslant z_0$. چون $y_0 > \frac{3}{2}$ و $z_0 > \frac{3}{2}$، بنابراین $f(y_0) \geqslant f(z_0)$ یا $z_0^3 \geqslant x_0^3$، یعنی $z_0 \geqslant x_0$. به این ترتیب، رشته‌ای از نابرابری‌های

$$x_0 \geqslant y_0 \geqslant z_0 \geqslant x_0$$

به دست می‌آید که، در واقع، به معنای آن است که داشته باشیم:

$$x_0 = y_0 = z_0$$

۲) $x_0 \leqslant y_0$. در این حالت هم، با استدلالی شبیه حالت ۱)، به همان نتیجهٔ $x_0 = y_0 = z_0$ می‌رسیم.

جواب باید در هر سه معادله صدق کند. اگر فرض کنیم $x_0 = y_0 = z_0 = t_0$، هرسه معادلهٔ دستگاه به $(t_0 - 3)^3 = 0$ تبدیل می‌شود که تنها یک جواب $t_0 = 3$ را دارد؛ به‌این ترتیب، دستگاه مفروض، دارای جواب منحصر به فرد $(3 ، 3 ، 3)$ است.

راه حل دوم. چون سه جمله‌ای $t^2 - 3t + 3$ همیشه مثبت است، برای هرجواب $(x_0 ، y_0 ، z_0)$ این دستگاه، باید داشته باشیم:

$$x_۰^۳>۰ ، y_۰^۳>۰ ، z_۰^۳>۰ \Longrightarrow x_۰>۰ ، y_۰>۰ ، z_۰>۰$$

اگر سه معادله را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x_۰-۳)^۳+(y_۰-۳)^۳+(x_۰-۳)^۳=۰ \qquad (۱)$$

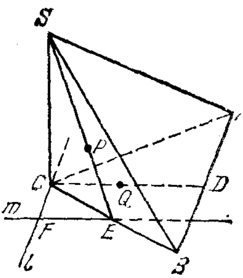
دو حالت ممکن است: $x_۰\geqslant ۳$ ، $۰<x_۰<۳$.

۱) اگر داشته‌باشیم $x_۰\geqslant ۳$ ، از معادلهٔ سوم دستگاه نتیجه می‌شود: $۹z_۰^۲-۲۷z_۰\geqslant ۰$ و چـون $z_۰>۰$ ، نتیجـه می‌شود: $z_۰\geqslant ۳$. به همین ترتیب، از معادلهٔ دوم به دست می‌آید: $y_۰\geqslant ۳$. به‌این ترتیب: $x_۰\geqslant ۳$ ، $y_۰\geqslant ۳$ ، $z_۰\geqslant ۳$. مجموع سه عدد غیرمنفی، وقتی بـرابـر صفر است کـه هرکدام ازآن‌ها برابر صفر باشد. درنتیجه، از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$x_۰=y_۰=z_۰=۳$$

۲) اگر داشته باشیم: $x_۰<۳$ ، با روشی شبیه حالت قبل از معادلهٔ سوم به‌دست می‌آید: $z_۰<۳$ و از معادلهٔ دوم دستگاه: $y_۰<۳$. بنا براین، در این حالت، باید $x_۰$ ، $y_۰$ و $z_۰$ ، هرسه از ۳ کوچکتر باشند که با (۱) ناسازگـار است. به این ترتیب، دستگـاه دارای جـواب منحصر است: $x_۰=۳$ ، $y_۰=۳$ و $z_۰=۳$.

۵. راه حل اول. وسط یال AB را D و وسط یال BC را E می‌نامیم. ازنقطهٔ C و در صفحهٔ ABC خط l را موازی AB و از نقطهٔ E ، بازهم درهمان صفحهٔ ABC، خط m را موازی CD رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطهای راست l و m را F می‌نامیم (شکل ۴).



شکل ۴

چون $CD \| FE$، بنابراین مقدار زاویهٔ بین‌خطهای راست CD و SE، برابر است بامقدار زاویهٔ بین‌خطهای‌راست SE و EF. چـون یال CS برصفحهٔ ABC عموداست، بنابراین $CS \perp FE$. ضمناً $FE \perp CF$ (زیـرا CD ارتفاع مثلث ABC است ، $EF \| CD$ ، $CF \| AB$). بنا براین خط راست FE برصفحهٔ SEF عمود است، یعنی $EF \perp FS$. به‌این ترتیب، ثابت شد کـه مثلث SEF قائم‌الزاویه است؛ پس $tg\widehat{SEF}=\dfrac{|FS|}{|FE|}$. چون $|CE|=|EB|$

و $CF\|AB$ ، بنابراین

$$|FE|=\frac{۱}{۲}|CD|=\frac{\sqrt{۳}}{۴}|AB|=\sqrt{۶},\ |CF|=\frac{۱}{۲}|BD|=\frac{۱}{۴}|AB|=\sqrt{۲}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ SCF (SC برصفحهٔ ABC عمود است) ، به‌دست می‌آید:

$$|FS|=\sqrt{|CF|^{۲}+|CS|^{۲}}=\sqrt{۲+۴}=\sqrt{۶}$$

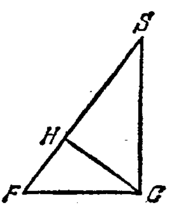
در نتیجه: $tg\widehat{SEF}=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}}=۱$ و زاویهٔ مطلوب ، برابر است با $\frac{\pi}{۴}$.

چون $CD\|FE$ ، بنابراین CD موازی صفحهٔ SEF می‌شود ، یعنی فاصلهٔ بین خط‌های راست CD و SE برابر است با فاصلهٔ بین CD و صفحهٔ SEF. از همین جا نتیجه می‌شود که فاصلهٔ مجهول برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ C از صفحهٔ SEF. این فاصله را با h نشان می‌دهیم. برای حجم هرم SCFE ، این برابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$V_{SCFE}=\frac{۱}{۳}S_{CFE}\cdot|CS|=\frac{۱}{۶}|CF|\cdot|FE|\cdot|CS|=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳},$$

$$V_{SCFE}=\frac{۱}{۳}h\cdot S_{EFS}=\frac{۱}{۳}h\cdot\frac{۱}{۲}|FE|\cdot|FS|=\frac{۱}{۶}h(\sqrt{۶})^{۲}=h$$

از آن نتیجه می‌شود: $h=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$.



شکل ۵

h را به طریق دیگری هم می‌توان محاسبه کرد. درصفحهٔ SCF، از نقطهٔ C ، عمود CH را بر SF فرود می‌آوریم (شکل ۵). چون FE برصفحهٔ SCF عمود است، بنابراین $CH\perp FE$ ، یعنی خط راست CH برصفحهٔ SFE عمود است: H تصویر نقطهٔ C برصفحهٔ SEF است و $|CH|=h$. از تشابه مثلث‌های CFH و CFS به دست می‌آید:

$\frac{|CF|}{|FS|}=\frac{|CH|}{|CS|}$ یا $\frac{|CH|}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}$ و از آن‌جا: $h=|CH|=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$.

راه حل دوم. دستگاهی از محورهای مختصات را در نظر می‌گیریم که ، در آن نقطهٔ C مبدأ ، خط راست CF محور طول ، خط راست CD

محور عرض و خط راست CS محور ارتفاع باشد؛ پاره‌خط به طول ۱ را واحد به‌حساب می‌آوریم. مختصات بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{SE}$، در این‌دستگاه مختصات، چنین است:

$$\overrightarrow{CD}=\left(۰,\frac{\sqrt{۳}}{۲}|CB|,۰\right)=(۰,۲\sqrt{۶},۰),$$

$$\overrightarrow{SE}=\left(\frac{|AB|}{۴},\frac{|CD|}{۲},-|CS|\right)=(\sqrt{۲},\sqrt{۶},-۲)$$

و بنابراین

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SE}})=\frac{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SE})}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{SE}|}=\frac{۱۲}{۲\sqrt{۶}\cdot\sqrt{۱۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

[منظور از $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{SE})$، حاصل‌ضرب اسکالر بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{SE}$ است].

یعنی زاویهٔ مطلوب برابر است با $\frac{\pi}{۴}$. PQ را (شکل ۴)، عمود مشترک خط‌های راست SE و CD می‌گیریم ($P\in SE$ و $Q\in CD$). عددهای α و β وجود دارند، به نحوی‌که داشته باشیم: $\overrightarrow{SP}=\alpha\overrightarrow{SE}$ و $\overrightarrow{CQ}=\beta\overrightarrow{CD}$.
روشن است که

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CQ}=-\alpha\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{CS}+\beta\overrightarrow{CD}$$

و یا به‌صورت مختصاتی:

$$\overrightarrow{PQ}=(-\alpha\sqrt{۲},-\alpha\sqrt{۶}+\beta\cdot۲\sqrt{۶},۲\alpha-۲)$$

چون PQ بر CD و SF عمود است بنابراین $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{CD})=۰$ و $(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{SE})=۰$. اگر این دو شرط را به صورت مختصاتی بنویسیم، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}(-\alpha\sqrt{۶}+\beta\cdot۲\sqrt{۶})۲\sqrt{۶}=۰\\ -\alpha\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۲}+(-\alpha\sqrt{۶}+\beta\cdot۲\sqrt{۶})\sqrt{۶}+(۲\alpha-۲)(-۲)=۰\end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases}\alpha=۲\beta\\ -۳\alpha+۳\beta+۱=۰\end{cases}$$

و از آن جا: $\alpha=\frac{۲}{۳}$، $\beta=\frac{۱}{۳}$. به این ترتیب:

$$\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},\ ۰,\ -\frac{۲}{۳}\right) \text{ و } |PQ|=\sqrt{\frac{۸}{۹}+\frac{۴}{۹}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

پاسخ: زاویهٔ مطلوب برابر $\frac{\pi}{۴}$ و فاصلهٔ مطلوب برابر $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ است.

۶. اگر همهٔ جمله‌ها را به سمت چپ نابرابری منتقل کنیم. پس‌از اختصار، به دست می‌آید:

$$\frac{x^۲-۴x+۴}{x-۱}\leqslant ۰ \Longrightarrow \frac{(x-۲)^۲}{x-۱}\leqslant ۰$$

که به‌ازای $x=۲$ برقرار است. در حوزهٔ $x\neq ۲$، این نابرابری هم‌ارز است با نابرابری $\frac{۱}{x-۱}\leqslant ۰$، و چون کسر $\frac{۱}{x-۱}$ نمی‌تواند برابر صفر شود، سرانجام به نابرابری $\frac{۱}{x-۱}<۰$ یا $x-۱<۰$ می‌رسیم که، از آن، به دست می‌آید: $x<۱$.

پاسخ: $x<۱$ و $x=۲$.

۷. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، برای این معادله، عبارت‌است از همهٔ مقدارهایی از x که، به‌طور هم‌زمان، دردو نابرابری $\sin x>۰$ و $\cos x>۰$ صدق کنند. دراین حوزه، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\sqrt{۳}\cos x+\sqrt{۶}=۳\sin x \Longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x-\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

که به‌سادگی چنین می‌شود:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲} \quad (k\in Z) \\ \\ x=۲k'\pi+\frac{۱۱\pi}{۱۲} (k'\in Z) \end{array}\right.$$

از این جواب‌ها، آن‌هائی جواب معادلهٔ اصلی هستندکه در هر دو شرط $\sin x>۰$ و $\cos x>۰$ صدق کنند. به‌سادگی دیده می‌شود که تنها رشته جواب‌های اولی با شرط‌ها سازگارند.

پاسخ: $x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\ (k\in Z)$.

گروه دوم. ۱. $\alpha = ۳$ ؛ ۲. $h = ۴$ ؛ ۴. $(۱-، ۱-، ۱-)$ ؛ ۵. $\frac{\pi}{۳}$ ، ۶. $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ؛ $x < -۲$ ، $-۲ < x < -۱$ ؛ ۷. $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$ $(k \in Z)$.

گروه سوم. ۱. $b = ۲$ ؛ ۲. ۲ ؛ ۱۴ ؛ ۴. $(۲ ، ۲ ، ۲)$؛ ۵. $\frac{\pi}{۳}$؛ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ؛ ۶. $x < -۳$ ، $x = ۳$ ؛ ۷. $\frac{\pi}{۱۲} + ۲k\pi$ $(k \in Z)$.

گروه چهارم. ۱. $q = ۴$ ؛ ۲. $h = ۸$ ؛ ۴. $(۲- ، ۲- ، ۲-)$ ؛ ۵. $\frac{\pi}{۳}$؛ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ؛ ۶. $x < -۳$ ، $-۳ < x < ۱$ ؛ ۷. $\frac{\pi}{۱۲} + ۲k\pi$ $(k \in Z)$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. عدد مطلوب‌را x می‌گیریم. چون $(۴۰\sqrt{۲})^۲ = ۳۲۰۰$ و $۵۷^۲ = ۳۲۴۹$، بنابراین $۵۷ > ۴۰\sqrt{۲}$ و در نتیجه

$$x = \sqrt{۵۷ - ۴۰\sqrt{۲}} - \sqrt{۵۷ + ۴۰\sqrt{۲}} \qquad (۱)$$

راه‌حل اول. اگر از قاعدهٔ محاسبهٔ رادیکال‌های مرکب استفاده‌کنیم ، داریم :

$$\sqrt{۵۷ > ۴۰\sqrt{۲}} =$$

$$= \sqrt{\frac{۵۷ + \sqrt{۳۲۴۹ - ۳۲۰۰}}{۲}} - \sqrt{\frac{۵۷ - \sqrt{۳۲۴۹ - ۳۲۰۰}}{۲}} =$$

$$= \sqrt{\frac{۵۷ + ۷}{۲}} - \sqrt{\frac{۵۷ - ۷}{۲}} = ۴\sqrt{۲} - ۵$$

$$\sqrt{۵۷ + ۴۰\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} + ۵$$

و بنابراین:

$$x=(4\sqrt{2}-5)-(4\sqrt{2}+5)=-10$$

راه حل دوم. دو طرف برابری(۱) را مجذور می کنیم، به‌دست می آید:

$$x^2=57-40\sqrt{2}-2\sqrt{3249-3200}+57+40\sqrt{2}=100$$

یعنی x، یکی‌ازدوعدد ۱۰ و ۱۰ — است؛ ولی روشن است که x بایدعددی منفی باشد ودرنتیجه: $x=-10$.

۴. انتگرال سمت چپ برابری‌را محاسبه می کنیم:

$$\int_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)dx=\sin(x+\alpha^2)\Big|_0^{\alpha}=\sin(\alpha+\alpha^2)-\sin\alpha^2$$

وبنا براین، معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی آید:

$$\sin(\alpha+\alpha^2)-\sin\alpha^2=\sin\alpha$$

که به‌ترتیب، به‌این‌صورت، به‌معادله‌های هم‌ارزخود، تبدیل می‌شود:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha^2\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha^2\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]=0,$$

$$-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha^2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ معادله‌های زیرهم‌ارزاست.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=0,\qquad \sin\frac{\alpha^2}{2}=0,\qquad \sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$$

جواب‌های دو معادلهٔ اول ودوم، عبارتنداز $\alpha=2k\pi\ (k\in Z)$ و $\alpha=\pm\sqrt{2n\pi}\ (n=0,1,2,\dots)$ و معادلهٔ سوم هم‌ارزاست با مجموعهٔ نامتناهی معادله‌های $\alpha^2+\alpha=2l\pi\ (l\in Z)$. مبیّن این معادله برابر است با $8l\pi+1$ و، در نتیجه، این معادله‌ها، به ازای مقدارهای درست و منفی l جواب ندارند. درحالتی که l برابر با یکی‌ازعددهای ۰، ۱، ۲،... باشد،معادلهٔ $\alpha^2+\alpha=2l\pi$ دارای دو ریشهٔ $\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{8l\pi+1}}{2}$ می‌باشد.

بنابراین، جواب‌های معادلهٔ $\sin\frac{\alpha^2+\alpha}{2}=0$ چنین است:

$$\alpha=\frac{-۱\pm\sqrt{۸l\pi+۱}}{۲}\qquad (l=۰،۱،۲، \ldots)$$

اکنون باید از بین مجموعه‌های جواب، آن‌هایی را پیدا کنیم که در بازهٔ [۲،۳] قراردارند. به‌سادگی دیده می‌شود که هیچ کدام ازجواب‌های معادلهٔ اول، دراین بازه، قرارندارند؛ از بین جواب‌های معادلهٔ دوم‌هم، تنها یکی در بازهٔ [۳ ، ۲] واقع‌است: $\alpha=\sqrt{۲\pi}$. عددهای به‌صورت $\alpha=\frac{-۱-\sqrt{۸l\pi+۱}}{۲}$ منفی و، بنابراین، دربیرون فاصلهٔ مورد نظرند. ازجواب‌ها به‌صورت $\alpha=\frac{-۱+\sqrt{۸l\pi+۱}}{۲}$، تنها آن‌هایی‌دربازهٔ [۳ ، ۲] واقع‌اند، که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$۲\leqslant\frac{-۱+\sqrt{۸l\pi+۱}}{۲}\leqslant۳$$

ویا

$$۵\leqslant\sqrt{۸l\pi+۱}\leqslant۷$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$\frac{۳}{\pi}\leqslant l\leqslant\frac{۶}{\pi}$$

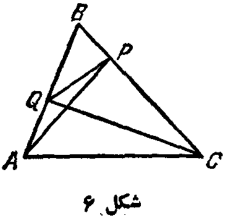
وروشن است که تنها $l=۱$، دراین نابرابری‌ها صدق می‌کند وجواب‌متناظر آن $\alpha=\frac{-۱+\sqrt{۸\pi+۱}}{۲}$ است.

پاسخ: $\sqrt{۲\pi}$ ، $\frac{-۱+\sqrt{۸\pi+۱}}{۲}$.

۳۰. ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABP و BCQ به‌دست می‌آید (شکل ۶):

$$\frac{|BP|}{|AB|}=\cos\hat{B},\quad \frac{|BQ|}{|BC|}=\cos\hat{B}$$

ازاین برابری‌ها نتیجه می‌شود که دو مثلث BPQ و ABC متشابهند و، ضمناً، ضریب تشابه برابر است با $\cos B$. ازآن‌جا که نسبت مساحت‌های دوچند ضلعی متشابه، برابر است با



شکل ۶

مجذور ضریب تشابه آن‌ها، بنابراین

$$\cos^{۲} B = \frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۱۸} = \frac{۱}{۹}$$

بنابرفرض، مثلث ABC، زاویه‌های حاده دارد و ، بنابراین: $\cos B = \frac{۱}{۳}$،

از تشابه مثلث‌های ABC و BPQ به‌دست می‌آید:

$$\frac{|PQ|}{|AC|} = \cos B = \frac{۱}{۳} \implies |AC| = ۳|PQ| = ۶\sqrt{۲}$$

شعاع دایرهٔ محیطی‌مثلث ABC را R می گیریم. بنابرقضیهٔ سینوس‌هاداریم:

$$۲R = \frac{|AC|}{\sin B} = \frac{۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}} = ۹ \implies R = \frac{۹}{۲}$$

---

۴. $a_{\circ}$ را مقداری ازپارامتر a می گیریم که، به‌ازای آن، دستگاه مفروض دارای جواب‌است و $(x_{\circ} ، y_{\circ})$ راجواب متناظر آن فرض می کنیم. دراین صورت، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -x_{\circ}^{۲} - ۲x_{\circ}y_{\circ} + ۷y_{\circ}^{۲} \leqslant ۱ - \dfrac{۲}{a_{\circ}+۱} \\ ۳x_{\circ}^{۲} + ۱۰x_{\circ}y_{\circ} - ۵y_{\circ}^{۲} \leqslant -۲ \end{cases}$$

اگر نابرابری اول را در ۲ ضرب و، سپس، با نابرابری دوم جمع کنیم، به‌دست می آید:

$$x_{\circ}^{۲} + ۶x_{\circ}y_{\circ} + ۹y_{\circ}^{۲} \leqslant \frac{-۴}{a_{\circ}+۱} \implies (x_{\circ} + ۳y_{\circ})^{۲} \leqslant \frac{-۴}{a_{\circ}+۱}$$

که ازآن‌جا نتیجه می‌شود: $\frac{-۴}{a_{\circ}+۱} \geqslant \circ$، یعنی $a_{\circ} < -۱$. به‌این ترتیب، همهٔ مقدارهای مجهول پارامتر، درحوزهٔ $a < -۱$ قراردارند.

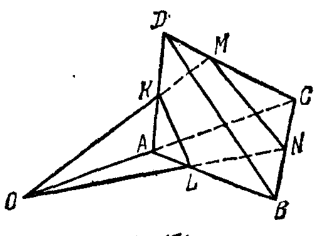
اکنون ثابت می کنیم که، برای هـرمقدار a، کـه با شرط $a > -۱$ سازگار باشد، دستگاه مفروض دارای جواب است. از آن‌جا که، بـرای $a < -۱$، داریم: $\frac{۱-a}{۱+a} < -۱$، کافی است ثابت‌کنیم که دستگاه

$$\begin{cases} x^{2}+2xy-7y^{2}=-1 \\ 3x^{2}+10xy-5y^{2}=-2 \end{cases} \qquad (1)$$

دارای جواب است. هرجوابی ازدستگاه(۱)، ضمناً جوابی ازدستگاه‌مفروض نامعادله‌ها است. به‌حل دستگاه(۱) می‌پردازیم. اگر معادلهٔ اول را در ۲— ضرب و، سپس، با معادلهٔ دوم جمع کنیم، به‌معادلهٔ $(x+3y)^{2}=0$ می‌رسیم و، ازآن‌جا: $x=-3y$. اگردریکی ازمعادله‌های(۱)، $-3y$ را به‌جای x قراردهیم، به‌معادلهٔ $4y^{2}=1$ می‌رسیم که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $y_1=\frac{1}{2}$ و $y_2=-\frac{1}{2}$ و، در نتیجه: $x_1=-\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{3}{2}$. آزمایش نشان می‌دهد که هر دوزوج مقدارهای $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ و $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$، در دستگاه(۱) و، بنابراین، در دستگاه نامعادله‌ها (به‌ازای $a<-1$) صدق می‌کنند.

پاسخ: $a<-1$.

۵. K را وسط یال AD و N را وسط یال BC می‌گیریم (شکل۷). خط‌های راست KM و AC روی صفحهٔ ADC قرار دارند و باهم موازی نیستند؛ محل برخورد آن‌هارا O می‌گیریم. چون نقطه‌های O و N روی صفحهٔ مقطع وروی صفحهٔ ABC قراردارند، بنابراین، صفحهٔ KMN صفحهٔ ABC را، روی خط راست ON قطع می‌کند.



شکل ۷

نقطهٔ برخورد خط‌های راست ON و AB را L می‌نامیم. مقطع هرم، با صفحهٔ مورد نظرصورت مسأله، چهارضلعی KMNL است که باید مساحت آن‌را محاسبه‌کنیم. دو راه حل، برای این مسأله، می‌دهیم.

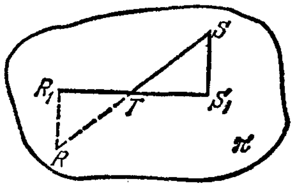
راه حل اول. ابتدا ثابت می‌کنیم، مساحت‌های دو مثلث KMN و KLN برابرند و، سپس مساحت مثلث KMN را محاسبه می‌کنیم، از نقطهٔ K، صفحهٔ π را موازی دوخط راست ومتنافر AB و CD می‌گذرانیم (برای این منظور، کافی است خط‌های راست $KC_1 \| DC$ و $KB_1 \| AB$ را رسم کنیم، صفحهٔ K_1CB_1، همان صفحهٔ مطلوب است). چون $CD \| \pi$،

همهٔ نقطه‌های خط راست CD ازصفحهٔ π، به‌یك فاصله‌اند. به همین ترتیب، همهٔ نقطه‌های خط راست AB هم، ازصفحهٔ π به‌یك فاصله‌اند. از برابری $|AK|=|KD|$ نتیجه می‌شود کــه نقطه‌های A و D، از صفحهٔ π، به یك فاصله‌اند. به‌این ترتیب، هر دو نقطهٔ دلخواه، روی خطهای راست AB و CD، ازصفحهٔ π، به‌یك فاصله می‌شوند.

اکنون ثابت می کنیم که، اگردونقطهٔ R و S واقع در دوطرف صفحهٔ π، ازآن به‌یك فاصله باشند، نقطهٔ T، محل برخورد RS با صفحهٔ π، پارخط RS را به‌دوقسمت برابر تقسیم می کند. (شکل۸). درواقع چون مثلث‌های RTR_1 و STS_1 قائم‌الزاویه‌اند، بنابراین:

$$|RT|=\frac{|RR_1|}{\sin(RTR_1)}=\frac{|SS_1|}{\sin(STS_1)}=|SS_1|$$

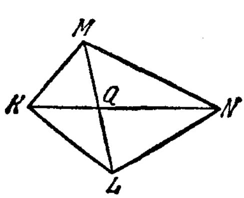
از این‌جا، نتیجه می‌شود که نقطه‌های K، N و Q (Q وسط پاره‌خط ML است)، که روی صفحهٔ KMN قــرار دارنـد، روی صفحــهٔ π هم هستند. و این، به‌معنای آن است که نقطهٔ Q،وسط پاره‌خط LM، روی خط راست KN واقع است (شکل۹).



شکل ۸

از برابری $|MQ|=|QL|$ نتیجه‌می‌شود که‌نقطه‌های M و L ازخطراست KN به‌یك‌فاصله‌اندو، بنابراین:

$S_{KLN}=S_{KMN}$. یعنی $S_{KMNL}=2S_{KMN}$



شکل ۹

برای این که مساحت مثلث KMNرا محـاسبه کنیم، حجم هرم AKMN را بــه دو طریق به دست می‌آوریم. بنابه فرض مساله، فـاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ KMN، بــرابــر است با ۱ . درنتیجه

$$V_{AKMN}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot S_{KMN}$$

از طـرف دیگــر ، $V_{AKMN}=\frac{1}{3}h_N\cdot S_{AKM}$ ، که در آن ، h_Nعبارت

است از فاصلهٔ نقطهٔ N تا صفحهٔ ADC. چون $|AK|=\frac{1}{2}|AD|$ ، پس

$S_{AKM}=\frac{1}{2}S_{ADM}$. سپس $|DM|=\frac{2}{5}|DC|$ ، بنا براین

$S_{ADM}=\frac{2}{5}S_{ADC}$. به‌این‌ترتیب $S_{AKM}=\frac{1}{5}S_{ADC}$. با توجه به این‌که

$|CN|=\frac{1}{2}|CB|$، داریم:

$h_N=\frac{1}{2}h_B$ (h_B، فاصلهٔ نقطهٔ B از صفحهٔ ADC است). بنا براین

$$V_{AKMN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ h_B\cdot\frac{1}{5}\ S_{ADC}=\frac{1}{10}\ V_{ABCD}\ =\frac{1}{2}$$

بالاخره به‌دست می‌آید:

$$S_{KMN}=3\ V_{AKMN}=\frac{3}{2}\Longrightarrow\ S_{KMNL}\ =3$$

راه حل دوم. اگر هرم AKMNL را درنظر بگیریم و توجه کنیم که فاصلهٔ A ازصفحهٔ KMNL برابراست با ۱، خواهیم داشت.

$$V_{AKMNL}=\frac{1}{3}.1.S_{KMNL}$$

ازطرف دیگر $V_{AKMNL}=V_{OMNA}-V_{OKLA}$. حجم هرم‌های OMNA و OKLA را، می‌توان از دستورهای زیر به‌دست آورد:

$$V_{OMNA}=\frac{1}{3}\ h_M.S_{OAN}\ ;\ V_{OKLA}=\frac{1}{3}\ h_K.S_{OAL}$$

که درآن‌ها، h_M و h_K، به ترتیب، عبارتند ازفاصلهٔ نقطه‌های M و K از

صفحهٔ ABC. باتوجه‌به‌این‌که $|CM|=\frac{3}{5}|CD|$ و $|AK|=\frac{1}{2}|AD|$ ،

معلوم می‌شود که: $h_M=\frac{3}{5}h_D$ و $h_K=\frac{1}{2}h_D$ (h_D، فاصلهٔ نقطهٔ D ازصفحهٔ ABC است).

برای این‌که مساحت مثلث‌های OAN و OAL رامحاسبه‌کنیم، باید

نسبت‌های $\frac{|OA|}{|AC|}$ و $\frac{|AL|}{|AB|}$ را به‌دست آوریم (شکل۷). برای این منظور، از بردارها استفاده می‌کنیم. x و y را عددهایی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $\overrightarrow{AO}=x.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AL}=y.\overrightarrow{AB}$. اگر در صفحهٔ ADC، بردارهای $\overrightarrow{MK}$ و $\overrightarrow{KO}$ به بردارهای غیر واقع بریك امتداد $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DA}$ تجزیه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{MK}=\frac{۲}{۵}\overrightarrow{CD}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{KO}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DA}+x.\overrightarrow{CA}=x\cdot\overrightarrow{CD}+(\frac{۱}{۲}+x)\cdot\overrightarrow{DA}$$

$\overrightarrow{a}$ را بردارغیرصفری از صفحهٔ ADC می‌گیریم که برخط راست KMعمود باشد، دراین صورت $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{MK})=۰$ و $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{KO})=۰$، از برابری اول به‌دست می‌آید: $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{DA})=-\frac{۴}{۵}(\overrightarrow{a},\overrightarrow{CD})$؛ دومی به‌این معنااست که

$$۰=x\cdot(\overrightarrow{a},\overrightarrow{DC})+(\frac{۱}{۲}+x)\cdot(-\frac{۴}{۵}).(\overrightarrow{a},\overrightarrow{CD})=$$

$$(\frac{۱}{۵}x-\frac{۲}{۵}).(\overrightarrow{a},\overrightarrow{CD})$$

از آن‌جا که بردارهای $\overrightarrow{a}$ و CD بردارهای صفر نیستند و، ضمناً، بردار $\overrightarrow{a}$ بر بردار $\overrightarrow{CD}$ عمود نیست، بنابراین: $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{DC})\neq۰$ یعنی $x=۲$ یا $\overrightarrow{AO}=۲\overrightarrow{CA}$. به‌همین ترتیب، از تجزیهٔ بردارهای $\overrightarrow{OL}$ و$\overrightarrow{LN}$، در صفحهٔ ABC، به‌بردارهای غیرواقع بریك امتداد $\overrightarrow{CA}$ و$\overrightarrow{AB}$، به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AO}=y\cdot\overrightarrow{AB}-۲\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BN}=(۱-y)\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-y\right)\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$\overrightarrow{b}$ را برداری غیرصفر درصفحهٔ ABC می‌گیریم که برخط راست LN عمود باشد. خـواهیم داشت: $(\overrightarrow{b},\overrightarrow{OL})=0$ و $(\overrightarrow{b},\overrightarrow{LN})=0$. از برابری اول به‌دست می‌آید:

$$(\overrightarrow{b},\overrightarrow{CA})=\frac{y}{2}\cdot(\overrightarrow{b},\overrightarrow{AB})$$

وسپس، از برابری دوم

$$0=\left(\frac{1}{2}-y\right)\cdot(\overrightarrow{b},\overrightarrow{AB})-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b},\overrightarrow{AB}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}y\right)\cdot(b,\overrightarrow{AB})$$

ازآن‌جاکه $(\overrightarrow{b},\overrightarrow{AB})\neq 0$، باید داشته‌باشیم: $\frac{1}{2}-\frac{5}{4}y=0$ یا $y=\frac{2}{5}$ و $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. چون $|AL|=\frac{2}{5}|AB|$ و $|CN|=\frac{1}{2}|CB|$، بنابـراین $h_L=\frac{2}{5}h_B$ و $h_N=\frac{1}{2}h_B$ (h_L، h_B و h_N، به ترتیب، عبارتند ازفاصلهٔ نقطه‌های L، B و N ازخط راست AC). داریم:

$$S_{OAL}=\frac{1}{2}|OA|\ h_L=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ |AC|\cdot\frac{2}{5}\ h_B=\frac{4}{5}\ S_{ABC}$$

$$S_{OAN}=\frac{1}{2}|OA|\ h_N=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|AC|\cdot\frac{1}{2}\ h_B=S_{ABC}$$

بنابراین

$$V_{OMNA}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot h_D\cdot S_{ABC}=\frac{3}{5}\ V_{ABCD}=3,$$

$$V_{OKLA}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot h_D\cdot\frac{4}{5}S_{ABC}=\frac{2}{5}V_{ABCD}=2$$

$$V_{AKMNL}=3-2=1$$

وچون S_{KNML} ۱۰ · $\frac{۱}{۳} = V_{AKMNL}$، بنابراین $S_{KMNL} = ۳$.

پاسخ: مساحت مقطع، برابراست با ۳.

۶. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$۴^{۲cos^۲x-۱}+۴^{cos^۲x}=۳$$

که اگر $۴^{cos^۲x}$ را با t نشان دهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۴}t^۲+t-۳=۰$$

ریشه‌های این‌معادلهٔ‌درجه‌دوم، چنین‌است: $t_1=-۶$ و $t_۲=۲$. به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض، به‌مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر، تبدیل می‌شود:

$$۴^{cos^۲x}=-۶\ ,\ ۴^{cos^۲x}=۲$$

معادلهٔ اول، ریشه‌ای ندارد، زیرا عدد ۶−، درحوزهٔ مقدارهای تابع‌نمائی نیست. معادلهٔ دوم، بامعادلهٔ $cos^۲x=\frac{۱}{۲}$ هم‌ارز است‌که، به‌نوبهٔ‌خود،هم‌ارز مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرمی‌شود:

$$cosx=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ cosx=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

جواب‌های معادلهٔ اول $(k\in Z)x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ و جواب‌هـای معادلهٔ دوم $(n\in Z)x=۲n\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ است. بین این جواب‌ها، تنهایکی دربازهٔ $[\frac{۳}{۴}،۱]$ قرار دارد.

پاسخ: $x=\frac{\pi}{۴}$.

پاسخ گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. ۶−. ۲. $-\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$ ، $\frac{۱-\sqrt{۱+۲\pi}}{۲}$؛

۳. $\frac{۲۴}{۵}$؛ ۴. $b<-\frac{۵}{۲}$؛ ۵. $\frac{۴۰}{۳}$؛ ۶. $\frac{۳\pi}{۴}$.

گروه سوم. ۱. -۱۰؛ ۲. $\sqrt{\frac{۳\pi}{۲}}$؛ ۳. ۸؛ ۴. $\alpha > -۲$؛

۵. $\frac{۲}{۵}$؛ ۶. $-\frac{\pi}{۲}$.

گروه چهارم. ۱. -۸؛ ۲. $-\sqrt{۲\pi}$ و $\frac{۱-\sqrt{۱+۱۴\pi}}{۲}$؛

۳. ۸؛ ۴. $\alpha > -\frac{۱}{۲}$؛ ۵. ۶؛ ۶. $\frac{۵\pi}{۴}$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. معادلهٔ مفروض، با معادلهٔ $۲sin^۲x+۵sinx-۳=۰$ هم‌ارز است. معادلهٔ درجه دوم $۲t^۲+۵t-۳=۰$ دارای ریشه‌های $t_۱=-۳$ و $t_۲=\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین، معادلهٔ مفروض، هم‌ارزمجموعهٔ دو معادلهٔ زیراست:

$$sinx=-۳،\quad sinx=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ اول جواب ندارد. معادلهٔ دوم، دارای دورشته جواب است:

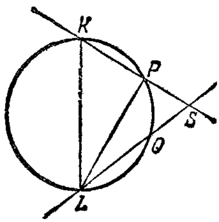
$$x_۱=۲n\pi+\frac{\pi}{۶}\ (n\in Z)،\quad x_۲=۲m\pi+\frac{۵\pi}{۶}\ (m\in Z)$$

ازاین جواب‌ها، بایدآن‌هایی را انتخاب کنیم که درشرط $cosx\geqslant ۰$ صدق کنند. برای هرجواب از رشتهٔ اول داریم: $cosx_۱=cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}>۰$ و برای هرجـواب از رشتهٔ دوم: $cosx_۲=cos\frac{۵\pi}{۶}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}<۰$.

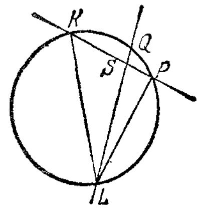
پاسخ: $x=۲n\pi+\frac{\pi}{۶}$ $(n\in Z)$.

۲. ازشرط مسأله نتیجه می‌شود که نقطهٔ S، محل برخورد خط‌های راست KP و LQ، غیراز نقطه‌های P و Q است. یعنی نقطه‌های P و Q هم، متمایزند.

دو حالت، برای وضع نقطه‌های P و Q برمحیط دایره، درنظر می‌گیریم (شکل‌های ۱۰ و ۱۱).



شکل ۱۱



شکل ۱۰

ثابت می‌کنیم که حالت شکل ۱۰ ممکن نیست. درواقع، دراین‌حالت، زاویه‌های PQL و PKL، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یك کمان‌اند و بنابراین: $\widehat{PQL}=\widehat{PKL}=\frac{\pi}{۳}$. طبق شرط، مثلث PSQ متساوی‌الساقین است، بنابراین: $\widehat{SPQ}=\widehat{PQL}\frac{\pi}{۳}$ و $\widehat{KSL}=\widehat{QSP}=\pi-۲\times\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$.

ولی، زاویهٔ KSL، زاویهٔ خارجی مثلث قائم‌الزاویهٔ PSL است (زاویهٔ KPL روبه‌روی قطر است). به یك تناقض می‌رسیم:

$$\frac{\pi}{۳}=\widehat{KSL}>\widehat{SPL}=\frac{\pi}{۲}.$$

اکنون به‌حالت شکل ۱۱ می‌پردازیم. چون چهارضلعی KPQL، دردایره‌ای محاط است، بنابراین: $\widehat{PQL}=\pi-\widehat{PKL}$. یعنی $\widehat{PQL}=\frac{۲\pi}{۳}$. ولی، دراین صورت: $\widehat{PQS}=\pi-\widehat{PQL}=\frac{\pi}{۳}$. مثلث PQS، بنابر شرط، متساوی‌الساقین‌است؛ بنابراین: $\widehat{QPS}=\widehat{PQS}=\frac{\pi}{۳}$ و $\widehat{PQS}=\pi-۲\times\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۳}$. مثلث‌های PSL و PKL قائم‌الزاویه‌اند؛ درنتیجه داریم:

$$|PL|=|PS|.\, tg\widehat{PSQ}=tg\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$$

$$|KL|=|PL|:\sin\widehat{P}KL=\sqrt{۳}:\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲$$

وشعاع دایره، برابر $\frac{۱}{۲}|KL|$، یعنی ۱ می‌باشد.

پاسخ: شعاع دایره برابراست با ۱.

۰۳. تابع $y(x)$ را به‌طورجداگانه، درمجموعه‌های $۰\leqslant x\leqslant ۲$ و $۲<x\leqslant ۳$ مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

a) x را متعلق به مجموعهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$ می‌گیریم، در این صورت $|x-۲|=-x+۲$ وتابع مفروض را، می‌توان چنین نوشت:

$$y(x)=x^۳-۲x(-x+۲)=x^۳+۲x^۲-۴x$$

این تابع، درهرنقطه ازفاصلهٔ $۰<x<۲$ مشتق‌پذیراست وداریم:

$$y'(x)=۳x^۲+۴x-۴$$

مشتق، دو ریشه دارد : $x_۱=-۲$ و $x_۲=\frac{۲}{۳}$، کــه تنها دومی در فاصلـهٔ $۰<x<۲$ قرار دارد. به سادگی معلوم می‌شود که مشتق $y'(x)$ درفاصلهٔ $۰<x<\frac{۲}{۳}$ منفی، در فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}<x<۲$ مثبت و در نقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ برابرصفر است. بنابراین، درفاصلهٔ $۰<x<۲$، دارای می‌نیمم منحصر به‌فرد درنقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ است.

b) x رامتعلق به‌مجموعهٔ $۲<x\leqslant ۳$ می‌گیریم؛ دراین‌صورت‌داریم: $|x-۲|=x-۲$ و تابع ما به این صورت درمی‌آید:

$$y(x)=x^۳-۲x(x-۲)=x^۳-۲x^۲+۴x$$

تابع در هرنقطه از فاصلهٔ $۲<x<۳$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$y'(x)=۳x^۲-۴x+۴$$

مبین سه‌جمله‌ای $۳x^۲-۴x+۴$ برابراست با ۳۲ــ و ، بنابراین، مشتق $y'(x)$ ، در تمامی فاصلهٔ $۲<x<۳$ مثبت است ، یعنی تابع $y(x)$ ، در این فاصله ، می‌نیممی ندارد.

تنها این می ماند که در بازهٔ نقطهٔ $x=2$، واقع در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 3$ بررسی کنیم. دیدیم که تابع $y(x)$، در فاصلهٔ $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$ به صورت $y(x)=x^3+2x^2-4x$ درآمد. و مشتق این تابع، درمجموعهٔ $x>\frac{2}{3}$، مثبت است، بنابراین، چندجمله‌ای، $x>\frac{2}{3}$ ، و طبعاً برای $\frac{2}{3}<x\leqslant 2$ ، صعودی است. به این ترتیب، در دوروبر نقطهٔ $x=2$ ، نقطه‌هایی پیدا می‌شود، که برای آن‌ها، $y(x)$ از $y(2)$ کوچکتراست و، در نتیجه، نقطهٔ $x=2$ نمی‌تواند نقطهٔ می‌نیمم باشد.

تابع $y(x)$، دربازهٔ $[0, 2]$، به‌صورت‌چندجمله‌ای x^3+2x^2-4x درمی آید و ، بنابراین، در تمامی این بازه ، پیوسته و دربازهٔ $(0, 2)$ مشتق‌پذیر است و ضمناً داریم: $y'\left(\frac{2}{3}\right)=0$. در نتیجه ، حداکثر مقدار تابع ، در بازهٔ $[0, 2]$ ، برابر است با بزرگترین عدد از بین عددهای $y(0)$ ، $y\left(\frac{2}{3}\right)$ و $y(2)$. به‌همین‌ترتیب، بزرگترین‌مقدار،دربازهٔ $[2, 3]$، برابراست با بزرگتر عدد ازبین عددهای $y(2)$ و $y(3)$. یعنی، بزرگترین مقدار $y(x)$ را ، دربازهٔ $[0, 3]$ ، باید ازبین عددهای $y(0)$ ، $y\left(\frac{2}{3}\right)$ ، $y(2)$ و $y(3)$ انتخاب کرد؛ و آن ، عبارت است از $y(3)=21$.

پاسخ: تابع‌دراین‌بازه؛ تنهایك‌می‌نیمم‌دارد (درنقطهٔ $x=\frac{2}{3}$)وحداکثر مقدار تابع در این بازه ، برابر است با ۲۱.

۴. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x ، برای نامعادلهٔ مفروض، عبارت است ازهمهٔ مقدارهای x که با شرطهای $x>-2$، $x\neq-\frac{1}{2}$ و $x\neq 0$ سازگار باشند. بنابراین، این‌حوزه، ازسه‌بازه تشکیل شده‌است: $-2<x<-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}<x<0$ و $0<x<+\infty$. نامعادله را، در هریك ازاین سه‌بازه،

به‌طور جداگانه، درنظرمی گیریم.

a) $-۲<x<-\frac{۱}{۲}$ با توجه به‌منفی بودن x نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ زیر، هم‌ارز می‌شود:

$$\log_۲(۲+x)>\frac{۴x-۱}{۲x+۱} \qquad (۱)$$

به سادگی روشن می‌شود که نابرابری‌های زیـر، در بازهٔ مفروض، همیشه برقرارند.

$$\log_۲(۲+x)<\log_۲\frac{۳}{۲}<۱ \quad ; \quad \frac{۴x-۱}{۲x+۱}=۲-\frac{۳}{۲x+۱}>۲$$

یعنی نامعادلهٔ (۱)، وهمراه با آن نامعادلهٔ اصلی، دربازهٔ $-۲<x<-\frac{۱}{۲}$، جواب ندارد.

b) $-\frac{۱}{۲}<x<۰$. روشن است که دراین بازه داریم:

$$۱+\log_۲(۲+x)>+۱\log_۲\frac{۳}{۲}>۰$$

بنابراین، سمت راست نامعادلهٔ اصلی، مقداری منفی می‌شود؛ در حالی کـه، به ازای هرمقدار x از بازهٔ مفروض، داریم: $\frac{۶}{۲x+۲}>۰$. یعنی نامعادله ما، برای هر مقدار دلخواه از بازهٔ $-\frac{۱}{۲}<x<۰$ برقرار است.

c) $x>۰$. در این مجموعه، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\log_۲(۲+x)<\frac{۴x-۱}{۲x+۱} \qquad (۲)$$

روشن است که، در این مجموعه، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$\frac{۴x-۱}{۲x+۱}=۴-\frac{۳}{۲x+۱}<۲ \;,\; ۱<\log_۲(۲+x)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود: ۱) نامعادلهٔ (۲)، در مجموعه‌ای که در آن جا $\log_2(x+2) \geqslant 2$ باشد، جواب ندارد، یعنی نامعادلهٔ (۲)، درمجموعهٔ $x \geqslant 2$ دارای جواب نیست. ۲) نامعادلهٔ (۲) درمجموعه‌ای که در آن $\frac{4x-1}{2x+1} \leqslant 1$ باشد، جواب ندارد. باتوجه به این که، دراین حالت‌داریم: $x > 0$، نتیجه می‌شود که نامعادلهٔ (۲)، در مجموعهٔ $0 < x \leqslant 1$ هم جواب ندارد. این می‌ماند که جواب‌های نامعادله را در بازهٔ $1 < x < 2$ پیدا کنیم. در این بازه داریم:

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

اکنون، درستی نابرابری عددی زیر را ثابت می کنیم:

$$\log_2 3 > \frac{7}{5} \qquad (3)$$

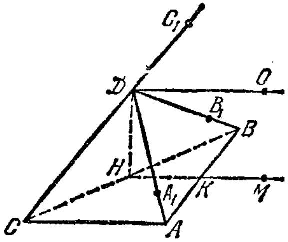
چون $2^7 < 3^5$، پس $2^{\frac{7}{5}} < 3$ که از آن‌جا، درستی نابرابری (۳) روشن می‌شود. بنابراین، در فاصلهٔ $1 < x < 2$.

$$\log_2(2+x) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > \frac{4x-1}{2x+1}$$

یعنی، نامعادلهٔ در بازهٔ $1 < x < 2$ دارای جواب نیست.

پاسخ: $-\frac{1}{2} < x < 0$.

۵. M را نقطهٔ تماس کره با صفحهٔ ABC می گیریم، چون طول همهٔ پاره‌خطهای مماسی که از نقطهٔ A بر کره رسم شوند، با هم برابرند، برای‌حل مسأله، کافی است $|AM|$ را پیدا کنیم. پای ارتفاع وارد از رأس D برقاعدهٔ هرم را H می گیریم چون $|AD| = |BD| = |CD|$ ومایل‌های برابر، تصویرهای برابر دارند، پس $|AH| = |BH| = |CH|$. و این، به معنای آن است که، نقطهٔ H، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC



شکل ۱۲

است، یعنی H وسط پاره خط BC است (شکل ۱۲). نقطه‌های تماس کره را با خطهای راست AD، BD و CD، به ترتیب، A_1، B_1 و C_1 می گیریم. از شرطها نتیجه می‌شود:

$$|AA_1|=|AD|-|DA_1|$$
$$|BB_1|=|BD|-|DB_1| \qquad (۴)$$
$$|CC_1|=|CD|+|DC_1|$$

چون طول پاره خطهای مماسی که از یك نقطه بر کره رسم شوند، با هم برابرند، بنابراین

$$|DA_1|=|DB|_1=|DC_1|,$$
$$|AM|=|AA_1|, \quad |BM|=|BC_1|$$

از برابری‌های اخیر و برابری‌های (۴)، به‌دست می آید:

$$|AM|=|AA_1|=|BB_1|=|BM|$$

از این جا نتیجه می‌شود که نقطهٔ M برصفحهٔ ABC و روی عمود منصف پاره‌خط AB قراردارد. سپس از برابری‌های (۴) نتیجه می‌شود:

$$|CM|=|CC_1|>|CD|=|BD|>|BB_1|=|BM|$$

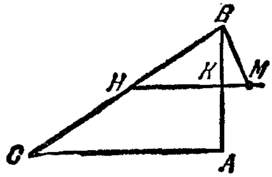
یعنی، نقطهٔ M، روی نیم‌خط HK قرار دارد که، در آن، K وسط پاره‌خط AB است. مرکز کره را O، و تصویراین مرکز را برصفحهٔ BCD، O_1 می گیریم (شکل ۱۳). از برابری $|OB_1|=|OC_1|$ نتیجه می‌شود: $|O_1C_1|=|O_1B_1|$، و بنابر قضیهٔ سه عمود: $O_1C_1\perp DC_1$ و $O_1B_1\perp BD$، یعنی نقطهٔ O_1 از دو ضلع زاویهٔ BDC_1 به یك فاصله‌است و DO_1 نیمساز زاویهٔ C_1DB_1 می‌شود. مثلث BCD مثلث متساوی‌الساقین است، بنابراین، DH نیمساز زاویهٔ CDB است. به این ترتیب، به‌دست می آید:

$$\widehat{HDO_1}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}+\frac{1}{2}\widehat{BDC_1}=\frac{1}{2}\left(\widehat{CDB}+\widehat{BDC_1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

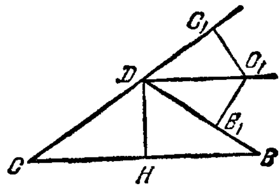
یا $HD\perp DO_1$. چون خط راست OO_1 برصفحهٔ BCD عمود است، پس $DH\perp OO_1$. و به این ترتیب، ثابت می‌شود که خط راست DH برصفحهٔ OO_1D عمود است. ولی صفحهٔ ABC هم برخط راست DH عمود است. یعنی، دو صفحهٔ ABC و OO_1D با هم موازی‌اند.

چون خطهای راست DH و OM بریك صفحهٔ ABC عمودند، با

هم موازی‌می‌شوند؛ یعنی، نقطه‌های D ، H ، O و M بر یک‌صفحه‌واقع‌اند. این صفحه ، صفحه‌های موازی ABC و OO_1D را در دو خط راست HM و DO قطع می کند. بنا بر این $|HM| \| |DO|$. از این‌جا نتیجه



شکل۱۴



شکل۱۳

می‌شود که چهار ضلعی HMOD متوازی‌الاضلاع است و داریم: $|DH| = |OM|$ و $|HM| = |DO|$. چون OM شعاع کره است: پس $|DH| = |OM| = ۱$. وازاین‌جا، امکان‌محاسبهٔ یال‌های جانبی هرم به‌دست می‌آید:

$$|AD| = |BD| = |CD| = \sqrt{|CH|^۲ + |DH|^۲} = \sqrt{۳}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ ODC_1 به دست می‌آید : $|OD| = \dfrac{|OC_1|}{\sin \widehat{ODC_1}}$.

چون $DO \| HM$ و $|HM| = |AC|$، پس $DO \| AC$ و $\widehat{ODO_1} = \widehat{ACD}$ از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به دست می‌آید:

$$|AC| = |BC| \cos \widehat{BCA} = ۲\sqrt{۲} \cdot \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۶}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که مثلث متساوی‌الساقین ADC ، قائم‌الزاویه است (زیرا داریم : $|AC|^۲ = |CD|^۲ + |AD|^۲$) و ، بنا براین ، $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{۴}$ ؛ ولی در این صورت

$$|OD| = \frac{|OC_1|}{\sin \frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲}$$

و این، ثابت می کند که $|HM| = \sqrt{۲}$. از مثلث HBM (شکل ۱۴)، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها، پیدا می کنیم:

$$|BM|^۲=|BH|^۲+|HM|^۲-۲|BH|\cdot|HM|\cdot\cos\widehat{BHM}=$$

$$=۲+۲-۴\cos\frac{\pi}{۶}=۴-۲\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}-۱)^۲$$

و چون $|AM|=|BM|$ ، بنابراین $|AM|=\sqrt{۳}-۱$.

پاسخ: $\sqrt{۳}-۱$.

۶. $\frac{۱}{۲x-y}$ را u و $\frac{۱}{x-۲y}$ را v می‌گیریم. دستگاه‌مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} ۲u+۳v=\frac{۱}{۲} \\ ۲u-v=\frac{۱}{۱۸} \end{cases}$$

با حل این دستگاه خطی، نسبت به u و v ، به دست می‌آید: $u=\frac{۱}{۱۲}$ و $v=\frac{۱}{۹}$. بنابراین، همهٔ جواب‌های‌دستگاه اصلی، دراین‌دستگاه صدق‌می‌کنند:

$$\begin{cases} ۲x-y=۱۲ \\ x-۲y=۹ \end{cases}$$

که منجر به یك جواب می‌شود: $x=۵$ و $y=-۲$. اگر این مقدارها را در دستگاه اصلی قراردهیم، صادق‌بودن آن‌ها، روشن می‌شود.

پاسخ: $x=۵$ ، $y=-۲$.

پاسخ گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $\frac{۲\pi}{۳}+۲n\pi\ (n\in Z)$؛ ۲. $|AB|=|BC|=|AC|=\sqrt{۳}$؛

۳. $x_{max}=\frac{۱}{۵}$ ، حداقل مقدار ، برابر ۳۸- ؛ ۴. $۰<x<\frac{۱}{۲}$ ؛

۵. $|AD|=|BD|=\sqrt{۲}$ ، $|CD|=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$؛ ۶. $x=۱$ ، $y=۲$.

گروه سوم. ۱. $\frac{\pi}{3}+2n\pi \ (n\in Z)$؛ ۲. $R=1$؛ ۳. $x_{min}=\frac{1}{3}$، حداکثر مقدار برابر ۱۰۵؛ ۴. $\frac{1}{2}<x<1$؛ ۵. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$؛ ۶. $x=4$، $y=2$.

گروه چهارم. ۱. $\frac{\pi}{6}+2n\pi \ (n\in Z)$؛ ۲. $|AC|=1$، $|AB|=|BC|=\frac{\sqrt{3}}{3}$؛ ۳. $x_{max}=1$، حداقل مقدار برابر -52؛ ۴. $1<x<\frac{3}{2}$؛ ۵. $|PS|=|QS|=\sqrt{3}+1$، $|RS|=\sqrt{2}$؛ ۶. $x=-3$، $y=2$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول برای معادله، عبارت است ازهمهٔ xهایی که در نابرابری $x \geqslant -1$ صدق کنند. دراین مجموعه، معادلهٔ مفروض، بامجموعهٔ معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\sqrt{x+1}=0 \quad و \quad x^2-4=0$$

که از آن‌جا، ریشه‌های $x_1=-1$ و $x_2=2$ و $x_3=-2$ به دست می‌آید و تنها دو ریشهٔ نخست در حوزهٔ مقدارهای قابل قبول قرار دارند.

پاسخ: $x_1=-1$، $x_2=2$.

۲. اگر از رابطهٔ سینوس کمان دو برابر استفاده‌کنیم، به معادلهٔ زیر که هم‌ارز معادلهٔ اصلی است، می‌رسیم:

$$\sin x\cdot\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

این معادله، بامجموعه دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\sin x=0 \ , \ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پاسخ: $n\pi$ و $2m\pi\pm\frac{\pi}{6} \ (m , n\in Z)$.

۳. رأس‌های ذوزنقه را A ، B ، C و D می‌نامیم ، به نحوی که داشته باشیم : $\widehat{A}=۴۰^\circ$ ، $\widehat{D}=۵۰^\circ$ و $BC\|AD$ (شکل ۱۵) . چون $۱۸۰^\circ \times ۹۰^\circ > \widehat{A}+\widehat{D}$ ، بنابراین $|AD|>|BC|$. باتوجه به‌شرط مسأله داریم:

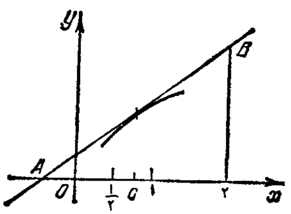
$$\frac{|AD|+|BC|}{۲}=۴$$

خط راست BE را ، از نقطهٔ B ، موازی CD رسم می‌کنیم و وسط پاره‌خط‌های BC ، AD و AE را ، به ترتیب ، K ، L و M می‌نامیم، داریم:

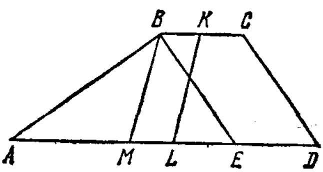
$$|ML|=|AL|-|AM|=\frac{|AD|-|AE|}{۲}=\frac{|ED|}{۲}=$$
$$=\frac{|BC|}{۲}=|BK|$$

از این جا نتیجه می‌شود که چهار ضلعی BKLM متوازی‌الاضلاع است و بنابراین $|BM|=|KL|=۱$. در مثلث ABE ، زاویهٔ B قائمه است ، زیرا

$$\widehat{BAE}+\widehat{BEA}=\widehat{A}+\widehat{D}=۴۰^\circ+۵۰^\circ=۹۰^\circ$$



شکل ۱۶



شکل ۱۵

بنابراین $|AM|=|ME|=|BM|=۱$. چون $|AE|=|AM|+|ME|=۲$ ، پس

$$|AD|-|BC|=|AD|-|ED|=|AE|=۲$$

و از دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}|AD|+|BC|=۸\\|AD|-|BC|=۲\end{cases}$$

به دست می‌آید: $|AD|=۵$ ، $|BC|=۳$.

پاسخ: طول قاعده‌های ذوزنقه، برابر است با ۵ و ۳.

۴. عدد c را از بازهٔ $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ در نظر می‌گیریم. مشتق تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطهٔ $x=c$، برابر است با $\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}$. بنابراین، معادلهٔ مماس بر نمودار این تابع، در نقطهٔ به طول c، چنین است:

$$y-\sqrt[3]{c^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(x-c) \qquad (1)$$

این خط راست (شکل ۱۶)، محور Ox را در نقطهٔ A به مختصات $(x_A, 0)$ قطع می‌کند، به‌نحوی که x_A باید در این برابری صدق کند:

$$0-\sqrt[3]{c^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(x_A-c)$$

و از آن جا $x_A=-\frac{c}{2}$. نقطهٔ B، که در آن‌جا، مماس با قائم در نقطهٔ به‌طول ۲ به هم می‌رسند، دارای مختصات $(2, y_B)$ است و داریم:

$$y_B-\sqrt[3]{c^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(2-c)$$

و از آن جا $y_B=\frac{c+4}{3\sqrt[3]{c}}$. بنابراین، ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که به مماس (۱)، محور Ox و خط راست $x=2$ محدود شده است، به‌طول $\frac{c}{2}+2$ و $\frac{c+4}{3\sqrt[3]{c}}$ می‌باشند و مساحت $S(c)$ آن، برابر است با

$$S(c)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}+2\right)\frac{c+4}{3\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{(c+4)^2}{\sqrt[3]{c}}$$

برای حل مسأله، باید نقطهٔ c را از بازهٔ $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ طوری انتخاب کرد که در آن جا، تابع $S(c)$ به‌حداقل مقدار خود برسد. تابع $S(c)$، درمجموعهٔ $0<c<+\infty$، معین و مشتق‌پذیر است. از این تابع، نسبت به c، مشتق

می گیریم :

$$S'(c)=\frac{۱}{۱۲}\cdot\frac{۲(c+۴)c^{\frac{۱}{۳}}-(c+۴)^{۲}\cdot\frac{۱}{۳}c^{-\frac{۲}{۳}}}{c^{\frac{۲}{۳}}}=$$

$$=\frac{۱}{۳۶}\cdot c^{-\frac{۴}{۳}}(c+۴)(۵c-۴)$$

از رابطهٔ $S'(c)$ روشن می‌شود که در بازهٔ $\left(۰ ، \frac{۴}{۵}\right)$،نابرابری $S'(c)<۰$ و در بازهٔ $\left(\frac{۴}{۵} ، +\infty\right)$، نابرابری $S'(c)>۰$ برقراراست. چون، تابع در نقطهٔ $c=\frac{۴}{۵}$ پیوسته است، بنابـراین، تابع در این نقطه ، حداقل مقدار خود را در بازهٔ $(۰ ، +\infty)$ می پذیرد. ولی،نقطهٔ $c=\frac{۴}{۵}$،به‌بازهٔ $\left[\frac{۱}{۲} ، ۱\right]$ تعلق دارد. یعنی ، تابع $S(c)$ ، در نقطهٔ $c=\frac{۴}{۵}$ از بازهٔ $\left[\frac{۱}{۲} ، ۱\right]$ ، بـه حداقـل مقدار خـود می‌رسد ؛ و مساحت متناظر آن بـرابـر است با :

$$S\left(\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۴۸}{۲۵}\sqrt[۳]{\frac{۴}{۵}}\cdot$$

پاسخ: $c=\frac{۴}{۵}$، $S=\frac{۴۸}{۲۵}\sqrt[۳]{\frac{۵}{۴}}$.

۵. قبل ازهمه ، یادآوری‌می کنیم، عددهای موردنظر a را باید ازبین‌مقدارهای $a>۰$ و $a\neq۱$ انتخاب کرد ، در غیر این صورت ، لگاریتم‌های موجود در نامعادله، معنای‌خود را از دست می‌دهد. چون، به‌ازای $a>۰$ و $a\neq۱$ و y مثبت دلخواه، داریم : $\log_{\frac{۱}{a}} y=-\frac{\log_۲ y}{\log_۲ a}$ و $\log_a ۲=\frac{۱}{\log_۲ a}$،
بنابراین، نامعادلهٔ مفروض را، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{-\log_۲(\sqrt{x^۲+ax+۵}+۱)\cdot\log_۵(x^۲+ax+۶)+۱}{\log_۲ a}\geqslant ۰ \quad (۲)$$

ابتدا مقدارهای a را که با شرط مسأله سازگار باشند از بازهٔ $0<a<1$ و ، سپس از بازهٔ $1<a<\infty$ پیدا می‌کنیم.

۱. برای هـر a، متعلق به بازهٔ $0<x<1$ ، نامعادلهٔ (۲) ، هم‌ارز نامعادلهٔ زیرمی‌شود:

$$\log_3(\sqrt{x_2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\geqslant 1 \qquad (3)$$

این نامعادله را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$f(u)=\log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1)\geqslant 1$$

که در آن داریم: $u=x^2+ax+5$. تابع $f(u)$ ، در مجموعهٔ $u\geqslant 0$ معین و ، درهمین مجموعه ، صعودی یکنوا است ، زیرا هر یك از عامل‌های $\log_3(\sqrt{u}+1)$ و $\log_5(u+1)$ ، صعودی یکنوا و غیرمنفی‌اند. به‌جز آن، داریم: $f(4)=\log_3 3\cdot\log_5 5=1$. یعنی ، نامعادلـهٔ (۳) را می‌توان بـه صورت $f(u)\geqslant f(4)$ نوشت. چون $f(u)$ ، در مجموعهٔ $u\geqslant 0$ ، صعودی یکنوا است ، بنابراین، نامعادلهٔ $f(u)\geqslant f(4)$ ، دراین مجموعه ، بانامعادلهٔ $u\geqslant 4$ هم‌ارز است. یعنی ، نامعادلهٔ (۳) با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$x^2+ax+5\geqslant 4$$

مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله ، نامتناهی است. بنابراین ، برای هر a از بازهٔ $0<a<1$ ، نامعادلهٔ اصلی ، دارای بی‌نهـایت جواب است ، یعنی نمی‌توان مقداری برای a پیدا کرد که باشرط مسأله سازگار باشد.

۲. برای هر a ازبازهٔ $1<a<+\infty$ ، نامعادلهٔ مفروض، بانامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\leqslant 1$$

با توجه به آن چـه در حالت قبل ، در مورد $f(u)$ گفتیم ، در این جا هم ، می‌توان نامعادلهٔ اخیر را ، با نامعادلهٔ دوگانهٔ هم‌ارز آن ، عوض‌کرد:

$$0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4$$

که به‌جای آن ، می‌توان دستگاه نامعادله‌های زیر را نوشت:

$$\begin{cases} x^2+ax+5\geqslant 0 \\ x^2+ax+1\leqslant 0 \end{cases} \qquad (4)$$

اگـر مبیّن سه جمله‌ای درجـه دوم سمت چپ نامعادلـهٔ دوم منفی باشد $(\Delta=a^2-4<0)$ ، آن وقت ، این نامعادلـه ، و همراه با آن ، دستگاه

(۴) ، بدون جواب است. بنابراین ، مقدارهای a را باید از بین‌مقدارهایی پیدا کرد که در شرط‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} a^{۲}-۴\geqslant ۰ \\ a>۱ \end{cases}$$

یعنی مقدارهایی از a که در مجموعهٔ $a\geqslant ۲$ باشند.

اگر $a>۲$ باشد ، ریشه‌های مختلف $x_{۱}=\frac{-a-\sqrt{a^{۲}-۴}}{۲}$ و $x_{۲}=\frac{-a+\sqrt{a^{۲}-۴}}{۲}$ سه‌جمله‌ای درجه دوم نامعادلهٔ دوم دستگاه (۴) ، در نامعادلهٔ اول دستگاه (۴) هم صدق می کنند ، زیرا

$$x_{۱}^{۲}+ax_{۱}^{۲}+۵=x_{۱}^{۲}+ax_{۱}+۱+۴=۴>۰ \text{ و } x_{۲}^{۲}+ax_{۲}+۵=۴>۰$$

بنابراین ، نامعادلهٔ داده شده در مسأله ، کمتر از دو جواب $x_{۱}$ و $x_{۲}$ ندارد. در حالت $a=۲$، نامعادلهٔ دوم دستگاه (۴)، وهمراه با آن نامعادلهٔ اصلی ، یك جواب منحصر به فرد دارد: $x=-۱$. بنابراین ، شرط مسأله ، تنها برای $a=۲$ صادق است.

۶. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول ، شامل همهٔ aهایی است که در شرط $\sin a\neq ۱$ صدق کنند. در این حوزه ، معادلهٔ مفروض، با این معادله هم‌ارز است.

$$\cos x=۱-\sin^{۲}x \implies \cos^{۲}x-\cos x=۰$$

و معادلهٔ اخیر، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos x=۰ \text{ و } \cos x=۱$$

معادلهٔ اول به جواب‌های $x=n\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(n\in Z)$ می‌رسد که ، از آن‌ها ، جواب‌های به‌صورت $x=(۲k-۱)\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in Z)$، درحوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول ، قراردارند. معادلهٔ دوم، منجر به‌جواب‌های $x=۲m\pi$ $(m\in Z)$ می‌شود که همهٔ آن‌ها ، متعلق به حوزهٔ مقدارهای قابل قبول‌اند.

پاسخ: $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ و $۲m\pi$ $(k ، m\in Z)$.

۷. $x^{۳}$ را u و $\sqrt{y}$ را v می گیریم، دستگاه معادله‌های مفروض، به‌این صورت

درمی‌آید:

$$\begin{cases} u-v=1 \\ 5u^2-8uv+2v^2=2 \end{cases} \quad (5)$$

از معادلهٔ اول به دست می‌آید: $u=v+1$، که اگر به جای u در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به معادلهٔ درجهٔ دوم $v^2-2v-3=0$ می‌رسیم. این معادله دو ریشه دارد: $v_1=-1$ و $v_2=3$. مقدارهای متناظر آن‌ها برای u عبارت است از: $u_1=0$ و $u_2=4$. به این ترتیب، دستگاه (5) دو جواب دارد:

$$\begin{cases} u_1=0 \\ v_1=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2=4 \\ v_2=3 \end{cases}$$

به این ترتیب، دستگاه مفروض، هم‌ارز مجموعهٔ دو دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x^3=0 \\ \sqrt{y}=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^3=4 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases}$$

دستگاه اول جواب ندارد و دستگاه دوم، یک جواب منحصر دارد: $x=\sqrt[3]{4}$ و $y=9$.

پاسخ: $x=\sqrt[3]{4}$، $y=9$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x_1=-3$، $x_2=2$؛ ۲. $2n\pi+\pi$ $(n\in Z)$.
۳. $3\sqrt{3}$؛ ۴. $c=8$، $S=\frac{1}{8}$؛ ۵. $a_1=\frac{1}{2}$، $a_2=1$، $a_3=\frac{3}{2}$؛
۶. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$، $m\pi+(1)^{m+1}\frac{\pi}{6}$ $(n\text{،}m\in Z)$؛
۷. $x=2$، $y=1$.

گروه سوم. ۱. $x_1=\frac{1}{2}$، $x_2=1$؛ ۲. $x_1=n\pi+\frac{\pi}{2}$، $x_2=m\pi+(-1)^m\,\frac{\pi}{4}$ $(n,m\in Z)$؛ ۳. ۲،۶؛ ۴. $C=\frac{1}{6}$،

$S=\frac{5}{3\sqrt[5]{6}}$؛ ۵. $a=\frac{1}{2}$؛ ۶. $x_1=2n\pi$ ($n\in Z$)، $x_2=2m\pi+\frac{\pi}{2}$ ($m\in Z$)؛ ۷. $x=9$، $y=1$.

گروه چهارم. ۱. $x_1=-4$، $y_1=3$؛ ۲. $x=2m\pi$ ($m\in Z$)؛ ۳. $\sqrt{3}$؛ ۴. $C=4$، $S=\frac{169}{536}$؛ ۵. $a=\frac{1}{2}$، $a=1$؛

۶. $x_1=2n\pi+\pi$، $x_2=2m\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ($n,m\in Z$)؛

۷. $x=\frac{1}{2}$، $y=1$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول نامعادله، با شرط‌های $x-5\geqslant 0$، $x-4>0$ و $x-4\neq\sqrt{2}$ معین می‌شود، یعنی $x\geqslant 5$ و $x\neq 4+\sqrt{2}$. عدد ۵ درحوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول قراردارد و، روشن است که، درنامعادلهٔ اصلی صدق‌می کند، یعنی جوابی‌ازآن است. ازاین به بعد، به‌جست وجوی‌جواب‌های مخالف $x=5$ می‌رویم.

درحوزهٔ $x>5$ و $x\neq 4+\sqrt{2}$، تابع $\sqrt{x-5}$ مثبت است و، بنابراین، نامعادلهٔ مفروض، دراین‌حوزه، هم‌ارز این نامعادله است:

$$\frac{1}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geqslant 0$$

ویا

$$\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1>0$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اخیر، عبارت است از $x>4+\sqrt{2}$ که همهٔ آن‌ها درحوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول واقع‌اند.

پاسخ: $x=5$، $4+\sqrt{2}<x<+\infty$.

۲. (x_0, y_0) را جوابی از دستگاه می گیریم، دراین‌صورت داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\sin x_0}\cdot\cos y_0=0\\ 2\sin^2 x_0-\cos 2y_0-2=0\end{array}\right. \qquad (1)$$

ازمعادلهٔ اول نتیجه می‌شود که یا $\sin x_0=0$ و یا $\cos y_0=0$. اگر فرض کنیم $\sin x_0=0$، ازمعادلهٔدوم به‌برابری ناممکن $\cos 2y_0=-2$ می‌رسیم. بنابراین $\cos y_0=0$، یعنی $y_0=m\pi+\frac{\pi}{2}$ $(m\in Z)$، ولی دراین صورت داریم: $\cos 2y_0=-1$ و، ضمناً باید نابرابری $\sin x_0\geqslant 0$ هم برقرار باشد؛ درنتیجه، ازمعادله دوم دستگاه (۱) به‌دست می‌آید $\sin x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$، یعنی $x_0=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$ وبه‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که همهٔ زوج عددهای (x, y)

$$x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4},\quad y=mn+\frac{\pi}{2}\ (m,k\in Z)$$

درواقع‌هم، جواب‌های دستگاه اصلی هستند.

پاسخ: $x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}$، $y=m\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k,m\in Z)$.

۳. مقدارنمك ظرف‌های اول ودوم‌را، به‌ترتیب u کیلوگرم و v کیلوگرم‌ومقدار آب بخارشده را x کیلوگرم و y کیلوگرم می گیریم. آن‌وقت، باتوجه به شرط‌های مسأله، خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{u}{5-x}}{\frac{u}{5}}=p \quad و \quad \frac{\frac{v}{20-y}}{\frac{v}{20}}=q$$

یا

$$\frac{5}{5-x}=p \quad و \quad \frac{20}{20-y}=q$$

ازبرابری اول به‌دست می‌آید: $x=5-\frac{5}{p}$ وازبرابری دوم $y=20-\frac{20}{q}$.

بنابراین، مقدارآب بخارشده، برابراست با

$$x+y=۲۵-\frac{۵}{p}-\frac{۲۰}{q}$$

ویا، باتوجه به برابری $pq=q$،

$$x+y=۲۵-\left(\frac{۵}{p}+\frac{۲۰}{۹}p\right)$$

با استفاده ازنابرابری بین واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی دو عدد مثبت، به دست می‌آید:

$$\frac{۵}{p}+\frac{۲۰}{۹}p\geqslant ۲\sqrt{\frac{۵}{p}\cdot\frac{۲۰}{۹}p}=\frac{۲۰}{۳}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود:

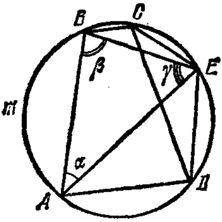
$$x+y\leqslant ۲۵-\frac{۲۰}{۳}=۱۸\frac{۱}{۳}$$

یعنی، باتوجه به شرطهای مسأله، بیش‌از $۱۸\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم‌آب، نمی‌تواندبخار شود. اگر داشته باشیم: $\frac{۵}{p}=\frac{۲۰}{۹}p$ ، یعنی $p=\frac{۳}{۲}$، نابرابری بین واسطهٔ حسابی وواسطهٔ هندسی، به‌برابری تبدیل می‌شود و، در این صورت، مقدار آبی‌که ازظرف اول بخارشده است، برابر $x=۵-\frac{۵}{p}=\frac{۵}{۳}$ (کیلوگرم)و مقدارآبی‌کـه از ظرف دوم بخـار می‌شود برابر $y=۲۰-\frac{۲۰}{۹}p=\frac{۵۰}{۳}$ (کیلوگرم) ومجموع آب بخار شده، برابر $\frac{۵}{۳}+\frac{۵۰}{۳}=۱۸\frac{۱}{۳}$ (کیلوگرم) خواهد بود.

پاسخ: $۱۸\frac{۱}{۳}$ کیلوگرم.

۴. $ABCD$ را ذوزنقه‌ای می‌گیریم‌که با شرطهای مسأله سازگار باشد (شکل ۱۷). چون ذوزنقه، دردایره‌ای‌محاط‌شده است، بنابراین: $|AB|=|CD|$. اندازهٔ زاویه‌هـای $\widehat{BAE}$، $\widehat{ABE}$ و $\widehat{BEA}$ را، به‌ترتیب، α، βو γ می‌نامیم،

از شرط مسأله داریم $\beta-\alpha=a$؛ چون زاویهٔ CED یك زاویهٔ محاطی و اندازهٔ آن برابر ۱۲۰ درجه است، بنابراین، کمان CBAD برابر ۲۴۰ درجه می‌شود، یعنی کمان CED برابر است با ۱۲۰ درجه. چون $|AB|=|CD|$، پس کمان AmB هم برابر ۱۲۰ درجه است، یعنی

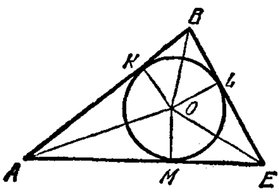


شکل ۱۷

زاویهٔ محاطی BEA، که روبه‌روی به کمان AmB است، برابر ۶۰ درجه می‌شود. بنابراین $\alpha+\beta=120^\circ$ و $\beta-\alpha=a$؛ ازاین‌جا، همهٔ زاویه‌های مثلث ABE به‌دست می‌آید:

$$\alpha=60^\circ-\frac{a}{2},\ \beta=60^\circ+\frac{a}{2},\ \gamma=60^\circ$$

اکنون به‌مثلث ABE می‌پردازیم (شکل ۱۸)؛ O را مرکز و r را شعاع دایرهٔ محاطی این مثلث می‌گیریم. p را محیط این مثلث و نقطه‌های تماس تماس ضلع‌های AB، BE و AE را با دایرهٔ محاطی مثلث، به ترتیب، K، L و M فرض می‌کنیم: ازمثلث AKO



شکل ۱۸

به‌دست می‌آید: $|AK|=r\,cotg\frac{\alpha}{2}$؛ به‌همین ترتیب، ازمثلث‌های KBO و LEO: $|BK|=r\,cotg\frac{\beta}{2}$ و $|LE|=r\,cotg\frac{\gamma}{2}$. چون داریم:

$|AK|=|AM|$، $|BK|=|BL|$، $|LE|=|ME|$ (طول پاره‌خط‌های مماسی که ازیك نقطه، بردایره‌ای رسم شوند، باهم برابرند). بنابراین

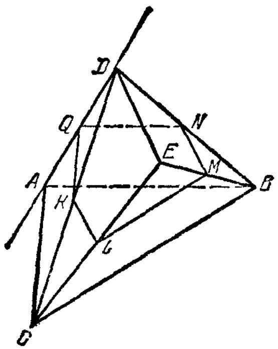
$$p=2r\left(ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=2r\left[ctg\left(30^\circ-\frac{a}{4}\right)+ctg\left(30^\circ+\frac{a}{4}\right)+\sqrt{3}\right]$$

وچون باید نسبت $\frac{p}{r}$ را پیدا کرد، پاسخ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{پاسخ:}\ ۲\left[cotg\left(۳۰^\circ-\frac{a}{۴}\right)+cotg\left(۳۰^\circ+\frac{a}{۴}\right)+\sqrt{۳}\right].$$

۵. درشکل ۱۹، چند وجهی ABCDE نشان داده شده است. وسط پاره خط AD را Q می‌گیریم. بنابرفرض، صفحهٔ P با خط راست AB موازی است و، بنابراین، وجه ADB را در پاره خط QN، موازی خط‌راست AB قطع می‌کند؛ در غیراین صورت نقطهٔ برخورد خطهای راست QN و AB، به صفحه‌های P و ABC تعلق خواهد داشت. یعنی، نقطهٔ N وسط پاره خط BD است. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که صفحهٔ P، یال CD را درنقطهٔ K، وسط آن، قطع می‌کند. بنا برشرط، خط راست DE موازی صفحهٔ ABC است، بنابراین، باصفحهٔ P هم موازی خواهد شد. ولی این به معنای آن‌است که پاره خطهای KL و NM، محل‌برخورد صفحهٔ P باوجه‌های CED و BED، با خط راست DE موازی‌اند. اکنون، از برابری‌های $|DK|=|CK|$ و $|DN|=|BN|$ نتیجه می‌شود که نقطه‌های L و M، به‌ترتیب، به وسط یال‌های CE و BE از چندوجهی هستند.



شکل ۱۹

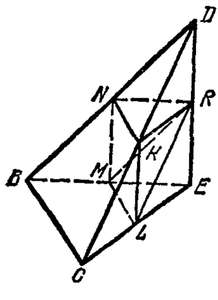
مساحت مقطع مجهول، ازمساحت مثلث QNK ومساحت چهارضلعی KLMN تشکیل شده است. چون داریم:

$$|QN|=\frac{۱}{۲}|AB|\ ،\ |QK|=\frac{۱}{۲}|AC|\ \text{و}\ |NK|=\frac{۱}{۲}|BC|$$

بنابراین، مثلث‌های QNK و ABC متشابه‌اند وضریب تشابه آن‌ها، برابر است با $\frac{۱}{۲}$؛ در نتیجه، مساحت QNK برابر است با $\frac{۱}{۴}$ S (طبق فرض، مساحت مثلث ABC برابر است با S). تنها این می‌ماند که مساحت چهارضلعی KLMN را پیدا کنیم. برای این منظور، حجم V، هرم BCDE را،

برحسب داده‌های مساله، به دوطریق محاسبه و ، سپس ، با هم‌مقایسه می کنیم.

R، وسط یال DE، را به‌راس‌های چهارضلعی KLMN وصل می کنیم (شکل ۲۰). چندوجهی KLMNDE، به سه هرم تقسیم می‌شود : NKRD ، MLER، KLMNR. چون نقطه‌های K ، L ، M ، N و R ، وسط یال‌های هرم BCDE هستند، با در نظر گرفتن شکل‌های متشابه ، به سادگی معلوم می‌شود که حجم هرم‌های NKRO و MLER برابر است با $\frac{1}{8}V$. فاصلهٔ



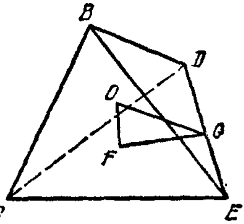
شکل ۲۰

خط راست DE تا صفحهٔ موازی با آن ، ABC ، را H می‌نامیم . چون صفحه‌های ABC و KLMN موازی‌اند و K وسط پاره خط CD است ، پس ، خط راست DE از صفحهٔ KLMN به فاصلهٔ $\frac{1}{2}H$ می‌شود. بنابراین ، حجم هرم KLMNR برابر با $\frac{1}{3}S_1 \cdot \frac{1}{2}H_1 = \frac{1}{6}S_1H$ ، وحجم چند وجهی KLMNDE برابر با $\frac{1}{4}V+\frac{1}{6}S_1H$ خواهد شد . به همین ترتیب ، ثابت می‌شود که حجم چندوجهی KLMNBC هم برابراست با $\frac{1}{4}V+\frac{1}{6}S_1H$، که ما را به این معادله می‌رساند :

$$V = 2\left(\frac{1}{4}V+\frac{1}{6}S_1H\right) \Longrightarrow V = \frac{2}{3}S_1H \qquad (2)$$

O رامرکز کرهٔ محاطی هرم BCDE و r را شعاع آن می گیریم. دراین صورت ، حجم هرم BCDE ، ازمجموع حجم‌های چهارهرم تشکیل می‌شود که قاعده‌های آن‌ها ، همان وجه‌های جانبی BCDE وراس‌های آن‌ها، نقطه O می باشد. چون نقطهٔ O ازهمهٔ وجه‌ها، به فاصلهٔ r و مجموع مساحت‌های همهٔ وجه‌ها، بنا برفرض مسأله، برابر σ است، پس

$$V = \frac{1}{3}r\sigma \qquad (3)$$

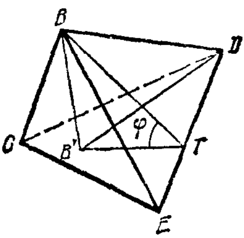


شکل ۲۱

r را برحسب داده‌های مسأله، محاسبه می‌کنیم. نقطهٔ تماس کره با وجه CDE را F، وپای عمود وارداز نقطهٔ O برخط راست DE را G می‌نامیم (شکل ۲۱). خط راست OF، برصفحهٔ CDE و، در نتیجه، برخط راست DE عمود است. از این‌جا، معلوم‌می‌شود که خط راست DE، برصفحهٔ DFG عمود است. چون، مرکز کره‌ای که بروجه‌های یك زاویهٔ دووجهی مماس باشد، روی صفحهٔ نیمساز این زاویه قرار دارد، بنابراین $\widehat{OGF}=\frac{1}{2}\varphi$، که در آن، φ اندازهٔ زاویهٔ دو وجهی DE است. به این ترتیب:

$$r=|OG|.sin\frac{\varphi}{2}=kHsin\frac{\varphi}{2}$$

(درفرض مسأله، گفته شده است که: $a=\frac{|OG|}{H}$). پای عمودهای وارد از نقطهٔ B برصفحهٔ CDE وخطراست DE را، به‌ترتیب، B' و T می‌گیریم (شکل ۲۲). چون $DE\perp BT$ و $DE\perp BB'$، بنابراین، صفحهٔ $BB'T$ برخط راست DE عمود است، یعنی $\widehat{BTB'}=\varphi$. داریم:



شکل ۲۲

$$cos\varphi=\frac{|B'T|}{|BT|}=\frac{|DT|.tg\widehat{B'DE}}{|DT|.tg\widehat{BDE}}=l,$$

$$sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1-l}{2}}$$

بنابراین، $r=kH\sqrt{\frac{1-l}{2}}$، که اگردر (۳) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{1}{3}\sigma kH\sqrt{\frac{1-l}{2}} \qquad (4)$$

اکنون، ازمقایسهٔ عبارت‌های (۲) و (۴)، به‌دست می‌آید:

$$S_1=\frac{1}{2}\sigma k\sqrt{\frac{1-l}{2}}$$

ومساحت مقطع مجهول، چنین می‌شود:

$$\frac{1}{4}S+S_1=\frac{1}{4}(S+\sigma k\sqrt{2-2l})$$

یادداشت. رابطه (۲) را می‌توان به‌سادگی، به‌کمك محاسبهٔ انتگرالی، به‌دست‌آورد. مقطع هرم BCDE را باصفحه موازی ABC وبه‌فاصلهٔ x از آن، $K'L'M'N'$ و مساحت مقطع را $S(x)$ می‌گیریم. چهارضلعی $K'L'M'N'$، متوازی‌الاضلاع است واگر، برای سادگی‌کار، فرض کنیم: $|BC|=a$ ، $|DE|=b$ وزاویهٔ بین خطهای راست BC و DE برابر α، آن وقت

$$|L'M'|=|N'K'|=a\frac{H-x}{H}\ ,\ \ |M'N'|=|K'L'|=b\frac{x}{H}$$

و

$$S(x)=|L'M'|\cdot|M'N'|.\sin\alpha=\frac{ab}{H^2}(Hx-x^2)\sin\alpha$$

دراین صورت

$$V=\int_0^H S(x)dx=\frac{ab\sin\alpha}{H^2}\int_0^H(Hx-x^2)dx=$$

$$=\frac{ab\sin\alpha}{H^2}\left(H\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=\frac{abH}{6}\sin\alpha$$

وچون $S_1=S\left(\frac{H}{2}\right)=\frac{ab}{4}\sin\alpha$، بنابراین $V=\frac{2}{3}S_1H$.

گروه‌های دوم تاچهارم

گروه دوم. ۱. $x=4$، $x>5$؛

۲. $x=k\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ ، $y=l\pi+\frac{\pi}{۶}$ $(k, l\in Z)$؛ ۳. ۳۴۸۰ کیلو گرم؛

۴. $\frac{۱}{۲(\sin a+\sin ۲a+\sin ۳a)}$؛

۵. $\frac{۱}{۴}\left(S+\sigma k\sqrt{۲-۲\sqrt{۱-l^۲\sin^۲\alpha}}\right)$.

گروه سوم. ۱. $x=۲$ ، $x>۴$؛

۲. $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، $y=۲l\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ $(k, l\in Z)$؛

۳. ۸۰ کیلو گرم؛ ۴. $۲\left(\cot g\frac{\pi-a}{۶}+\cot g\frac{\pi-a}{۳}+\cot g\frac{a}{۲}\right)$؛

۵. $\frac{۱}{۲}kS+\frac{۱}{۴}\sigma l\sqrt{\frac{۱-m}{۲}}$.

گروه چهارم. ۱. $x=\frac{۳}{۲}$ ، $x>۲$؛

۲. $x=k\frac{\pi}{۳}+(-۱)^k\frac{\pi}{۱۸}$ ، $y=l\pi+\frac{\pi}{۴}$ $(k, l\in Z)$؛

۳. ۳۹۰۰ کیلو گرم

۴. $\sqrt{۳}\cdot\frac{\sin a\cdot\sin(a+۱۲۰^\circ)}{\sin a-\sin(a+۱۲۰^\circ)-\sin ۶۰^\circ}$؛

۵. $\frac{۱}{۲}k_۱\sigma_۱\sin\frac{\alpha}{۲}+\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}k_۲\sigma_۲\sqrt{۱-\sqrt{۱-l^۲\sin^۲\beta}}$.

۴§. دانشکدهٔ ریاضیات محاسبه‌ای و سیبرنتیک

۱۹۷۷

گروه اول

۱. با توجه به این که تابع $y=۲^{۲x+۳}$، به ازای همهٔ مقدارهای x مثبت‌است، دو طرف نامعادلهٔ مفروض را، در $۲^{۲x+۳}$ ضرب می کنیم ، به این نامعادله می‌رسیم:

$$۴(۲^{۲x+۱})^۲+۸\times ۲^{۲x+۱}-۲۱\geqslant ۰ \qquad (۱)$$

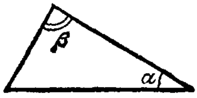
که بانامعادلهٔاصلی هم‌ارزاست. چون‌سه‌جمله‌ای‌درجهٔ دوم $۴y^۲+۸y-۲۱$ دارای دو ریشهٔ $y_۱=-\frac{۷}{۲}$ و $y_۲=\frac{۳}{۲}$ است، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴y^۲+۸y-۲۱\geqslant ۰$، از دوفاصله $y\leqslant -\frac{۷}{۲}$ و $y\geqslant\frac{۳}{۲}$ تشکیل شده است. بنابراین، نامعادلهٔ(۱) هم‌ارز است بامجموعهٔ دونامعادلهٔ زیر:

$$۲^{۲x+۱}\leqslant -\frac{۷}{۲} \quad و \quad ۲^{۲x+۱}\geqslant\frac{۳}{۲}$$

نامعادلهٔ اول، جواب ندارد ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم، عبارت است از $x\geqslant\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳-۱$؛ که همان جواب‌های نامعادلهٔ اصلی است.

پاسخ: $x\geqslant\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳-۱$.

۲. کوچکترین زاویهٔ مثلث را α وبزرگترین زاویهٔ مثلث را β می گیریم(شکل ۲۳)؛ زاویهٔ مثلث برابر $\pi-\alpha-\beta$ می‌شود. طبق شرط مسألـه داریـم : $\beta-\alpha=\pi-\alpha-\beta$. ازاین‌جا،نتیجه می‌شود: $۲\beta=\pi$ و $\beta=\frac{\pi}{۲}$؛ یعنی،


شکل ۲۳

مثلث قائم‌الزاویه است. ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ روبه‌روی به α، برابر است با ۱ . به‌این‌ترتیب، ضلع دیگرمجاور به‌زاویهٔ قائمه برابر $\cot g\alpha$ ووتر برابر $\frac{۱}{\sin\alpha}$ می‌شود. مرکزدایرهٔ محیطی‌مثلث، دروسط‌وترقراردارددوشعاع آن برابراست با $\frac{۱}{۲\sin\alpha}$؛ درنتیجه، مساحت‌آن برابر $\frac{\pi}{۴\sin^۲\alpha}$ خواهد بود.

بااستفاده ازفرض مسأله، به‌این معادله می‌رسیم:

$$cotg^{۲}\alpha+\frac{۱}{sin^{۲}\alpha}=\frac{\pi}{۲\,sin^{۲}\alpha}$$

از آن‌جا : $cos^{۲}\alpha=\frac{\pi}{۲}-۱$. ضلع بزرگترمثلث برابر است با

$$\frac{۱}{sin\alpha}=\frac{۱}{\sqrt{۱-cos^{۲}\alpha}}=\frac{۱}{\sqrt{۲-\frac{\pi}{۲}}}$$

۳. $sin(-۲x)=u$ و $tg۵y=v$ می‌گیریم؛ دستگاه بـه ایـن صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} u^{۲}-(۳-\sqrt{۲})v=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \\ v^{۲}+(۳-\sqrt{۲})u=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \end{cases} \qquad (۲)$$

واگر به‌جای معادلهٔ دوم، تفاضل آن‌را ازمعادلهٔ اول قراردهیم:

$$\begin{cases} u^{۲}-(۳-\sqrt{۲})v=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \\ u^{۲}-v^{۲}-(۳-\sqrt{۲})(v+u)=۰ \end{cases}$$

که با دستگاه (۲) هم‌ارزاست، این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} u^{۲}-(۳-\sqrt{۲})v=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \\ (u+v)(u-v-۳+\sqrt{۲})=۰ \end{cases}$$

که هم‌ارز با مجموعهٔ دودستگاه زیراست:

$$\begin{cases} u^{۲}-(۳-\sqrt{۲})v=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \\ v=-u \end{cases}$$

$$\text{و} \quad \begin{cases} u^{۲}-(۳-\sqrt{۲})v=\frac{۳\sqrt{۲}-۱}{۲} \\ v=u-۳+\sqrt{۲} \end{cases}$$

دستگاه اول‌را حل می کنیم. $-u$ را به‌جای v در معادلهٔ اول می گذاریم، به‌دست می آید:

$$u^2+(3-\sqrt{2})u-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}=0$$

که دارای دو ریشهٔ $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $u_2=\frac{-6+\sqrt{2}}{2}$ است. به‌این ترتیب، دستگاه اول، دارای این جواب‌ها است:

$$\begin{cases} u_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_2=\frac{-6+\sqrt{2}}{2} \\ v_2=\frac{6-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

به‌حل دستگاه دوم می‌پردازیم. $u-3+\sqrt{2}$ را به‌جای v در معادلهٔ اول دستگاه می گذاریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$u^2-(3-\sqrt{2})u+\frac{23-15\sqrt{2}}{2}=0$$

این معادله، ریشه ندارد، زیرا مبیّن آن Δ، منفی است:

$$\Delta=(3-\sqrt{2})^2-2(23-15\sqrt{2})=24\sqrt{2}-25<0$$

به‌این ترتیب، همهٔ جواب‌های دستگاه(2)، عبارتندازهمان‌جواب‌های دستگاه اول. در نتیجه، دستگاه مفروض مسأله، با مجموعهٔ دو دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} \sin(-2x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ tg\,5y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \sin(-2x)=\frac{-6+\sqrt{2}}{2} \\ tg\,5y=\frac{6-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

دستگاه دوم، جواب‌ندارد، زیرا $\frac{-6+\sqrt{2}}{2}<-1$. با حل دستگاه اول، به‌دست می آید:

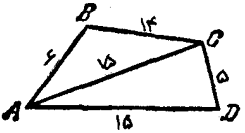
$$-2x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4} \implies x=-\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}(n\in Z)$$

$$5y = k\pi - \operatorname{artg}\frac{\sqrt{2}}{2} \implies y = \frac{k\pi}{5} - \frac{1}{5}\operatorname{artg}\frac{\sqrt{2}}{2} (k \in Z)$$

۴. سرعت جهان‌گردان را، به‌ترتیب شماره‌های آن‌ها، v_1، v_2 و v_3 کیلومتر درساعت می‌گیریم. داریم:

$$v_3 > v_2, \quad v_1 - v_3 = \frac{1}{2} \ , \ 5 \leqslant v_i \leqslant 5 \ (i = 1, 2, 3)$$

۱) ابتدا به‌این‌نکته‌توجه‌می‌کنیم که،اگر برای‌دوجهان‌گرد،دو پاره‌خط اول مسیریکی باشد، به ناچار ، تمامی مسیر آن‌ها برهم منطبق می‌شود. طبق شرط ، هرمسیر از سه پاره خط تشکیل شده است و، ضمناً، از هرچهار شهـر می‌گذرد (شکل ۲۴). بنا بر فرض، سه مسیر باهم‌فرق‌دارند. بنا بر این، می‌توان نتیجه گرفت که مسیر هر دو جهان‌گرد، باید قبل‌از عبور از دوپاره خط مسیر، متمایز باشد.



شکل ۲۴

۲) اگرجهان‌گردان‌ازشهرA شروع به‌حرکت کرده‌باشند، برای‌این‌که دونفرآن‌ها درد‌وپاره‌خط اولیهٔ ازیك مسیرعبورنکنند، به‌ناچار، یکی ازآن‌ها باید روی قطر AC آغازبه‌حرکت‌کند، ولی دراین صورت، نمی‌تواند از همهٔ شهرها بگذرد (مسیر اوتنها بایـد از سه پاره‌خط تشکیل شده بـاشد). بنا براین، جهان‌گردان، از نقطهٔ A آغاز به‌حرکت نکرده‌اند. به‌همین دلیل، آن‌ها، ازنقطهٔ C هم‌نمی‌توانسته‌اند آغاز به‌حرکت کنند. به‌این‌ترتیب، جهان‌گردان یا ازشهرB حرکت‌کرده‌اند ویا ازشهر D.

۳) طبق شرط، دوجهانگرد اول ودوم، قبل‌ازپیمودن جادهٔ سوم، به‌هم رسیده‌اند، بنابراین (قسمت۱) را ببینید)، جهان گردان اول ودوم، دردومسیر مختلف به‌راه افتاده‌اند ودر رأس مقابل چهارضلعی (نسبت به نقطهٔ حرکت) به‌هم رسیده‌اند. چون $v_1 > v_2$، پس طول‌مسیرجهان گرداول تالحظهٔملاقات با جهان‌گرد دوم، برابراست با

$$|AB| + |AD| = 21$$

وطول مسیرجهان‌گرد دوم، تاهمین ملاقات:

$$|BC| + |CD| = 19$$

۴) پاره‌خط‌دوم مسیرجهان‌گردسوم، بر AC منطبق‌است(قسمت ۱)را

ببینید) وطول تمامی مسیر جهان‌گرد سوم، یا برابراست با

$$|BC|+|CA|+|AD|=۴۴$$

ویا برابربا

$$|AB|+|AC|+|CD|=۲۶$$

درحالت اول، مسیر جهان گـرد سوم، طولانی‌ترین مسیرها می‌شود. چون $v_۳ < v_۱$، پس، جهان‌گرد اول، زودتراز جهان‌گرد سوم می‌رسد. طول مسیرجهان‌گرد دوم، از ۳۴ کیلومتر تجاوزنمی‌کند، یعنی زمانـی که بـرای پیمودن مسیرخود صرف می‌کند، بیشتراز $\frac{۳۴}{v_۲}$ نیست‌وزمان‌لازم‌برای‌جهانگرد سوم، برابر است با $\frac{۴۴}{v_۳}$. داریم :

$$\frac{۴۴}{v_۳}=\frac{۴۴}{v_۱-\frac{۱}{۲}}>\frac{۴۴}{v_۱}=\frac{۴۴\times ۱۹}{۲۱\times v_۲}>\frac{۳۴}{v_۲}$$

به‌این ترتیب، درحالت اول، جهان‌گرد سوم باید دیرتراز همه به‌انتهای راه برسد، ولی این، با شرط مسأله متناقض است. بنابراین، طول مسیر جهان‌گرد سوم، نه ۴۴ کیلومتر، بلکه ۲۶ کیلومتراست.

۵) فرض می‌کنیم، جهان‌گردان ازنقطهٔ B، آغازبه‌حرکت‌کرده‌باشند. در این صورت، مسیر اولی BADC، مسیر دومی BCDA و مسیر سومی BACD خواهدبود. مسیرها، به‌ترتیب. برابراست‌با ۲۶ کیلومتر، ۳۴ کیلومتر و ۲۶ کیلومتر؛ وزمانی را که درراه صرف می‌کنند، $\frac{۲۶}{v_۱}$، $\frac{۳۴}{v_۲}$ و $\frac{۲۶}{v_۳}$ ساعت می‌شود. ازقسمت۳) نتیجه می‌شودکه جهان‌گرد اول، مسیرخودرا قبل از دومی تمام می‌کند$\left(\frac{۲۶}{v_۱}>\frac{۳۴}{v_۲}\right)$. با استفاده از شرط داریم:

$\frac{۲۶}{v_۳}+۱=\frac{۳۴}{v_۲}$؛ چون$۸\leqslant v_۳$، بنابراین $\frac{۳۴}{v_۲}\leqslant\frac{۸+۲۶}{v_۳}$ یا $v_۳\leqslant v_۲$ که با شرط مسأله متناقض است.

به‌این ترتیب، جهان‌گردان ازنقطهٔ D آغاز به‌حـرکت‌کرده‌اند؛ مسیر اولی DABC، مسیردومی DCBA ومسیر سومی DCAB. طول مسیرها،

به‌ترتیب، ۳۵ کیلومتر، ۲۵ کیلومتر و ۲۶ کیلومتر، و زمان لازم برای تمام‌مسیر، $\frac{35}{v_1}$ ساعت، $\frac{25}{v_2}$ ساعت و $\frac{26}{v_3}$ ساعت است. از قسمت ۳) نتیجه می‌شود که جهان‌گرد اول، دیرتر از همه می‌رسد $\left(\frac{35}{v_1}>\frac{25}{v_2}\right)$. به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases}\dfrac{35}{v_1}=1+\dfrac{26}{v_3}\\ v_1-v_3=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

این دستگاه، منجر به معادلهٔ درجه دوم $v_1^2-\frac{19}{2}v_1+\frac{35}{2}=0$ می‌شود که ریشه‌های آن برابر است با ۷ و $\frac{5}{2}$. بنابر شرط، سرعت‌ها، در فاصلهٔ ۵ تا ۸ کیلومتر درساعت قراردارند، یعنی ریشهٔ $\frac{5}{2}$ قابل قبول نیست. به‌این ترتیب:

$$v_1=7,\quad v_3=v_1-\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}\ ,\ v_2=\frac{19}{21}v_1=\frac{19}{3}$$

و به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این مقدارها، با همه شرط‌های مسأله، سازگارند.

پاسخ: ۷ کیلومتر درساعت، $6\frac{1}{3}$ کیلومتر درساعت و $6\frac{1}{2}$ کیلومتر درساعت.

۵. α را تثبیت می‌کنیم و $\varphi(\alpha)$ را حداقل تابع $f(x)$، در فاصلهٔ $-\sin\alpha\leqslant x\leqslant\cos\alpha$ می‌گیریم. $\varphi(\alpha)$ را پیدا می‌کنیم. تابع $f(x)$، درهر نقطهٔ محورعددی، دارای مشتق است:

$$f'(x)=12x^3+12x^2(\cos\alpha-\sin\alpha)-6x\sin 2\alpha$$

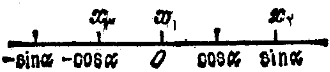
با حل معادلهٔ $f'(x)=0$، نقطه‌های بحرانی تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x_1=0,\quad x_2=\sin\alpha,\quad x_3=-\cos\alpha$$

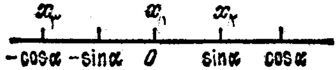
پنج حالت‌را درنظرمی گیریم:

۱) $0<\alpha<\frac{\pi}{۴}$. دراین‌حالت $0<\sin\alpha<\cos\alpha$ وبنابراین $x_۳<x_۱<x_۲$.
$x_۱$ و $x_۲$ در فاصلهٔ $-\sin\alpha<x<\cos\alpha$ — قرارداد (شکل ۲۵). در فاصلهٔ $(-\sin\alpha، \cos\alpha)$، علامت مشتق، چنین است

فاصله	$(-\sin\alpha، x_۱)$	$(x_۱، x_۲)$	$(x_۲، \cos\alpha)$
علامت $f'(x)$	$+$	$-$	$+$



شکل ۲۶



شکل ۲۵

یعنی، تابع $f(x)$، در فاصلهٔ $(-\sin\alpha، x_۱)$ صعودی، در فاصلهٔ $(x_۱، x_۲)$ نزولی و درفاصلهٔ $(x_۲، \cos\alpha)$ دوباره صعودی است. چون $f(x)$، درهر نقطه محور Ox پیوسته‌است، حداقل مقدار آن‌در بازهٔ $[-\sin\alpha، \cos\alpha]$، برابراست باکمترین مقدارازبین دومقدار $f(-\sin\alpha)$ و $f(x_۲)=f(\sin\alpha)$.
چون

$$f(\sin\alpha)-f(-\sin\alpha)=۸\sin^۳\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)>0$$

بنا بر این :

$$\varphi(\alpha)=f(-\sin\alpha)=۷\sin^۴\alpha-۱0\sin^۳\alpha\cos\alpha.$$

۲) $\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$. دراین حالت داریم: $0<\cos\alpha<\sin\alpha$ و بنابراین $x_۳<x_۱<x_۲$. نقطه‌های $x_۳$ و $x_۱$، در فاصلهٔ $(-\sin\alpha)<x<\cos\alpha$ واقع‌اند (شکل ۲۶). به‌این ترتیب، علامت مشتق، درفاصلهٔ $(-\sin\alpha، \cos\alpha)$ چنین است:

فاصله	$(-\sin\alpha، x_۳)$	$(x_۳، x_۱)$	$(x_۱، \cos\alpha)$
علامت $f'(x)$	$-$	$+$	$-$

به‌این ترتیب، $f(x)$ درفاصلهٔ $(-\sin\alpha، x_۳)$ نزولی، در فاصلهٔ $(x_۳، x_۱)$

صعودی ودرفاصلهٔ $(x_1, \cos\alpha)$ دوبارهٔ نزولی است. چون $f(x)$ درهر نقطهٔ محور Ox پیوسته است، حداقل مقدار آن دربازهٔ $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$ برابر است باکمترین مقدار ازبین دو مقدار $f(x_3)=f(-\cos\alpha)$ و $f(\cos\alpha)$.
چون

$$f(-\cos\alpha)-f(\cos\alpha)=-8\cos^3\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)>0$$

بنابراین:

$$.\varphi(\alpha)=f(\cos\alpha)=7\cos^4\alpha-10\sin\alpha\cos^3\alpha$$

۳) $\alpha=0$. دراین‌حالت داریم: $x_1=x_2=0$، $x_3=-1$ و بازهٔ $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$، همان‌بازهٔ $[0, 1]$ می‌شود. هیچ کدام ازنقطه‌های x_1، x_2 و x_3 دربازهٔ $(0, 1)$ نیستند. چون $f(x)$، درتمامی محور Ox، پیوسته است، حداقل مقدار (x) دربازهٔ $[0, 1]$، برابر است باکمترین مقدار از بین دو مقدار $f(0)$ و $f(1)$. وچون $f(0)=0$ و $f(1)=1$، بنابراین $\varphi(0)=0$.

۴) $\alpha=\frac{\pi}{2}$. دراین حالت داریم: $x_1=x_3=0$، $x_2=1$ وفاصلهٔ $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$، همان‌فاصلهٔ $[-1, 0]$ می‌شود. هیچ‌یك‌ازنقطه‌های x_1، x_2 و x_3 دربازهٔ $(-1, 0)$ قرارندارندبنابراین، حداقل‌مقدار $f(x)$، دربازهٔ $[-1, 0]$، عبارت است ازکمترین مقدار از بین دو مقدار $f(1)$ و $f(0)$. چون $f(0)=0$ و $f(1)=7$، پس $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

۵) $\alpha=\frac{\pi}{4}$. دراین‌حالت داریم:

$x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$، $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$، $x_3<0=x_1<x_2$. بازهٔ $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$، همان بازهٔ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ می‌شود. یکی‌ازنقطه‌های بحرانی، یعنی $x_1=0$، دربازه $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ قراردارد. بنابراین، حداقل مقدار $f(x)$، در بازهٔ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$، عبارت‌است‌از کمترین مقدارازبین‌سه‌مقدار $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$، $f(0)$ و $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وچون داریم:

$f(\circ)=\circ$، $f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-\frac{۳}{۴}$، پس $\varphi\left(\frac{\pi}{۴}\right)=-\frac{۳}{۴}$. به‌این ترتیب:

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases} \circ & (\alpha=\circ) \\ ۷\sin^۴\alpha-۱\circ\sin^۳\alpha\cos\alpha & \left(\circ<\alpha<\frac{\pi}{۴}\right) \\ -\frac{۳}{۴} & \left(\alpha=\frac{\pi}{۴}\right) \\ ۷\cos^۴\alpha-۱\circ\cos^۳\alpha\sin\alpha & \left(\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}\right) \\ \circ & \left(\alpha=\frac{\pi}{۲}\right) \end{cases}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، عبارت $\varphi(\alpha)$ را، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\varphi(\alpha)=\begin{cases} ۷\sin^۴\alpha-۱\circ\sin^۳\alpha\cos\alpha & \alpha\in\left[\circ,\frac{\pi}{۴}\right] \\ ۷\cos^۴\alpha-۱\circ\sin\alpha\cos^۳\alpha & a\in\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\right] \end{cases}$$

در مسأله خواسته شده است که حداقل مقدار تابع $\varphi(\alpha)$ را در فاصلهٔ $\circ\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}$ پیدا کنیم. از عبارتی که برای $\varphi(\alpha)$ پیدا کرده‌ایم، نتیجه می‌شود که

$$\varphi(\alpha)=\varphi\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)\qquad\alpha\in\left[\circ,\frac{\pi}{۴}\right]$$

بنابراین، کافی است، حداقل تابع زیر را، در بازهٔ $\circ\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۴}$، پیدا کنیم:

$$\varphi(\alpha)=۷\sin^۴\alpha-۱\circ\sin^۳\alpha.\cos\alpha$$

تابع $\varphi(\alpha)$، درهر نقطه‌ای، دارای مشتق است:

$$\varphi'(\alpha)=۲۸\sin^۳\alpha\cos\alpha-۳\circ\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha+۱\circ\sin^۴\alpha$$

بنابراین، در بازهٔ $\left(\circ,\frac{\pi}{۴}\right)$ داریم:

$$\varphi'(\alpha)=2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(5tg^2\alpha+14tg\alpha-15)$$

ریشه‌های $\varphi'(\alpha)=0$، درواقع، ریشه‌های معادلهٔ زیر است (زیرا، ریشه‌های $\sin\alpha=0$ و $\cos\alpha=0$، در بازهٔ موردنظر نیستند):

$$5tg^2\alpha+14tg\alpha-15=0$$

که ریشه‌های آن چنین‌اند:

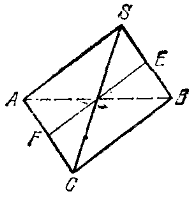
$$\alpha=\operatorname{arc}tg\frac{-7+2\sqrt{31}}{5}+\pi n \quad \text{و}$$

$$\alpha=\operatorname{arc}tg\frac{-7-2\sqrt{31}}{5}+\pi n(n\in Z)$$

وقتی‌که α بین ۰ و $\frac{\pi}{4}$ واقع باشد، $tg\alpha$ مقداری است مثبت‌که از ۱ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، تنها $\alpha_1=\operatorname{arc}tg\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$ با شرط $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ سازگار است. مشتق $\varphi'(\alpha)$، به‌ازای $0<\alpha<\alpha_1$، منفی و به‌ازای $\alpha_1<\alpha<\frac{\pi}{4}$ مثبت است. بنابراین، تابع $\varphi(\alpha)$، برای $0<\alpha<\alpha_1$ نزولی و، برای $\alpha_1<\alpha<\frac{\pi}{4}$، صعودی است. چون تابع $\varphi(\alpha)$، درهر نقطه ازبازهٔ $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ پیوسته است، بنابراین، حداقل مقدار $\varphi(\alpha)$، دربازهٔ $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$، در دو نقطهٔ α_1 و $\frac{\pi}{2}-\alpha_1$ وجود دارد.

پاسخ: $\operatorname{arc}tg\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$ و $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}tg\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

۶. E را وسط یال BS می‌گیریم (شکل ۲۷). بنابرشرط مسأله، روی خط‌راست AC، نقطهٔ F وجوددارد، به‌نحوی‌که‌داشته‌باشیم: $FE\perp AC$ و $FE\perp BS$.

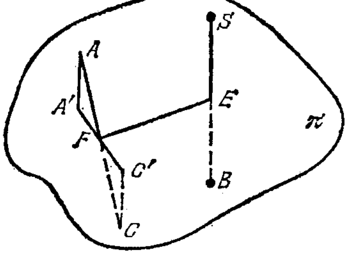


شکل ۲۷

صفحه‌ای را که ازخط راست EF می‌گذرد و بر BS عمود است، π می‌نامیم. چنین صفحه‌ای وجود دارد؛ برای اثبات کافی است خط راست دلخواه EG را از نقطهٔ E بگذرانیم، به‌نحوی‌که بر BS عمود و با EF

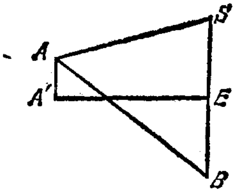
متفاوت باشد. دراین‌صورت، صفحهٔ EFG بر BS عمود می‌شود.

تصویرهای قائم نقطه‌های CA را برصفحهٔ π، به‌ترتیب، A' و C' می‌نامیم (شکل ۲۸). توجه کنیم که‌نقطه‌های A' و C' باهم فرق‌دارند؛ درغیر این‌صورت AC بر π عمودمی‌شود، یعنی $AC \| BS$ و، درنتیجه، نقطه‌های A،B،C و S، روی یك صفحه قرار می گیرند، و این، ممکن نیست. بنابر قضیهٔ سه عمود داریم: $A'C' \perp FE$، یعنی مثلث‌های $A'FE$ و $C'FE$قائم‌الزاویه‌اند. طول پاره‌خط $A'E$ برابر است باطول ارتفاعی ازمثلثASBکه از رأس A گذشته است (شکل ۲۹).



شکل ۲۸

به‌همین ترتیب، طول پاره‌خط $C'E$، برابربا طول ارتفاعی ازمثلث BSC می‌شود که از رأس C گذشته باشد. ولی مثلث هـای ASB و BSC، در قاعده مشترکند ومساحت‌هایی برابر دارند ، بنابراین، ارتفاع‌هایی از این مثلث‌ها که، به‌ترتیب،از رأس‌های Aو C می گذرد، باهم برابرند و، درنتیجه؛ طول دوپاره‌خط $A'E$ و$C'E$ هم‌برابر می‌شود.



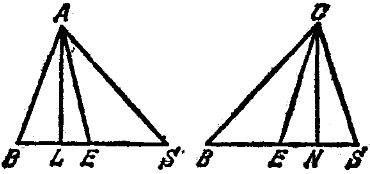
شکل ۲۹

مثلث‌های‌قائم‌الزاویهٔ $A'FE$ و $C'FE$، درضلع مجاوربه‌زاویهٔ‌قائمهٔ FE مشترکندووترهایی‌برابردارند. بنابراین، خواهیم‌داشت: $A'F = C'F$. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $AA'F$ و $CC'F$، دریك‌ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه و یك زاویهٔ حاده برابرند ($A'F = C'F$ و $A\widehat{F}A' = C\widehat{F}C'$). بنابراین داریم: $AF = CF$، یعنی نقطهٔ F وسط پاره خط AC است.

ثابت می کنیم: $BC = AS$ و $AB = CS$. ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ CFE و AFE، بنابرقضیهٔ فیثاغورث، نتیجه می‌شود:

$$CE = \sqrt{CF^۲ + FE^۲} \quad , \quad AE = \sqrt{AF^۲ + FE^۲}$$

ازآن‌جا، باتوجه‌به‌این که$AF = CF$، به‌دست‌می‌آید: $CE = AE$. بنابراین، در مثلث‌هـای ASB و BSC، کـه در قاعدهٔ BS مشترك‌اند، مساحت‌ها و میانه‌های وارد ازرأس‌های A و C برابرند. پای ارتفاع‌های وارد ازرأس-



شکل ۳۰

های A و C را، در مثلث‌های ASB و BSC، به ترتیب، L و N می‌نامیم (شکل ۳۰). چون، این دو مثلث، مساحت‌هایی برابر دارند، پس AL = CN (از این حقیقت، قبلاهم استفاده کردیم). مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ALE و CNE، در وتر و یک ضلع، برابرند، درنتیجه LE = EN. چون نقطه‌های A و C، نسبت به صفحهٔ π، دردوطرف مختلف قراردارند، بنابراین، نقطه‌های L و N در دوطرف مختلف نقطهٔ E قرار دارند. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که BL = SN و SL = BN. این، ثابت می‌کند که مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABL، CNS، ALS و CNB برابرند (دردوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه)؛ ازآن‌جا: CS = AB و AS = BC. واین به‌معنای آن است که مثلث‌های ASC و ABC برابرند (درسه ضلع). حجم هرم را V و مساحت مثلث BSC را α می‌گیریم. در این صورت، مساحت مثلث‌های ASB، ASC و ABC، به ترتیب، برابر α، 2α و 2α می‌شود.

تصویرهای قائم نقطهٔ M را روی وجه‌های مقابل به‌رأس‌های A، B، C و S، به ترتیب، A_1، B_1، C_1 و S_1 می‌گیریم، آن وقت، از آن‌چه ثابت کردیم، این برابری به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3}MA_1 . a + \frac{1}{3}MB_1 . 2\alpha + \frac{1}{3}MC_1 . \alpha + \frac{1}{3}MS_1 . 2\alpha$$

یا

$$MA_1 + 2MB_1 + MC_1 + 2MS_1 = \frac{3V}{a}$$

بنابر شرط مسأله : $MB + MS = MA_1 + MB_1 + MC_1 + MS_1$، از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$MB + MB_1 + MS + MS_1 = \frac{3V}{a}$$

ارتفاع‌های هرم را، که ازرأس‌های B و S رسم شده‌اند، به ترتیب، h_B و h_S می‌نامیم. دراین صورت:

$V=\frac{1}{3}h_B \cdot 2a$ و $V=\frac{1}{3}h_S \cdot 2a$. ازاین‌جا $h_B=h_S=\frac{3V}{2a}$ و

$h_B+h_S=\frac{3V}{a}$. به‌این ترتیب:

$$MB+MB_1+MS+MS_1=h_B+h_S \qquad (3)$$

ولی، درعین‌حال، نابرابری‌های زیرهم واضح است:

$$MB+MB_1 \geqslant h_B \text{ ، } MS+MS_1 \geqslant h_S \qquad (4)$$

اکنون، از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$MB+MB_1=h_B \text{ ، } MS+MS_1 \geqslant h_S$$

یعنی، نقطهٔ M، محل برخورد ارتفاع‌هایی است که ازرأس‌های B و S رسم شده‌اند.

ازآن‌چه ثابت شد، نتیجه می‌شود: $BM \perp AC$ و $SM \perp AC$. از آن‌جا، نتیجه می‌شود که خط راست AC برصفحهٔ BSM و، به خصوص، برخط راست BS عمود است. علاوه برآن، بنابرفرض: $AC \perp FE$. به‌این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که خط راست AC برصفحهٔ BSF عمود است. بنابراین: $AC \perp FS$. مثلث‌های قائم‌الزاویه ASF و CSF، در دو ضلع مجاوربه‌زاویهٔ‌قائمه، باهم برابرند. بنابراین: $AS=CS$. باتوجه به‌آن‌چه قبلا ثابت کردیم، این، به‌معنای آن است که: $BC=AS=CS=AB$. علاوه‌برآن، ثابت‌کردیم، نقطهٔ M برصفحهٔ BSF قراردارد. درواقع، ثابت کردیم‌که صفحه‌های BSM و BSF برخط راست AC عمودند؛ یعنی‌باهم موازی‌اند. چون، این دوصفحه، درخط راست BS مشترک‌اند، بنابراین‌برهم منطبق می‌شوند.

FE را x می گیریم. ازمثلث قائم‌الزاویهٔ FES، بنابه‌قضیهٔ فیثاغورث، به‌دست می‌آید:

$$FS=\sqrt{FE^2+\frac{1}{4}BS^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} \text{ ،}$$

و

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC \cdot FS=\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$$

اگر از قضیهٔ فیثاغورث، در مثلث قائم‌الزاویهٔ FEC استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$CE=\sqrt{FE^{2}+\frac{1}{4}AC^{2}}=\sqrt{x^{2}+\frac{3}{2}}$$

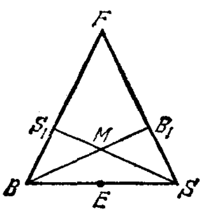
و

$$S_{SBC}=\frac{1}{2}BS\cdot CE=\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}+\frac{3}{2}}$$

دراین‌جا، از این مطلب استفاده کردیم که در مثلث متساوی‌الساقین BSC، میانهٔ CE، ضمناً ارتفاع مثلث است. بنابرشرط، مساحت وجه ASC، دوبرابر مساحت وجه BSC است به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{x^{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^{2}+\frac{3}{2}}$$

که با حل آن به‌دست می‌آید: $x=\frac{3}{2}$. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BSS_1 و SBB_1، دروتر ویك ضلع برابرند $(SS_1=h_S=h_B=BB_1)$ (شکل ۳۱). بنابراین: $\widehat{B_1BS}=\widehat{S_1SB}$، و این، به معنای متساوی‌الساقین بودن مثلث BMS است. ولی در این صورت:



شکل ۳۱

$$BM=\frac{BE}{\cos\widehat{MBE}}=\frac{1}{2\sin\widehat{BSF}}$$

ازمثلث قائم‌الزاویهٔ FES به‌دست می‌آید:

$$tg\,\widehat{BSF}=\frac{FE}{ES}=3$$

وازآن‌جا

$$\sin\widehat{BSF}=\frac{tg\,\widehat{BSF}}{\sqrt{1+tg^{2}\widehat{BSF}}}=\frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$BM=\frac{۱}{۲\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$$

پاسخ: $\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x\leqslant log_{۳}\left(\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}}\right)$؛ ۲. $\frac{۸}{\sqrt{۱۶-\pi^{۲}}}$؛

۳. $x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$، $y=\frac{n\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}arc\,tg\frac{۱}{۲}$ $(k،\ n\in Z)$؛

۴. $v_{۱}=۱۱۰$، $v_{۲}=۱۲۰$، $v_{۳}=۱۰۰$ (کیلومتردرساعت)؛

۵. $\alpha=\frac{\pi}{۳}$؛ ۶. $۲\sqrt{۳}$.

گروه سوم. ۱. $x\geqslant log_{۴}\left(\frac{\sqrt[۴]{۳}}{۴}\right)$؛ ۲. $۲\sqrt{۵-\pi}$؛

۳. $x=\frac{k\pi}{۳}+(-۱)^{k}\frac{\pi}{۹}$، $y=\frac{n\pi}{۷}-\frac{۱}{۷}arc\,tg\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $(k،n\in Z)$؛

۴. $v_{۱}\ ۱۶$، $v_{۲}=۱۷/۵$، $v_{۳}=۱۸/۵$ (کیلومتر درساعت)؛

۵. $\alpha_{۱}=-arc\,tg\frac{۷+۲\sqrt{۳۱}}{۱۵}$، $\alpha_{۲}=arc\,tg\frac{۷+۲\sqrt{۳۱}}{۱۵}$؛

۶. $\sqrt{۱۵}$.

گروه چهارم. ۱. $x\leqslant log_{۵}\frac{۵}{\sqrt[۴]{۲}}$؛ ۲. $\frac{۶}{\pi\sqrt{۵}}$؛

۳. $x=\frac{k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۱۸}$، $y=\frac{n\pi}{۹}-\frac{۱}{۹}arc\,tg\frac{۱}{۲}$ $(k،\ n\in Z)$؛

۴. $v_{۱}=۴۰$، $v_{۲}=۵۰$، $v_{۳}=۶۰$ (کیلومتر درساعت)؛

۵. $\alpha=-\frac{\pi}{۶}$؛ ۶. $۲arc\sin\left[\frac{۲}{۳}\left(۱-\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)\right]$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول نامعادلهٔ مفروض، از دو فاصلهٔ $x \leqslant -۱$ و $x \geqslant ۲$ (جواب نامعادلهٔ $x^۲ - x - ۲ \geqslant ۰$) تشکیل شده است. مقدارهای $x = -۱$ و $x = ۲$، در نامعادلهٔ مفروض، صدق می‌کنند (سمت چپ نامعادله، برابر صفر می‌شود). تابع $y(x) = \sqrt{x^۲ - x - ۲}$، به‌ازای $x < -۱$ و $x > ۲$، مثبت است و، بنابراین، در این حالت‌ها، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ $x - ۱ \geqslant ۰$ هم‌ارز است که، با توجه به شرط‌های $x < ۱$ و $x > ۲$، به جواب‌های $x > ۲$ می‌رسد.

پاسخ: $x = -۱$ و $x \geqslant ۲$.

۲. چون $f(x)$، در تمامی نقطه‌های محور عددی، مشتق‌پذیر است، بنابر قضیهٔ فرما، همهٔ نقطه‌های می‌نیمم آن، در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کنند:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲} = \cos\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{x}{۲}\right) - \frac{۱}{۲} = ۰$$

که جواب‌های آن چنین است:

$$x = ۴n\pi \text{ و } x = ۴k\pi - \frac{۴\pi}{۳} \quad (n، k \in Z)$$

نقطه‌های می‌نیمم در میان همین مقدارهای x هستند. برای پیدا کردن آن‌ها، از شرط‌های کافی وجود اکسترمم استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f'(x) \times ۰$ یا $\cos\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{x}{۲}\right) \times \frac{۱}{۲}$ عبارت است از:

$$۴k\pi - \frac{۴\pi}{۳} \times x \times ۲k\pi \quad (k \in Z)$$

و این به‌معنای آن است که $f'(x)$ در همهٔ نقطه‌های

$$۴(k-۱)\pi < x < ۴k\pi - \frac{۴\pi}{۳} \quad (k \in Z)$$

منفی است. بنابراین، مشتق $f'(x)$، ضمن عبور از نقطه‌های به‌صورت

$x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به‌مثبت می‌رود و، ضمن عبور از نقطه‌های به صورت $x=۴k\pi$، از مثبت به‌منفی می‌رود. به‌این ترتیب، نقطه‌های $x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ $(k\in Z)$، نقطه‌های می‌نیمم و نقطه‌های $x=۴k\pi$ $(k\in Z)$، نقطه‌های ماکزیمم‌اند.

پاسخ: $x=۴k\pi-\frac{۴\pi}{۳}$ $(k\in Z)$.

۳. مختصات نقطهٔ تماس خط با نمودار تابع $f(x)=-\frac{x^۲}{۲}+۲$ را (α,β) می‌گیریم. ضریب زاویهٔ این خط برابر است با $f'(\alpha)=-\alpha$ و، در نتیجه، معادلهٔ آن به‌این صورت درمی‌آید:

$$y=\beta-\alpha(x-\alpha)$$

این خط باید از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ بگذرد و بنابراین

$$۲-\beta=-\alpha\left(\frac{۱}{۲}-\alpha\right) \Longrightarrow \beta+\alpha^۲-\frac{\alpha}{۲}=۲$$

ضمناً، نقطهٔ تماس (α, β)، روی نمودار $f(x)$ است، پس

$$\beta=-\frac{\alpha^۲}{۲}+۲$$

از حل دستگاه شامل این دو معادله، به‌جواب‌های $(۰,۲)$ و $\left(۱, \frac{۳}{۲}\right)$ می‌رسیم؛ و معادله مماس‌های بر نمودار، چنین می‌شود:

$$y=۲ \text{ و } y=-x+\frac{۵}{۲}$$

نقطه‌های برخورد هریک از این دو خط راست را با نمودار تابع $y(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ پیدا می‌کنیم. دستگاه

$$\begin{cases} y=\sqrt{۴-x^۲} \\ y=۲ \end{cases}$$

به‌جواب منحصر به‌فرد $(۰,۲)$ می‌رسد. پس خط راست $y=۲$، تنها در یك

نقطه با نمودارتابع $y(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ مشترك است. ولی دستگاه

$$\begin{cases} y=\sqrt{۴-x^۲} \\ y=-x+\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

منجر به‌جواب‌های قابل قبول زیر می‌شود:

$$\left(\frac{۵+\sqrt{۷}}{۴}, \frac{۵-\sqrt{۷}}{۴}\right) \text{ و } \left(\frac{۵-\sqrt{۷}}{۴}, \frac{۵+\sqrt{۷}}{۴}\right)$$

یعنی خط راست دوم، نمودار تابع $y(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ رادر دونقطهٔ متمایز قطع می‌کند.

پاسخ : $y=-x+\frac{۵}{۲}$.

۴. چون $۲۱۰=۲\times۳\times۵\times۷$ بر هر یك از عددهای متعلق به مجموعهٔ A بخش‌پذیر است، بنابراین، هرعضوی از A، تنها می‌تواند حاصل‌ضربی ازبرخی عامل‌های اول ۲،۳،۵ و۷، بانمائی که ازواحد تجاوز نمی‌کند، باشد. بنابر فرض، حاصل‌ضرب همهٔ عددها، بر ۱۹۲۰، یعنی $۲^۷\times۳\times۵$ بخش‌پذیر است واین، به‌معنای آن است که، دربین عضوهای A، دست‌کم، هفت عدد زوج وجوددارد. ولی تنها هشت عددزوج وجودداردکه باشرط‌های ماسازگارند. این هشت عددعبارتنداز:

$۲،\quad ۲\times۳=۶،\qquad ۲\times۵=۱۰،\qquad ۲\times۷=۱۴،$

$۲\times۳\times۵=۳۰،\qquad ۲\times۳\times۷=۴۲،\qquad ۲\times۵\times۷=۷۰،$

$۲\times۳\times۵\times۷=۲۱۰$

اگر ۲ یکی ازعضوهای مجموعهٔ A باشد، آن وقت، هریك ازدیگر عضوهای A هم باید بر ۲ بخش پذیر باشند زیرا بنابر فرض، هر دو عضو دلخواه A، مقسوم‌علیه مشترکی بزرگترازواحد دارند. دراین حالت‌خواهیم داشت :

$$A=\{۲،۴،۶،۱۰،۱۴،۳۰،۴۲،۷۰،۲۱۰\}$$

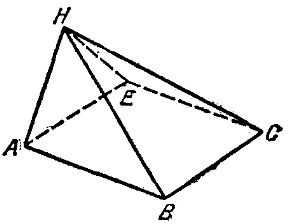
(تعداد عضوهای مجموعهٔ A، کمتر از ۸ نیست). ولی، در این صورت، حاصل‌ضرب همهٔ‌عضوها برابر $۲^۸\times۳^۴\times۵^۴\times۷^۴$ می‌شود که مجذورکامل‌و

متناقض با فرض است. بنابراین، عدد ۲، متعلق به مجموعهٔ A نیست و، درنتیجه، عددهای ۶، ۱۰، ۱۴، ۳۰، ۴۲، ۷۰ و ۲۱۰ متعلق به A هستند. ولی، بنابر فرض، تعداد عضوهای A ازهفت بیشتراست. N را عددی می گیریم که متعلق به A باشد. چون، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ۶ و N مخالف واحد است، N باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد (N به ناچار عددی فرد است و، بنابراین، بر ۲ بخش‌پذیر نیست). باهمین استدلال، روشن می‌شود که N باید بر ۵ و ۷ هم بخش‌پذیر باشد. به این ترتیب، N بر $۳\times۵\times۷$ بخش‌پذیر است. چون عددهای اول ۳، ۵ و ۷، نمی‌توانند در N، توانی بزرگتر از واحد داشته باشند، پس $N=۳\times۵\times۷$ وعدد فرد دیگری، در A، نمی‌تواند وجود داشته باشد.

پاسخ: $A=\{۶،۱۰،۱۴،۳۰،۴۲،۷۰،۱۰۵،۲۱۰\}$.

۵. چون مثلث‌های ABE و BCE (شکل ۳۲) هم‌ارزند، بنابراین حجم هرم ABEH نصف حجم هرم ABCEH است، یعنی $V_{ABEH}=\frac{۱}{۲}$.

از طرف دیگر، اگر فاصلهٔ نقطهٔ B از AEH را h_B بگیریم، داریم: $V_{ABEH}=\frac{۱}{۳}h_B\cdot S_{AEH}$. یعنی $h_B\cdot S_{AEH}=\frac{۱}{۴}$. باتوجه به‌این‌که



شکل ۳۲

$S_{AEH}=\frac{۱}{۲}|AH|\cdot|EH|\sin\widehat{AHE}\leqslant\frac{۱}{۲}|AH|\cdot|EH|$ و $h_B\leqslant|AB|=۱$ وبا توجه به نابرابری بین واسطهٔ هندسی وواسطهٔ عددی

$$\sqrt{|AH|\cdot|EH|}\leqslant\frac{|AH|+|EH|}{۲}$$

به‌دست می آید:

$$\frac{۱}{۴}=h_B\cdot S_{AEH}\leqslant|AB|\cdot\frac{۱}{۲}\cdot|AH|\cdot|EH|\sin\widehat{AHE}\leqslant$$

$$\leqslant۱\times\frac{۱}{۲}\cdot\left(\frac{|AH|+|EH|}{۲}\right)^۲=۱\times\frac{۱}{۲}\cdot\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، درواقع، همهٔ علامت‌های نابرابری، باید به‌برابری

تبدیل شود، یعنی

۱) $|AB|=1=h_B$؛ واین، به‌معنای آن است که یال AB برصفحهٔ AEH عمود است؛

۲) $\sin\widehat{AHE}=1$ یا $\widehat{AHE}=\frac{\pi}{2}$،

۳) $\frac{|AH|+|EH|}{2}+\sqrt{|AH|\cdot|EH|}$، که از آن‌جا به دست می‌آید: $|AH|=|EH|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. از مثلث قائم‌الزاویهٔ AHE به‌دست می‌آید:

$$|AE|=\sqrt{|AH|^2+|EH|^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

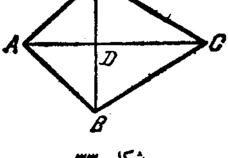
معلوم می‌شود که مثلث ABE متساوی‌الساقین است:

$$|AB|=|AE|=1 .$$

D راوسط پاره‌خط BE می‌گیریم (شکل ۳۳). چون مثلث‌های BAE و BCE متساوی‌الساقین هستند، بنابراین AD و CD، ارتفاع‌های این مثلث‌ها می‌شوند، یعنی

$$S_{BAE}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|BE|,\quad S_{BCE}=\frac{1}{2}|CD|\cdot|BE|$$

بنابرشرط، مثلث‌های BAE و BCE هم‌ارزند، بنابراین $|AD|=|CD|$. درمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADE و EDC، ضلع ED مشترک و $|AD|=|CD|$، بنابراین: $|AE|=|EC|$ بنابراین، چهار ضلعی، ABCE لوزی است.

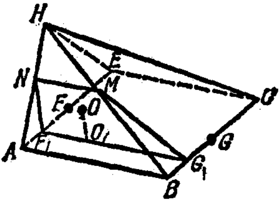


شکل ۳۳

قبلا دیدیم که یال AB برصفحهٔ AHE و، درنتیجه، برخط راست AE عمود است. یعنی، ABCE مربع است و، ضمناً، اندازهٔ ضلع آن، برابراست با ۱. چون $AB\|EC$ و AB عمود برصفحهٔ AHE است، بنابراین، مثلث‌های ABH و ECH قائم‌الزاویه‌اند. درآن‌ها: $|AB|=|EC|$ و $|AH|=|EH|$، درنتیجه: $|BH|=|CH|$.

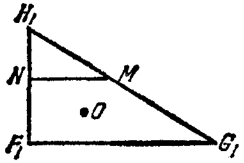
فرض کنیم، کره‌ای به‌شعاع r وبه‌مرکز نقطه‌ای مثل O، درداخل هرم

باشد. ABCEH واقع از نقطهٔ O، صفحهٔ π را عمود با یال AE رسم می کنیم (شکل ۳۴) روشن می کنیم که ازتقاطع هرم ABCEH باصفحهٔ π، کدام چند ضلعی به‌دست می‌آید! وسط پاره خط AE را F می گیریم. چون خط راست AB برصفحهٔ AHE عمود است، بنابراین صفحه‌های AHE وABCE برهم عمودند. قبلادیدیم که مثلث AHE متساوی‌الساقین است، بنابراین HF ارتفاع مثلثAHEاست. ازعمود بودن دوخط راست HF و AE بریکدیگر، نتیجه می‌شود که HF برصفحهٔ ABCE عمود است، یعنیFتصویرنقطهٔ H برصفحهٔ ABCEاست. و این، به معنای آن است که تصویر تمامی نقطه‌های وجه‌های جانبی هرم ABCEH برصفحهٔ قاعده، متعلق به‌چهارضلعی ABCE است. عمودبرصفحهٔ ABCE که ازنقطهٔ O عبورمی کند، یکی ازوجه‌های جانبی را قطع‌می کند (O درداخل هرم ABCEH قراردارد). چون این نقطهٔ برخورد ونقطهٔ O، دارای یك تصویر برصفحهٔ قاعده هستند، بنابراین، O_1 تصویرO برصفحهٔ قاعده، متعلق به‌مربع ABCE است. خط‌راست AEهم برصفحهٔ π عمود بود، بنابراین صفحهٔπبرصفحهٔ ABCE عمود می‌شود وچونOO_1برصفحهٔ ABCE عمود است، پس‌تمامی خط راست OO_1 برصفحهٔ π ولقع‌می‌شود. به‌این ترتیب، صفحهٔ π باصفحهٔ قاعدهٔهرم، درخط راستی مشترك‌اند که‌از O_1 می گذرد. علاوه بر آن، این خط راست باید بر یال AE عمود باشد (زیرا یال AE برصفحهٔ π عمود است). محل برخوردآن‌را بایال‌های AEوBC، به‌ترتیب، F_1 و G_1 می‌نامیم. فرض‌کنیم، G وسط پاره‌خط BC باشد. مثلث BHC متساوی‌الساقین است، یعنی $BC \perp HG$. چون $AB \| BC$، پس $AE \perp HG$. قبلا ثابت‌کردیم $AE \perp HF$؛ ازآن‌جانتیجه می‌شودکه‌صفحهٔ HFG برخط راست AE عموداست و ، بنابراین، صفحه‌های HFG و π موازی‌اند. ازاین‌جا معلوم می‌شودکه محل برخورد صفحهٔ π با صفحه‌های BHC و AHE، به‌ترتیب، باخط‌های راست HG و HF موازی‌اند. اگر محل برخورد صفحهٔ π را بایال جانبی هرم،که متعلق به وجه‌های BHC و AHE هستند، M و N بنامیم، آن‌وقت، مقطع هرم‌با صفحهٔ π، چهارضلعی



شکل ۳۴

F_1G_1MN می‌شود (شکل‌های ۳۴ و ۳۵). ضمناً $|F_1G_1| = 1$، $N_1\widehat{F_1}G_1 = H\widehat{F}G$ (یعنی برابر $\frac{\pi}{2}$) و $M\widehat{G_1}F_1 = H\widehat{G}F$. به خصوص یاد‌آوری می‌کنیم که، اگر نقطهٔ O برصفحهٔ HFG واقع باشد، نقطه‌های M و N بریکدیگرمنطبق می‌شوند. پاره‌خط‌های F_1N و G_1M را امتدادمی‌دهیم تا در نقطهٔ H_1 یکدیگر را قطع کنند (شکل ۳۵). در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $H_1F_1G_1$ و HFG داریم : $|F_1G_1| = |FG|$ و $M\widehat{G_1}F_1 = H\widehat{G}F$. بنابراین :



شکل ۳۵

$$|H_1F_1| = |HF| = |EF|\, tg\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

$$|H_1G_1| = \sqrt{|H_1F_1|^2 + |F_1G_1|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

صفحهٔ π، کره‌را دردایره‌ای به‌شعاع r قطع می‌کند و، این دایره،در مثلث $H_1F_1G_1$ قرار دارد. اگـر فاصله‌های نقطـهٔ O را تا خط‌های راست F_1G_1، F_1H_1 و H_1G_1، به‌ترتیب، h_1، h_2 و h_3 بگیریم، $r \leqslant h_i$ $(i = 1،2،3)$ خواهد بود ودرنتیجه

$$S_{F_1H_1G_1} = S_{OF_1G_1} + S_{OF_1H_1} + S_{OH_1G_1} =$$
$$= \frac{1}{2}h_1|F_1G_1| + \frac{1}{2}h_2|F_1H_1| + \frac{1}{2}h_3|H_1G_1| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(|F_1G_1| + |F_1H_1| + |H_1G_1|)\cdot r = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot r$$

ولـی $S_{F_1H_1G_1} = \frac{1}{2}|F_1G_1|\cdot|F_1H_1| = 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. بنابراین

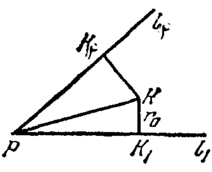
$$\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot r \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad r \leqslant \frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

اکنون ثابت می‌کنیم که کرهٔ به‌شعاع $r = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ رامی‌توان درهرم ABCEH جا داد. K را مرکزدایرهٔ محاطی مثلث HGF و r_0 را شعـاع

این دایره می‌گیریم. دراین صورت، مثل قبل، داریم:

$$\frac{۱}{۴}=S_{FHG}=\frac{۱}{۲}r_0\ (|FG|+|FH|+|HG|)=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۴}r_0$$

یعنی $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}=r_0$. تحقیق‌می کنیم که کرهٔ به‌مر کز K وشعاع $r_0=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$، درهرم ABCEH جا می گیرد برای‌این منظور، کافی‌است ثابت کنیم که‌فاصلهٔ نقطهٔ K تا وجه‌های هرم، کمتر از r_0 نیست. چون‌صفحهٔ HEK برصفحه‌های ABCE، BHC وAEH عموداست. بنابراین، فاصلهٔ‌نقطهٔ K تا این‌صفحه‌ها، به‌ترتیب، برابراست بافاصلهٔ‌نقطهٔ K تاخط‌های‌راست FG، HG وHF، یعنی r_0.
از نقطهٔ K، صفحه‌ای‌عمود بریال AB می گذرانیم. این‌صفحه، صفحه‌های ABCE و ABH را درخط‌های راست l_1 و l_2 قطع‌می کند. زاویهٔ‌بین‌این‌دوخط‌راست، برابراست‌بازاویهٔ HAE (صفحهٔ AHE هم‌بریال AB عموداست) وبنابراین: $(l_1\ ،\ l_2)=\frac{\pi}{۴}$. اگر K_1 وK_2 را تصویرهای نقطهٔ K بر l_1 وl_2 بگیریم (شکل ۳۶)، داریم: $|KK_1|=r_0=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$، و $|KK_2|$ همان فاصلهٔ نقطهٔ K از صفحهٔ ABH می‌شود. P را، نقطهٔ برخورد خط‌های راست l_1 و l_2 می گیریم روشن است که



شکل ۳۶

$$tg\widehat{KPK_1}=\frac{|KK_1|}{|PK_1|}=$$

$$=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}:\ \frac{۱}{۲}=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

سپس، ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ KPK_1 و KPK_2 به‌دست می‌آید:

$$\frac{|KK_2|}{sin\widehat{KPK_2}}=|PK|=\frac{|KK_1|}{sin\widehat{KPK_1}}$$

یا

$$\frac{|KK_2|}{|KK_1|}=\frac{sin\widehat{KPK_2}}{sin\widehat{KPK_1}}=\frac{sin\,(\frac{\pi}{۴}-\widehat{KPK_1})}{sin\widehat{KPK_1}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\widehat{KPK_1}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\widehat{KPK_1}}{\sin\widehat{KPK_1}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{tg\widehat{KPK_1}}-\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{4}>1$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ K تا صفحهٔ HEC، از $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ بزرگتر است.

بنابراین، کرهٔ به شعاع $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ درهرجا می‌گیرد.

پاسخ: $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

۶. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول این معادله، شامل نقطه‌هایی است که در شرط $\cos 2x\neq 0$ یا $x\neq(2m+1)\frac{\pi}{4}$ $(m\in Z)$ صدق کنند. در این حوزه $1+tg^2 2x=\sec^2 2x$. ضمناً تابع $y=1+tg^2 2x$، هرگز برابر صفر نمی‌شود؛ بنابراین، این معادله، در حوزهٔ تعریف خود، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است :

$$\sin\frac{21}{4}x\cos\frac{7}{4}x+\sin\frac{5}{4}x\cos\frac{x}{4}=\sin\frac{x}{4}\cos\frac{5}{4}x-\sin\frac{7}{4}x\cos\frac{21}{4}x$$

ویا، با جابه‌جائی جمله‌ها واستفاده ازدستورهای مربوط به‌سینوس مجموع و سینوس تفاضل دوکمان، خواهیم داشت:

$$\sin 7x=\sin(-x) \qquad (3)$$

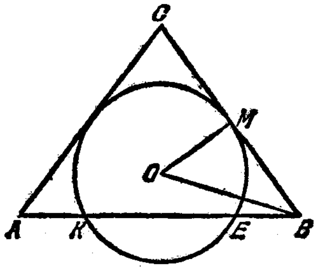
که بااستفاده ازدستورمربوط به‌برابری دوسینوس، به‌این‌جواب‌ها‌می‌رسیم:

$$x=\frac{n\pi}{4}\,,\ x=\frac{K\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\ (n,k\in Z)$$

ازاین جواب‌ها، بایدآن‌هایی‌راانتخاب کنیم که درحوزهٔ تعریف‌معادلهٔ اصلی باشند، یعنی در شرط $x\neq\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(m\in Z)$ صدق‌کنند.رشتهٔ‌جواب اول ، یعنی‌$x=\frac{n\pi}{4}$، تنها به‌ازای مقدارهای‌زوج n، درحوزهٔ تعریف‌معادله

قراردارند ($n=۲l$)، یعنی $x=\frac{ln}{۲}$ ($l\in Z$). ولی، همهٔ رشته جواب‌های دوم، درحوزهٔ تعریف معادله قراردارند.

پاسخ: $x=\frac{۱}{۲}l\pi$ و $x=\frac{۱}{۳}k\pi+\frac{\pi}{۶}$ (l، $k\in Z$).



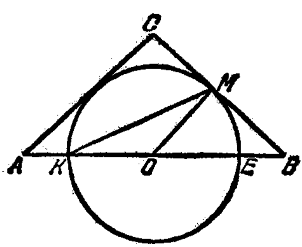
شکل ۳۷

۷. مرکز دایره را O می‌نامیم. در این صورت، شعاع OM بر ضلع BC عمود خواهد بود. از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMB (شکل ۳۷) به‌دست می‌آید:

$$tg\widehat{OBM}=\frac{OM}{MB}=\frac{۱}{\frac{۱۵}{۸}}=\frac{۸}{۱۵}$$

ازاین‌جا، نتیجه می‌شود: $tg\widehat{OBM}=tg\widehat{ABM}$. چون نقطه‌های O و A در یك طرف ضلع BC قراردارند، ازبرابری اخیرنتیجه می‌شود: $\widehat{OBM}=\widehat{ABM}$. یعنی‌نقطهٔ O روی‌پاره‌خط AB قراردارد. وضع درست دایره، نسبت به‌مثلث، درشکل ۳۸ نشان داده شده است: داریم:

$$S_{KMB}=S_{OMB}+S_{KMO}$$



شکل ۳۸

وچون $OM\perp MB$، بنابراین

$$S_{OMB}=\frac{۱}{۲}OM\cdot MB=$$

$$=\frac{۱}{۲}\times۱\times\frac{۱۵}{۸}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

در مثلث KMO، ضلع‌های OK و OM، برابرند باشعاع دایره، یعنی ۱، درنتیجه

$$S_{KMO}\frac{۱}{۲}OK\cdot OM\cdot sin\widehat{KOM}=\frac{۱}{۲}sin\widehat{KOM}$$

روشن است که

$$\sin \widehat{KOM} = \sin \widehat{BOM} = \cos \widehat{OBM} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + tg^۲ \widehat{OBM}}} =$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۱ + \frac{۶۴}{۲۲۵}}} = \frac{۱۵}{۱۷}$$

در رابطهٔ $\cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱ + tg^۲ a}} =$، علامت جلو رادیکال را به‌این‌دلیل‌مثبت گرفتیم که‌مقدار زاویهٔ OBM، که‌برابر است‌با $\operatorname{arc}tg\frac{۸}{۱۵}$، درفاصلهٔ بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ قراردارد. به این ترتیب:

$$S_{KMO} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۵}{۱۷} = \frac{۱۵}{۳۴} \quad , \quad S_{KMB} = \frac{۱۵}{۳۴} + \frac{۱۵}{۱۶} = \frac{۳۷۵}{۲۷۲}$$

پاسخ. $S_{KMB} = \frac{۳۷۵}{۲۷۲}$

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x = -۲$ ، $x = ۱$ ، $x \geqslant ۳$؛ ۲. $n\pi + \frac{\pi}{۱۲}$ $(n \in Z)$؛
۳. $y = ۲x + ۱$؛ ۴. $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۴ , ۲۲ , ۷۷\}$؛ ۵. $\frac{\sqrt{۲} - ۱}{۲}$؛ ۶. $x = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۱۲}$، $x = \frac{n\pi}{۳}$، $n \neq ۳(۲m + ۱)$ $(k , n , m \in Z)$؛
۷: $\frac{۳}{۱۳}$.

گروه سوم. ۱. $-۲ \leqslant x \leqslant -۱$ ، $x \geqslant ۳$؛ ۲. $(۴n + ۲)\pi$ $(n \in Z)$؛
۳. $y = -x + ۱۵$؛ ۴. $A = \{۱۵ , ۳۰ , ۳۹ , ۶۵ , ۷۸ , ۱۳۰ , ۱۹۵ , ۳۹۰\}$؛ ۵. $۲ - \sqrt{۲}$؛ ۶. $x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲}$، $x = (۳n + ۱)\frac{۲\pi}{۳}$ ، $x = (۳m + ۲)\frac{۲\pi}{۳}$ $(k , n , m \in Z)$؛ ۷. ۲۱۰.

گروه چهارم. ۱. $x = -۲$ ، $۱ \leqslant x \leqslant ۳$؛ ۲. $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ $(k \in Z)$؛ ۳.

۴. $y=x-\frac{1}{4}$؛ $A=\{6,15,30,33,66,110,165,330\}$؛

۵. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ؛ ۶. $x=\frac{1}{4}m\pi+\frac{\pi}{8}$ ، $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(m,k\in Z)$؛ ۷. $\frac{28}{53}$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. چون تابع $f(x)$ ، درتمامی بازهٔ $(-5,\frac{1}{5})$ مشتق‌پذیر است، نقطه‌های اکسترمم تابع، دربین ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ ـ واقع دراین بازه ـ هستند. داریم:

$$f'(x)=3x^2+12x-3$$

ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ را محاسبه می کنیم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=-2-\sqrt{5}\ ,\ x_2=-2+\sqrt{5}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $x_2>\frac{1}{5}$؛ ولی x_1 دربازهٔ $(-5\text{ و }\frac{1}{5})$ واقع است. بنابراین تنها نقطه‌ای که ممکن است اکسترمم تابع باشد، عبارت است از $x_1=-2-\sqrt{5}$. چون در بازهٔ $(-5,x_1)$ داریم: $f'(x)>0$ و در بازهٔ $(x_1\ ,\ \frac{1}{5})$ داریم: $f'(x)<0$ و، ضمناً درنقطهٔ x_1 پیوسته‌است، بنابراین در واقع هم، نقطهٔ $x_1=-2-\sqrt{5}$ نقطهٔ اکسترمم است (نقطهٔ ماکزیمم).

پاسخ: $-2-\sqrt{5}$.

۲. به سادگی دیده می‌شود که معادلهٔ مفروض، بامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$|4x-6|=6x-8 \qquad (1)$$

برای حل این معادلهٔ (۱)، محورعددی را به دومجموعه تقسیم می‌کنیم: $x\geqslant\frac{3}{2}$ و $x<\frac{3}{2}$. درمجموعهٔ $x<\frac{3}{2}$ داریم: $|4x-6|=6-4x$ و معادلهٔ (۱) به این صورت درمی آید:

$$6-4x=6x-8 \Rightarrow x_1=\frac{7}{5}$$

که با شراط $x<\frac{3}{2}$ هم سازگاراست. یعنی معادلهٔ(۱)، درمجموعهٔ $x<\frac{3}{2}$ ،

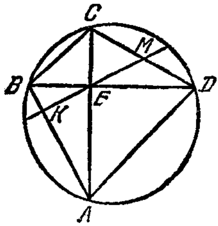
دارای جواب منحصر $x_1=\frac{7}{5}$ است. درمجموعهٔ $x\geqslant\frac{3}{2}$، معادلهٔ (۱) به‌این صورت درمی‌آید:

$$4x-6=6x-8$$

این معادله، منجربه جواب $x_2=1$ می‌شود که به مجموعهٔ $x\geqslant\frac{3}{2}$ تعلق ندارد.

یعنی، معادلهٔ (۱) درمجموعهٔ $x\geqslant\frac{3}{2}$، بی‌جواب است.

پاسخ: $x=\frac{7}{5}$.



شکل ۳۹

۳. محل برخورد خط‌های راست AB و EM را K می‌گیریم (شکل ۳۹). چون CDB و CAB، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یك کمان‌اند، پس

$$\widehat{CAB}=\widehat{CDB}=\alpha$$

از برابری‌های

$$\widehat{DCE}+\widehat{CDB}=\frac{\pi}{2} \text{ و } \widehat{KEA}+\widehat{CAB}=\frac{\pi}{2}$$

نتیجه می‌شود:

$$\widehat{DCE}=\widehat{KEA}=\widehat{CEM}$$

و این، به معنای آن است که مثلث CEM متساوی‌الساقین است، یعنی $|CM|=|EM|$، سپس

$$\widehat{MED}=\frac{\pi}{2}-\widehat{CEM}=\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\alpha=\widehat{CDB}$$

به‌این ترتیب، مثلث MED متساوی‌الساقین‌است وداریم: $|DM|=|EM|$.
واین، ثابت می‌کندکه $|CM|=|DM|$، یا EM میانهٔ‌مثلث CED است.
از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE داریم:

$$|AE|=|AB|\cdot\cos\widehat{CAB}=4\cos\alpha$$

و بعد، از مثلث قائم‌الزاویهٔ AED:

$$|ED| = \sqrt{|AD|^۲ + |AE|^۲} = \sqrt{۶۴ - ۱۶\cos^۲\alpha} = ۴\sqrt{۴ - \cos^۲\alpha}$$

وبالاخره

$$|EM| = \frac{۱}{۲}|CD| = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{|ED|}{\cos\alpha} = ۲\sqrt{\frac{۴}{\cos^۲\alpha} - ۱} = ۲\sqrt{۴tg^۲\alpha + ۳}$$

پاسخ: $|EM| = ۲\sqrt{۴tg^۲\alpha+۳}\,\text{cm}$.

۴. x را ریشهٔ صحیح معادلهٔ مفروض می‌گیریم. دراین صورت، عدددرستی‌مثل n وجود دارد، به نحوی‌که برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{\pi}{۸}\left(۳x - \sqrt{۹x^۲ + ۱۶۰x + ۸۰۰}\right) = ۲n\pi$$

ویا

$$\sqrt{۹x^۲ + ۱۶۰x + ۸۰۰} = ۳x - ۱۶n$$

که اگر دوطرف برابری را مجذور کنیم، به این برابری می‌رسیم:

$$x(۳n+۵) = ۸n^۲ - ۲۵ \qquad (۲)$$

سمت راست این برابری را ، این‌طور تبدیل می‌کنیم:

$$۸n^۲ - ۲۵ = ۸\left(n^۲ - \frac{۲۵}{۹}\right) - \frac{۲۵}{۹} = \frac{۸}{۹}(۳n+۵)\,(۳n-۵) - \frac{۲۵}{۹}$$

چون x و n ، عددهای درستی هستند، از برابری اخیر روشن می‌شود که $(۳n+۵)$، مقسوم علیهی از عدد ۲۵ می‌باشد، یعنی $۳n+۵$ برابر است با یکی از عددهای ± ۱ ، ± ۵ ، ± ۲۵ . با آزمایش مستقیم، معلو می‌شود که تنها وقتی که $۳n+۵$ برابر -۱ ، $+۵$ و -۲۵ باشد، برای n عددهای درستی پیدامی‌شود، که به‌ترتیب، برابرند با $n = -۲$ ، $n = ۰$ و $n = -۱۰$.
مقدارهای متناظر x را از برابری (۲) پیدا می‌کنیم، به دست می‌آید: $x = -۷$ ، $x = -۵$ و $x = -۳۱$ ، همه ریشه‌های صحیح معادلهٔ اصلی، بین عددهای $x_۱ = -۳۱$ ، $x_۲ = -۷$ و $x_۳ = -۵$ قراردارند. اگر این عددها رادرمعادلهٔ اصلی آزمایش کنیم، قانع می‌شویم که‌تنها عددهای $x_۱$و$x_۲$ درآن صدق می‌کنند.

پاسخ: $x_۱ = -۳۱$ و $x_۲ = -۷$.

۵. نقطهٔ $x = ۰$ ، در راه حلی که ارائه می‌دهیم، نقش خاصی دارد. بنابراین، قبل از همه و به طور جدگانه، مقدارهایی از پارامتر a را در نظر می‌گیریم که، به ازای هر کدام ار آن‌ها، معادلهٔ مفروض، دارای ریشهٔ $x = ۰$ باشد. با قراردادن $x = ۰$ درمعادله، می‌بینیم که تنها یك مقدار برای پارامتر a به دست می‌آید: $a = ۱$. معادلهٔ مفروض، به ازای $a = ۱$ به این صورت

در می‌آید:

$$\left(1-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8-x}=0 \qquad (3)$$

چون عامل $\sqrt{8-x^2}$، در بازهٔ $[-2, 3]$، برابر صفر نمی‌شود، بنابراین معادلهٔ (۳)، در این بازه، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}=1 \qquad (4)$$

تابعی که درسمت چپ این معادله قرادارد، تابعی است زوج. بنابراین، تعداد ریشه‌های معادلهٔ (۴)، در بازهٔ $[-2, 2]$، عددی فرد است (اگر $x_0\neq 0$ ریشه‌ای از معادلهٔ (۴) باشد، قرینهٔ آن $-x_0$ هم ریشهٔ همان معادله است؛ علاوه بر آن، ریشهٔ $x=0$ را هم دارد). معادلهٔ (۴)، در مجموعهٔ $[2, 3]$، ریشه‌ای ندارد، زیرا در این مجموعهٔ داریم:

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant 4-1=3$$

به این‌ترتیب، تعداد ریشه‌های معادلهٔ اصلی‌ما، در بازهٔ $[-2, 3]$، در حالت $a=1$، عددی فرد است. یعنی $a=1$ با شرطهای مساله، سازگار است.

دوباره یادآوری می‌کنیم که، به ازای $a\neq 1$، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ اصلی، مخالف صفرند.

اکنون به حالت $a=0$ از پارامتر می‌پردازیم. در این حالت، معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}=0 \qquad (5)$$

معادلهٔ (۵)، در بازهٔ $[-2, 2]$، به تعداد زوج، ریشه دارد. ایــن مطلب، ناشی اززوج بودن‌تابع سمت چپ برابری است (اگر x_0 ریشهٔ معادله باشد، $-x_0$ هم ریشهٔ آن است). معادلهٔ (۵)، دربازهٔ $[2, 3]$ ریشه‌ای‌ندارد، زیرادر این بازه داریم:

$$x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant 4-1=3>0$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض ما، به ازای $a=0$ و دربازهٔ $[-2, 3]$، به‌تعداد زوج ریشه دارد. یعنی، $a=0$ باشرطهای مساله، سازگار نیست.

حالا به مقدارهایی از پارمتر a می‌پردازیم که، برای آن‌ها، $a\neq 0$ و

$a \neq 1$ باشد. برای هریك ازاین مقدارهای a ، معادلهٔ اصلی، ریشهٔ $a_1 = \frac{8}{a}$ را دارد. ببینیم، به‌ازای چه مقدارهایی ازa، این ریشه در بازهٔ $[-2 , 3]$ واقع است. باید داشته باشیم:

$$-2 \leqslant \frac{8}{a} \leqslant 3 \Rightarrow a \geqslant \frac{8}{3} \text{ و } a \leqslant -4$$

اکنون، روشن است که باید سه حوزهٔ تغییر پارامتر را درنظر بگیریم:

$$1)\ a \leqslant -4 ;\quad 2)\ -4 < a < \frac{8}{3}\ (a \neq 1 , 0) ;\quad 3)\ a \geqslant \frac{8}{3}$$

۱) $a \leqslant -4$. دراین حالت معادلـهٔ مفروض، در بـازهٔ $[-2 , 3]$ دارای ریشهٔ $x_1 = \frac{8}{a}$ است. به بررسی این معادله می‌پردازیم:

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = a \qquad (6)$$

معادلهٔ (۶)، به ازای $a \leqslant -4$ ، ریشه‌ای ندارد، زیرا داریم:

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant \cos\frac{11\pi x}{4} \geqslant -1$$

به ایـن ترتیب، معادلهٔ اصلی، بـه ازای $a \leqslant -4$ ، تنها یك ریشه دارد: $x_1 = \frac{8}{a}$. یعنی، همهٔ مقدارهـای پارامتر $a \leqslant -4$ ، با شرطهـای مساله سازگارند.

۲) $-4 < a < \frac{8}{3}$ ، $a \neq 1$ ، $a \neq 0$. دراین حالت، عامل $\sqrt{8 - ax}$ دربازهٔ $[-2 , 3]$ ، برابر صفرنمی‌شود، یعنی دراین حالت، معادلهٔ اصلی، دربازهٔ $[-2 , 3]$ ، هم‌ارز معادلهٔ (۶) است.

معادلهٔ (۶)، دربازهٔ $[-2 , 2]$ ، یا به تعداد زوج جواب دارد و یا اصلاً جوابی‌ندارد (سمت جپ برابری (۶)، تابعی زوج است و، بنابراین، اگرx_0 ریشهٔ معادلهٔ (۶) باشد، $-x_0$ هم درآن صدق می‌کند). معادلهٔ (۶)، دربازهٔ $[2 , 3]$ ، ریشه ندارد، زیرا دراین بازه داریم:

$$x^2 + \cos\frac{11x\pi}{4} \geqslant x^2 - 1 \geqslant 4 - 1 = 3 > \frac{8}{3}$$

به این ترتیب، معادلهٔ اصلی، به ازای مقدارهای مذکور پارامتر a ، در بازهٔ $[-2, 3]$ ، یا جواب ندارد ویا تعداد جواب‌های آن زوج است. به این ترتیب، این مقدارهای پارامتر a ، در شرط‌های مساله، صدق نمی‌کنند.

۳) $a \geqslant \frac{8}{3}$. دراین حالت، $x_1 = \frac{8}{a}$ ، ریشه‌ای از معادلـه، دربـازهٔ $[-2, 3]$ است. یادآوری می‌کنیم که، از ریشه‌های معادلهٔ (۶)، آن‌هایی قابل قبول‌اند که درشرط $8 - ax \geqslant 0$ یا $x \leqslant \frac{8}{a}$ صدق کنند. اکنون، مساله را به‌این صورت تنظیم می‌کنیم: درحوزهٔ $a \geqslant \frac{8}{3}$ همهٔمقدارهای a ، را پیدا کنید که، به‌ازای‌هر کدام ازآن‌ها، تعداد ریشه‌های‌مختلف معادلهٔ(۶)، دربازهٔ $[-2, \frac{8}{a}]$ ، زوج باشد.

چند حالت در نظر می‌گیریم.

a) $a = 4$ فرض می‌کنیم، دراین صورت، معادلهٔ (۶)، چنین‌می‌شود:

$$x^2 + \cos\frac{11\pi x}{4} = 4 \qquad (7)$$

دراین‌حالت، حوزهٔ‌تعریف معادلهٔ (۷) $[-2 , 2]$ می‌شود. معادلهٔ (۷)، در مجموعهٔ $(-2 , 2)$،به‌تعدادزوج ریشه‌دارد. ولی‌نقطهٔ $x = -2$ هم‌درمعادلهٔ (۷) صدق می‌کند. بنابراین به ازای $a = 4$ ، تعداد ریشه‌هـای معادلهٔ (۶)، دربازهٔ $[-2 , \frac{8}{a}]$، فرداست.یعنی $a = 4$ با شرط‌های مساله سازگارنیست.

b) $a > 4$ می‌گیریم. دراین حالت $\frac{8}{a} < 2$ و چون تعداد ریشه‌های معادلهٔ(۶)، دربازهٔ $[-2 , 2]$، زوج‌است، شرط مساله‌برای مقدارهایی از a صادق است‌که، به ازای هر کدام از آن‌ها، تعداد ریشه‌های معادلهٔ (۶)، در بازهٔ $[\frac{8}{a} , 2]$ ، زوج باشد (یا دراین بازهٔ، ریشه‌ای نداشته باشد)، ثابت می‌کنیم که (۶) دربازهٔ $[\frac{8}{a} , 2]$ دارای ریشه نیست. آن وقت، می‌توان‌نتیجه گرفت که‌همهٔ‌مقدارهای $a > 4$ با شرط‌های مساله سازگاراست. چون $x = 2$ ریشهٔ معادلهٔ (۶) نیست $(a \neq 4)$ و داریم:

$$a-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم که، درمجموعهٔ $(0 , 2)$، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}>0$$

اگر داشته باشیم: $\frac{18}{11}<x<2$، آن وقت داریم:

$$\frac{9\pi}{2}<\frac{11\pi x}{4}<\frac{11\pi}{4} , \cos\frac{11\pi x}{4}<0$$

یعنی، دراین مجموعه،

$$\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}>\frac{8}{x}-x^2>0$$

(نابرابری آخر، به دلیل $x<2$ ، برقرار است). اگر داشته باشیم: $0<x<\frac{18}{11}$، با توجه به اینکه تابع $y=\frac{8}{x}-x^2$ نزولی یکنوا است (درمجموعهٔ $x>0$)، به دست می‌آید:

$$\frac{8}{x}-x^2\geqslant\frac{8\times 11}{18}-\left(\frac{18}{11}\right)^2>\frac{44}{9}-3>1$$

یعنی
$$\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}>1-\cos\frac{11\pi x}{4}\geqslant 0$$

به این ترتیب، همهٔ مقدارهای $a>4$ ، با شرط‌های مساله سازگار است.

c) فرض می‌کنیم: $\frac{8}{3}\leqslant a<4$. در این‌حالت $\frac{8}{a}>2$ و، شبیه حالت b)،کافی است همهٔ مقدارهای a را پیداکنیم که، به ازای هرکدام از آن‌ها، تعداد ریشه‌های متمایزمعادلهٔ (۶)، درمجموعهٔ $(2 , \frac{8}{a})$، زوج باشد (ویااصلا* ریشه‌ای‌نداشته باشد). شبیه حالت b)، ثابت می‌کنیم که برای هرمقدار a که در نابرابری $\frac{8}{3}\leqslant a<4$ صدق کند، معادلهٔ (۶) درمجموعهٔ $(2 , \frac{8}{a})$ دارای

جواب نیست. درمجموعهٔ $(2 , \frac{8}{a})$، نابرابری $a<\frac{8}{x}$ برقرار است و، بنابراین،

$$a-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}<\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم که، در مجموعهٔ $(2 , 3)$، داریم:

$$\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}<0$$

باشرط $2<x<\frac{26}{11}$ داریم:

$$\frac{11\pi}{2}<\frac{11\pi x}{4}<\frac{13\pi}{2} ,\ \cos\frac{11\pi x}{4}>0$$

یعنی، دراین مجموعه: $\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}<\frac{8}{x}-x^2<0$

(نابرابری آخر، به‌علت $2<x$، برقرار است). درحالتی که $\frac{26}{11}\leqslant x<3$ باشد، با استفاده از نزولی ویکنوا بودن تابع $y=\frac{8}{x}-x^2$، در مجموعهٔ $x>0$ ، به دست می‌آید:

$$\frac{8}{x}-x^2\leqslant\frac{8\times 11}{26}-\left(\frac{26}{11}\right)^2<\frac{44}{13}-5<-1$$

یعنی $\frac{8}{x}-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}<-1-\cos\frac{11\pi x}{4}\leqslant 0$

بنابراین، همهٔ مقدارهای a، ازحوزهٔ $\frac{8}{3}\leqslant a<4$، درشرط مسألهٔ صدق می‌کنند.

با جمع‌بندی تمامی این بحث، جواب مساله مشخص می‌شود.

پاسخ : $a\leqslant -4$ ، $a=1$ ، $\frac{8}{3}\leqslant a<4$ ، $a>4$.

۶. جملهٔ عمومی a_n ازتصاعد حسابی، به‌صورت $a_n=3+6(n-1)$ درمی‌آید. بنابراین $a_6=33$ ؛ ومجموع شش جملهٔ اول تصاعدحسابی، برابراست با

$$\frac{a_1+a_6}{2}\times 6=\frac{3+33}{2}\times 6=108$$

مجموع هشت جملهٔ اول تصاعد هندسی، بنا بر رابطهٔ مشهور، چنین می‌شود:

$$\frac{[3-3(\sqrt{2})^8-1]}{1-\sqrt{2}}=45(\sqrt{2}+1)$$

عددهای ۱۰۸ و $45(\sqrt{2}+1)$ را مقایسه می کنیم: چون $\sqrt{2}>\frac{7}{5}$، داریم

$$45(\sqrt{2}+1)>45\left(\frac{7}{5}+1\right)=108$$

پاسخ: مجموع هشت جملهٔ اول تصاعد هندسی، بزرگتر است ازمجموع شش جملهٔ اول تصاعد حسابی.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $-1-\sqrt{7}$ ؛ ۲. $\frac{8}{7}$ ؛

۳. $\sqrt{61\sin^2\alpha-25}$ سانتیمتر؛ ۴. -13 ، -59 ؛

۵. $a\leqslant-3$ ، $a=-1$ ، $\frac{3}{5}\leqslant a<3$ ، $a>3$ ؛

۶. مجموع هشت جملهٔ اول تصاعد حسابی ، از مجموع شش جملهٔ اول تصاعد هندسی کوچکتر است.

گروه سوم. ۱. $1+\sqrt{5}$ ؛ ۲. $\frac{3}{5}$ ؛

۳. $\frac{\sqrt{49-9\,tg^2\alpha}}{2\sin\alpha}$ سانتیمتر ؛ ۴. -7 ، -13 ؛

۵. $a\leqslant-4$ ، $a=-1$ ، $\frac{8}{5}\leqslant a<4$ ، $a>4$ ؛

۶. مجموع هفت جملهٔ اول تصاعد حسابی، کوچکتر است از مجموع شش جملهٔ اول تصاعد هندسی.

گروه چهارم. ۱. $2+\sqrt{7}$ ؛ ۲. $\frac{2}{7}$ ؛

۳. $\sqrt{49-16\sin^2\alpha}.\cos\alpha$ سانتیمتر ؛ ۴. -3 ، -21 ؛

۵. $a \leqslant -۵$ ، $a = ۱$ ، $\frac{۵}{۱۳} \leqslant a < ۵$ ، $a > ۵$ ؛

۶. مجموع پنج جملهٔ اول تصاعدحسابی، بیشتر ازمجموع هشت جملهٔاول تصاعد هندسی است.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. داریم :

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۷}{۹}$$

۲. بااستفاده از رابطهٔ سینوس کمان دو برابر، معادلهٔ مفروض را می‌توان به این صورت نوشت:

$$۲\cos x \cdot \left(\sin x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۰$$

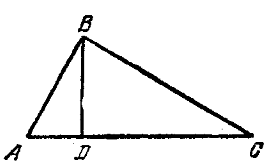
بنابراین، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با مجموعهٔ دو معادلهٔ

$$\cos x = ۰ \quad و \quad \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پاسخ : $n\pi + \frac{\pi}{۲}$ ، $k\pi + (-۱)^k \cdot \frac{\pi}{۳}$ $(n ، k \in Z)$.

۳. ABC را، مثلث مفروض مساله می گیریم (شکل ۴۰). از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، بنابرقضیهٔ فیثاغورث، داریم:

$$|AD| = \sqrt{|AB|^۲ - |BD|^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} = ۵$$



شکل ۴۰

مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABD و ABC، درزاویهٔ حادهٔ A مشترکند و، بنابراین، باهم متشابه می‌شوند، بنابراین :

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AB|} \Longrightarrow |BC| = \frac{|BD| \cdot |AB|}{|AD|} = \frac{۱۲ \times ۱۳}{۵} = \frac{۱۵۶}{۵}$$

اکنون S یعنی مساحت مثلث ABC را پیدا می کنیم:

$$S = \frac{۱}{۲}|AB| \cdot |BC| = \frac{۱}{۲} \times ۱۳ \times \frac{۱۵۶}{۵} = ۲۰۲/۸$$

۴. معادله، به‌ازای $a=\frac{1}{3}$ ، یك ریشهٔ منحصر دارد: $x=\frac{3}{2}$. در حالت $a\neq\frac{1}{3}$ ، معادلهٔ مفروض ، یك معادلهٔ درجه دوم است. معادلهٔ درجه دوم ، وقتی و تنها وقتی، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است که مبیّن آن، مقداری مثبت باشد. مبیّن این معادله، چنین است:

$$(2a)^2-4(3a-1)(3a-2)=-4(8a^2-9a+2)$$

بنابرایـــن، مقدارهای مطلوب پارامتر a ، عبارتند از جواب‌هـــای دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} a\neq\frac{1}{3} \\ 8a^2-9a+2<0 \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم این دستگاه، چنین است:

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16}<a<\frac{9+\sqrt{17}}{16}$$

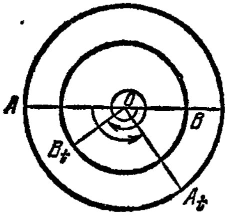
به ترتیب، مجموعهٔ مقدارهای پارامتر a ، که با شرط مساله سازگار باشند، از دو فاصله تشکیل شده است:

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16}<a<\frac{1}{3} \quad و \quad \frac{1}{3}<a<\frac{9+\sqrt{17}}{16}$$

۵. شعاع‌های دایره‌ها را r_1 و r_2 می‌نامیم و، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم: $r_2>r_1$. نقطه‌ای راکه روی دایرهٔ بزرگتر حرکت می‌کند، با A ونقطه‌ای‌راکه روی دایرهٔ کوچکتر حرکت می‌کند، با B نشان می‌دهیم.چون، مرکز مشترك دایره‌ها_ نقطهٔ O _ ونقطه‌های A و B، درلحظهٔ آغاز حرکت بر یك خط راست قراردارند، بنابراین، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B، دراین لحظه، یا برابر $r-r_2$ و یا برابر r_2+r_1 است. حداقل فاصلهٔ بین نقطه‌ها، در جـــریان حرکت، از $\frac{\sqrt{158}}{7}$ سانتیمتر تجاوز نمی‌کندکه‌از $\frac{16}{7}$ سانتیمتر

کوچکتر است. بنابراین، در آغاز حرکت، نقطه‌های A و B ، نسبت به O ، دردوطرف مختلف قرارداشته‌اندو

$$r_1+r_2=\frac{16}{7} \qquad (1)$$



شکل ۴۱

فرض کنید، نقطه‌های A ، O و B در لحظهٔ آغاز حرکت، روی خط راست افقی باشند (شکل ۴۱). می‌توان در نظر گرفت‌که نقطهٔ A ، عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت ونقطهٔ B، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت می‌کنند سرعت زاویه‌ای نقطهٔ B را ω_1 وسرعت‌زاویه‌ای نقطهٔ A را ω_2 می‌گیریم. ضمناً، جهت‌مثبت‌حرکت را، عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت فرض‌می‌کنیم. بنابراین، درزمان t ، نقطهٔ A به‌اندازه $\omega_2 t$ رادیان ونقطهٔ B به‌اندازهٔ $(-\omega_1 t)$ رادیان‌می‌چرخند. موضع نقطه‌ها را، دراین لحظهٔ زمانی، به ترتیب، با A_t و B_t نشان می‌دهیم (شکل ۴۱).نیم‌خط OB_t برنیم خط OA_t قرارمی‌گیرد، به شرطی‌که ابتدا آن را به‌اندازهٔ $\omega_1 t$ رادیان برگردانیم (که در این صورت، برنیم‌خط OB قرارمی‌گیرد) سپس، به اندازهٔ π رادیان (تا برنیم‌خط OA قرار گیرد) و بالاخره، بــه اندازه $\omega_2 t$ رادیان برگردانیم. یعنی، نیم‌خط OB_t ، وقتی بر نیم خط AO_t منطبق‌می‌شود که به‌اندازهٔ $\pi+(\omega_1+\omega_2)t$ رادیان بچرخد. ضمناً، نیم‌خط می‌تواند چند دورکامل هم چرخیده باشد، یعنی

$$A_t\widehat{O}B_t=|\pi+(\omega_1+\omega_2)t-2\pi n|$$

که درآن، n عددی است درست، به نحوی که مقدار $A_t\widehat{O}B_t$ درفاصلهٔ بین $-\pi$ و $+\pi$ قرارگیرد. $R(t)$ را، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A_t و B_t می‌گیریم؛ باتوجه به رابطهٔ‌کسینوس‌ها، داریم:

$$R^2(t)=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos[\pi+(\omega_1+\omega_2)t]=$$
$$=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t]$$

درمساله گفته شده است که $R(11)=\frac{\sqrt{207}}{7}$ ، بنابراین

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos[11(\omega_1+\omega_2)]=\frac{207}{49} \qquad (2)$$

لحظه‌هایی را، که در آن‌ها، فاصلهٔ بین دو نقطه، برابر $\frac{\sqrt{158}}{7}$ شــده است ، t_1 و t_2 می‌نامیم از برابری‌های

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos[\ t_1(\omega_1+\omega_2)\ ]=\frac{158}{49}$$

$$(3)$$

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos[\ t_2(\omega_1+\omega_2)\ ]=\frac{158}{49}$$

نتیجه می‌شود:

$$\cos[t_1(\omega_1+\omega_2)]=\cos[\ t_2(\omega_1+\omega_2)\ ]$$

و یا

$$2\sin\left[\frac{t_2-t_1}{2}\ (\omega_1+\omega_2)\right]\sin\left[\frac{t_2+t_1}{2}\ (\omega_1+\omega_2)\right]=0 \quad .$$

بنا بر شرط مساله داریم: $t_2-t_1=11$. اگر داشته باشیم:

$$\sin\frac{11}{2}(\omega_1+\omega_2)=0$$

به دست می‌آید : $\cos 11(\omega_1+\omega_2)=1$ و برابری‌های (۱) و (۲) متناقض می‌شوند. یعنی $\sin\frac{11}{2}\ (\omega_1+\omega_2)\neq 0$ و

$$\sin\left[\frac{t_2+t_1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]=0$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که، برای مقدار درستی از k، داریم:

$$\frac{t_2+t_1}{2}(\omega_1+\omega_2)=k\pi$$

اگر $t_1(\omega_1+\omega_2)$ را با α نشان دهیم، باتوجه به برابری $t_2-t_1=11$، خواهیم داشت:

$$11(\omega_1+\omega_2)=(t_2+t_1)(\omega_1+\omega_2)=(t_2+t_1)(\omega_1+\omega_2)-$$
$$-2t_1(\omega_1+\omega_2)=2k\pi-2\alpha$$

با این نام‌گذاری، برابری‌های (۲) و (۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 2\alpha=\frac{257}{49} \qquad (4)$$

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\alpha=\frac{158}{49} \qquad (5)$$

اگردوطرف برابری (۱) را مجذور و، سپس، برابری (۵) را ازآن کم کنیم، به دست می‌آید:

$$2r_1r_2(1-\cos\alpha)=2 \qquad (6)$$

با همین عمل، نسبت به برابرهای (۱) و (۴)، خواهیم داشت:

$$2r_1r_2(1-\cos 2\alpha)=1 \qquad (7)$$

اکنون، ازمقایسهٔ (۶) و (۷) به دست می‌آید:

$$1-\cos\alpha=2(1-\cos 2\alpha)$$

که بعداز از تبدیل‌های ساده، به این معادله منجر می‌شود:

$$4\cos^2\alpha-\cos\alpha-3=0$$

ازآن جا $\cos\alpha=1$ یا $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. برابری $\cos\alpha=1$ با (۱) متناقض است، بنابراین $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. حالا، از (۶) به دست می‌آید: $r_1r_2=\frac{4}{7}$ وبا حل دستگاه معادله‌های

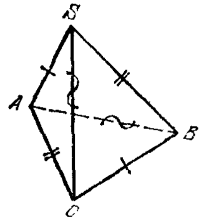
$$\begin{cases} r_1+r_2=\frac{16}{7} \\ r_1r_2=\frac{4}{7} \end{cases}$$

پیدامی‌شود: $r_1=2$ و $r_2=\frac{2}{7}$. یعنی حداقل فاصلهٔ بین دونقطهٔ برابر است با $r_1-r_2=2-\frac{2}{7}=\frac{12}{7}$.

پاسخ: $\frac{12}{7}$ سانتیمتر.

۶. بنابر شرط، مجموع یال‌هایی که در یك راس هرم بـه هم می‌رسند، مقداری است ثابت؛ این مجموع را σ می‌گیریم (شکل ۴۲). ازمجموع برابری‌های

$$|AB|+|BC|=\sigma-|BS|$$
$$|BC|+|AC|=\sigma-|CS|$$
$$|AC|+|AB|=\sigma-|AS|$$



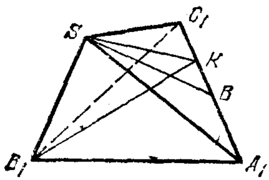
شکل ۴۲

به دست می‌آید:

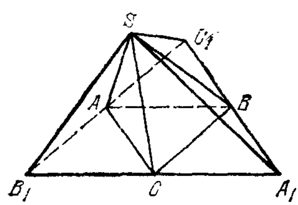
$$۲(|AB|+|BC|+|AC|)=۳\sigma-$$
$$-|BS|-|CS|-|AS|=۲\sigma$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که محیط مثلث ABC برابر است با σ. اکنون، اگر محیط مثلث ABC را با مجموع یال‌هایی کـه از راس A خارج می‌شوند، مقایسه کنیم، به برابری $|AS|=|BC|$ می‌رسیم. بـه همین ترتیب، ثابت می‌شود که: $|BS|=|AC|$ و $|CS|=|AB|$؛ یعنی یال‌های روبه رو در هرم، بایکدیگر برابرند. واین به‌خصوص، به معنای‌آن است که همهٔ وجه‌های هرم، مساحت‌هایی برابر دارند. اگرمرکز کرهٔ محاطی هرم را، به راس‌های A ، B ، C و S وصل کنیم، هرم مفروض، بـه چهار هرم تقسیم می‌شود که راس همهٔ آن‌ها درمرکز کره قراردارد وقاعده‌های آن‌ها، به ترتیب، وجه‌های هرم ABCS است. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که حجم V هرم ABCS، برابر است با $\frac{۱}{۳}Sr\times ۴$؛ که درآن، r برابراست با $\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}$ و S مساحـت مثلث ABC است. ازطرف دیگر $V=\frac{۱}{۳}S.H$، کـه درآن، H عبارت است از فاصلهٔ راس S تا صفحهٔ ABC. ولی دراین‌صورت $H=۴r=۴\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}$.

از راس‌های A، B و C، به ترتیب، خط‌های راستی موازی BC، AC، AB



شکل ۴۴



شکل ۴۳

رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این خط‌های راست را A_1 ، B_1 و C_1 می‌نامیم (شکل ۴۳). چون ABA_1C و AC_1BC متوازی الاضلاع‌اند، پس $|BA_1| = |AC| = |BC_1|$. قبلاً هم ثابت کردیم: $|BS| = |AC|$. از مثلث‌های متساوی‌الساقین SBC_1 و SBA_1 ، به دست می‌آید:
$\widehat{BSA_1} = \widehat{BA_1S}$ و $\widehat{BSC_1} = \widehat{BC_1S}$. چون مجموع زاویه‌های مثلث A_1SC_1 برابر است با

$$\widehat{BC_1S} + \widehat{BA_1S} + \widehat{BSC_1} + \widehat{BSA_1} = \pi$$

به‌دست‌می‌آید: $\widehat{BSC_1} + \widehat{BSA_1} = \frac{\pi}{2}$. یعنی $SA_1 \perp SC_1$. به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود:

$$|A_1C| = |AB| = |CB_1| \text{ ، } |B_1A| = |BC| = |AC_1|,$$
$$AS_1 \perp BS_1 \text{ ، } SB_1 \perp SC_1$$

از نقطهٔ S، عمود SK را برخط راست A_1C_1 فرود می‌آوریم (شکل ۴۴). چون $B_1S \perp SA_1$ و $B_1S \perp SC_1$ ، بنابراین خط راست B_1S برصفحهٔ A_1SC_1 عمود است. و این، به معنای آن است که: $B_1S \perp A_1C_1$. وچون علاوه برآن، $SK \perp A_1C_1$، بنابراین، صفحهٔ B_1SK برخط راست A_1C_1 عمود است، یعنی صفحه‌های B_1SK و $A_1B_1C_1$ برهم عمودند. به این ترتیب، نقطه L ، پای ارتفاعی که ازراس S برقاعدهٔ هرم $SA_1B_1C_1$ رسم می‌شود، روی پاره‌خط B_1K قرار دارد و $|SL| = H = 4\sqrt{\frac{3}{13}}$. طول پاره خط BS را x و طول پاره خط B_1S را y می‌گیریم از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ A_1B_1S و B_1C_1S (شکل ۴۳) به دست می‌آید:

$$|B_1S|^2 + |SA_1|^2 = |A_1B_1|^2 = (|A_1C| + |CB_1|)^2 =$$
$$= 4|AB|^2 = 4|CS|^2,$$
$$|B_1S|^2 + |SC_1|^2 = |B_1C_1|^2 = (|B_1A| + |AC_1|)^2 =$$
$$= 4|BC|^2 = 4|AS|^2$$

این دوبرابری را، جمله به جمله، با هم جمع می‌کنیم، می‌شود:

$$2|B_1S|^2 + |SA_1|^2 + |SC_1|^2 = 4|CS|^2 + 4|AS|^2$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ C_1SA_1 داریم:

$$|SA_1|^2+|SC_1|^2=|A_1C_1|^2=(|A_1B|+|BC_1|)^2=$$
$$=4|AC|^2=4|SB|^2$$

طبق شرط مسألهٔ: $|CS|^2+|AS|^2=12$، در نتیجه

$$2|B_1S|^2=4|SB|^2=48$$

و از آن‌جا

$$2x^2+y^2=24 \qquad (8)$$

چون $A_1C_1 \| AC$، پس‌زاویهٔ بین خطهای راست SB و C_1A_1، برابر است با زاویهٔ بین‌خطهای‌راست SB و AC؛ بنابراین: $\cos\widehat{SBA_1}=-\frac{1}{3}$ (اگر نقطهٔ K روی پاره‌خط BC_1 باشد)، یا $\cos\widehat{SBC_1}=-\frac{1}{3}$ (اگر نقطهٔ K روی پاره‌خط BA_1 باشد) درهرحال، ازمثلث قائم‌الزاویهٔ SBK به‌دست می‌آید:

$$|SK|=|BS|\cdot\sin\widehat{SBC_1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}x$$

مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ SKB_1 و SLB_1 درزاویهٔ حادهٔ SB_1K مشترک‌اند و، بنابراین، متشابه‌اند، ازتشابه این دومثلث نتیجه می‌شود:

$$\frac{|B_1K|}{|SK|}=\frac{|SB_1|}{|SL|}$$

و از آن‌جا :

$$|B_1K|\cdot|SL|=|B_1S|\cdot|SK|$$

بنابرقضیهٔ فیثاغورث : $|B_1K|^2=|B_1S|^2+|SK|^2=y^2+\frac{8}{9}x^2$، و درنتیجه به‌این معادله می‌رسیم:

$$\sqrt{y^2+\frac{8}{9}x^2}\times 4\times\sqrt{\frac{3}{13}}=y\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}x$$

که بامجذور کردن دوطرف آن، به‌دست می‌آید:

$$9y^2+8x^2=\frac{13}{6}x^2y^2 \qquad (9)$$

اگر $x^۲$ را a و $y^۲$ را b بنامیم، آن‌وقت، ازمعادله‌های (۸) و (۹)، دستگاه زیرپیدا می‌شود:

$$\begin{cases} ۲a+b=۲۴ \\ ۸a+۹b=\frac{۱۳}{۶}ab \end{cases} \qquad (۱۰)$$

ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $b=۲۴-۲a$، که اگر به‌جای b درمعادلهٔ‌دوم دستگاه قراردهیم، به‌این معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$\frac{۱۳}{۳}a^۲-۶۲a+۲۱۶=۰$$

این معادله، دوریشه دارد: $a_۱=\frac{۱۰۸}{۱۳}$، $a_۲=۶$. و ازآن‌جا: $b_۱=\frac{۹۶}{۱۳}$، $b_۲=۱۲$.

حجم هرم $ABCS$، یك‌چهارم حجم هرم $A_۱B_۱C_۱S$ است و حجم این دومی برابراست با: $\frac{۱}{۶}|B_۱S|\cdot|SK|\cdot|A_۱C_۱|$ (شکل ۴۴). بنابراین، حجم هرم $ABCS$ برابراست با

$$\frac{۱}{۲۴}y\cdot\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}x\cdot۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۱۸}x^۲y$$

اگر $a=\frac{۱۰۸}{۱۳}$ باشد، حجم مجهول برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۱۸}\cdot\frac{۱۰۸}{۱۳}\cdot\sqrt{\frac{۹۶}{۱۳}}$ می‌شودکه از $\frac{۵}{۳}$ بزرگتراست (خودتان تحقیق کنید). بنابراین: $a=۶$ و $b=۱۲$ وحجم مطلوب برابر $\sqrt{۱۲}\cdot۶\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۱۸}$، یعنی $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$ می‌شود.

پاسخ: $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $-\frac{۷}{۸}$؛ ۲. $k\pi$، $۲l\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ $(k,l\in Z)$؛

۳. $\frac{۵۰}{۳}$؛ ۴. $a\leqslant\frac{۱۶-۲\sqrt{۱۹}}{۱۵}$، $a=\frac{۱}{۲}$، $a\geqslant\frac{۱۶+۲\sqrt{۱۹}}{۱۵}$؛

۵. 6π متر؛ ۶. $2\sqrt{14}$.

گروه سوم ۱. $\frac{1}{9}$؛

۲. $l\pi+\frac{\pi}{2}$، $k\pi+(-1)^{k-1}\frac{\pi}{4}$؛ $(l, k\in Z)$؛ ۳. ۲۰۲/۸؛

۴. $-\frac{1}{2}<a<\frac{6-2\sqrt{23}}{7}$، $\frac{6+2\sqrt{23}}{7}<a<-\frac{1}{2}$؛

۵. $\frac{8}{15}$؛ ۶. ۲.

گروه چهارم ۱. $\frac{1}{8}$؛ ۲. $k\pi$، $2l\pi\pm\frac{5\pi}{6}$ $(k, l\in Z)$؛

۳. $\frac{50}{3}$؛ ۴. $a\leqslant\frac{4-2\sqrt{13}}{3}$، $a=-1$، $a\geqslant\frac{4+2\sqrt{13}}{3}$؛

۵. $-\frac{4}{3}$؛ ۶. $\frac{34\sqrt{6}}{3}$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. ازشرط مسأله نتیجه می‌شود که ماشین علف‌چینی دوم در هر ساعت $(b-3)$ هکتار و ماشین سوم درهرساعت $(2b+3)$ هکتار را درو می کنند. وقتی که ماشین‌های اول ودوم باهم کار کنند، درهرساعت $(b-3)+3$، یعنی $(b-6)$ هکتار را درومی کنند و، بنابراین، ۱۱ هکتاررا در $\frac{11}{6-b}$ ساعت دروخواهند کرد. وقتی که اولی وسومی باهم‌کار کنند، درهرساعت $(2b+3)+3$ یعنی $2b+6$ هکتاررا علف‌چینی می کنند و، بنابراین، ۱۴ هکتاررا در $\frac{14}{6+2b}$ ساعت تمام خواهند کرد چون تمام‌کار در ۴ ساعت تمام شده است :

$$\frac{11}{6-b}+\frac{14}{6+2b}=4 \qquad (1)$$

که اگر مخرج‌ها را از بین ببریم، به‌این معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$۴b^۲-۸b+۳=۰ \Longrightarrow b_۱=\frac{۱}{۲} \text{ ، } b_۲=\frac{۳}{۲}$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که هردوی آن‌ها، درمعادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. درمسأله شرط شده است که b باید در نابرابری $۰<b<۱$ صدق کند، بنابراین $b=\frac{۱}{۲}$.

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادله، عبارت است از همهٔ مقدارهای x که، به طور هم‌زمان، درشرط‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} ۳x-۵>۰ \\ ۲+۵x-x^۲>۰ \end{cases}$$

که با حل آن، به‌دست می‌آید: $\frac{۵}{۳}<x<\frac{۵+\sqrt{۳۳}}{۲}$. اگر ازدوطرف معادله، مثلا درمبنای ۲ لگاریتم بگیریم، با استفاده از رابطه‌های

$$log_۲\frac{۱}{\sqrt{y}}=-\frac{۱}{۲}log_۲ y \text{ و } log_{\frac{۱}{۲۵}} z=-\frac{۱}{۲}log_۵ z$$

خواهیم داشت :

$$-\frac{۱}{۲}log_۲(۳x-۵)=-\frac{۱}{۲}log_۵(۲+۵x-x^۲)\cdot log_۲(۳x-۵) \quad (۲)$$

که معادله‌ای است هم‌ارز معادلهٔ اصلی، در حوزهٔ تعریف آن. معادلهٔ(۲) را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$log_۲(۳x-۵)\cdot[log_۵(۲+۵x-x^۲)-۱]=۰$$

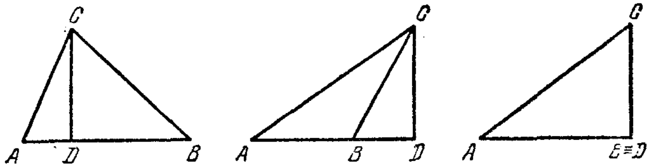
که با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارزاست:

$$log_۲(۳x-۵)=۰ \text{ ، } log_۵(۲+۵x-x^۲)=۱$$

معادلهٔ اول، درحوزهٔ مقدارهای قابل معادله، دارای تنها جواب $x_۱=۲$ است. معادلهٔ دوم، بامعادلهٔ درجه دوم $۲+۵x-x^۲=۵$ هم‌ارز است که دارای دوجواب $x_۲=\frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲}$ و $x_۳=\frac{۵-\sqrt{۱۳}}{۲}$ است و، از آن‌ها، تنها $x_۲$ درحوزهٔ تعریف معادلهٔ اصلی قرار دارد.

پاسخ: $x_1=2$، $x_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

۳. CD را ارتفاع مثلث ABC می‌گیریم که ازرأس C برضلع AB فرود آمده است. سه‌حالت ممکن است.



شکل ۴۵

پای D، از ارتفاع CD (شکل۴۵) :

۱) روی پاره‌خط AB قراردارد،

۲) روی امتداد پاره‌خط AB، ازطرف B، قراردارد،

۳) برنقطهٔ B منطبق است.

بنابرشرط مسأله شعاع R ازدایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است با ۵ سانتیمتر. بنابراین، درهرسه حالت

$$|BC|=2R\sin\widehat{BAC}=10\sin\frac{\pi}{3}=5\sqrt{3}\ (\text{سانتیمتر})،$$

$$|AC|=\frac{|CD|}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\ (\text{سانتیمتر})$$

اکنون روشن است که نقطهٔ D برنقطهٔB منطبق نیست، زیرا $|BC|\neq|CD|$.
بااستفاده ازقضیهٔ فیثاغورث در مثلث‌های ACD و BCD به‌دست می‌آید:

$$|AD|=\sqrt{|AC|^2-|CD|^2}=\sqrt{4-3}=1\ (\text{سانتیمتر})،$$

$$|BD|=\sqrt{|BC|^2-|CD|^2}=\sqrt{75-3}=6\sqrt{2}\ (\text{سانتیمتر})،$$

ازاین‌جا، نتیجه می‌شود که نقطهٔ D بین دو نقطهٔ A و B قراردارد وبنابراین

$$|AB|=|AD|+|BD|=6\sqrt{2}+1\ (\text{سانتیمتر})$$

پاسخ: $AB=6\sqrt{2}+1$؛ $|BC|=5\sqrt{3}$؛ $|AC|=2$ (برحسب سانتیمتر).

۴. برای هرمقداری از پارامتر a، همهٔ مقدارهای مجهول x، در حوزه‌ای قرار

دارندکه با نابرابری‌های زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x-x^{۲}>۰ \\ ۱-\dfrac{x^{۲}}{۲}>۰ \end{cases}$$

یعنی درحوزهٔ $۰<x<\sqrt{۲}$ برای هرمقدار x، از این حوزه، داریم:

$$۲x-x^{۲}=۱-(۱-x)^{۲}\leqslant ۱ \quad \text{و} \quad ۱-\frac{x^{۲}}{۲}\leqslant ۱$$

یعنی

$$log_{۳}(۲x-x^{۲})\leqslant ۰ \text{ ، } log_{۱۱}\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)\leqslant ۰$$

اگر $a\neq -۲$ ، $a\neq \frac{۱}{۳}$، آن وقت

$$[۱+(a+۲)^{۲}]log_{۳}(۲x-x^{۲})\leqslant log_{۳}(۲x-x^{۲}),$$

$$[۱+(۳a-۱)^{۲}]log_{۱۱}\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)\leqslant log_{۱۱}\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)$$

وبرابری مفروض مسأله، تنها برای مقدارهایی از x برقراراست که، برای آن‌ها، به‌طورهم‌زمان داشته باشیم:

$$\begin{cases} log_{۳}(۲x-x^{۲})=۰ \\ log_{۱۱}\left(۱-\dfrac{x^{۲}}{۲}\right)=۰ \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} ۲x-x^{۲}=۱ \\ ۱-\dfrac{x^{۲}}{۲}=۱ \end{cases}$$

به‌سادگی دیده می‌شودکه این‌دستگاه معادله‌ها، جواب نداردبنابراین، برای $a\neq -۲$ و $a\neq \frac{۱}{۳}$، هیچ مقداری از x در برابری مفروض مسأله صدق نمی کند. به‌ازای $a=-۲$، نابرابری‌مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\log_3(2x-x^2)+50\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

این معادله درحوزهٔ $0<x<\sqrt{2}$ ، هم‌ارزاست با

$$\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0$$

که دراین حوزه، جوابی ندارد. درحالت $a=\frac{1}{3}$،معادلهٔاصلی به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{58}{9}\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=$$

$$=\log_3(2x-x^2)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$$

که هم‌ارزبااین معادله است.

$$\log_3(2x-x^2)=0 \Longrightarrow 2x-x^2=1$$

که دارای جواب منحصر به فرد $x=1$ است. این جواب در مجموعهٔ $0<x<\sqrt{2}$ قراردارد وبنابراین، دربرابری اصلی‌هم صدق می‌کند.

پاسخ : به‌ازای $a=\frac{1}{3}$ داریم: $x=1$ وبه‌ازای $a\neq\frac{1}{3}$،هیچ‌مقداری از x دربرابری مفروض، صدق نمی‌کند.

۵. مقدارهای مجهول x، جواب‌هایی ازمعادلهٔ

$$\sin^2(2x-1)=\cos^2 x \qquad (3)$$

هستند که باشرط‌های زیرسازگار باشند:

$$\cos x \geqslant 0 \;,\; |x|\leqslant 2\pi$$

معادلهٔ(۳) را حل‌می‌کنیم. اگر ازرابطه‌های تبدیل به‌کسینوس کمان دوبرابر استفاده‌کنیم، معادلهٔ(۳)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1-\cos(4x-2)}{2}=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

ویا

$$\cos(4x-2)+\cos 2x=0$$

که با تبدیل به‌ضرب، می‌شود:

$$۲\cos(x-۱)\cos(۳x-۱)=۰$$

معادلهٔ اخیر، وبنابراین معادلهٔ (۳)، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارزاست:

$$\cos(x-۱)=۰ \text{ ، } \cos(۳x-۱)=۰$$

جواب‌های‌معادلهٔ اول $x=n\pi+\frac{\pi+۲}{۲}$ $(n\in Z)$ و جواب‌های معادلهٔ دوم $x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi+۲}{۶}$ $(k\in Z)$ است. از بین‌این‌جواب‌ها، آن‌هایی‌راانتخاب می‌کنیم‌که باشرط $\cos x\geqslant ۰$ سازگارباشند داریم:

$$\cos\left(n\pi+\frac{\pi+۲}{۲}\right)=(-۱)^n\cos\frac{\pi+۲}{۲}$$

چون $\cos\frac{\pi+۲}{۲}<۰$، بنابراین، جواب‌هایی درشرط $\cos x\geqslant ۰$ صدق می‌کنند که متناظر با عددهای فرد برای n باشند $(n=۲l+۱)$ ، یعنی $x=۲l\pi+\frac{۳\pi+۲}{۲}$ $(l\in Z)$؛که تنها به‌ازای $l=-۱$ ، $l=۰$، درحوزهٔ $|x|\leqslant ۲\pi$ واقع می‌شوند؛ یعنی $\frac{-\pi+۲}{۲}$ ، $\frac{۳\pi+۲}{۲}$، دومین‌رشته‌جواب‌ها را، می‌توان به‌شش رشته، با دورهٔ تناوب ۲π، تقسیم کرد:

$$x=۲m\pi+\frac{\pi+۲}{۶}\ ; \qquad x=۲m\pi+\frac{۳\pi+۲}{۶}\ ;$$

$$x=۲m\pi+\frac{۵\pi+۲}{۶}; \qquad x=۲m\pi+\frac{۷\pi+۲}{۶}\ ;$$

$$x=۲m\pi+\frac{-\pi+۲}{۶}; \qquad x=۲m\pi+\frac{-۳\pi+۲}{۶}$$

که درآن‌ها $m\in Z$، چون داریم:

$$\cos\frac{\pi+۲}{۶}>۰; \qquad \cos\frac{۳\pi+۲}{۶}<۰; \qquad \cos\frac{۵\pi+۲}{۶}<۰;$$

$$\cos\frac{۷\pi+۲}{۶}<۰; \qquad \cos\frac{-\pi+۲}{۶}>۰; \qquad \cos\frac{-۳\pi+۲}{۶}>۰$$

بنابراین، نابرابری $\cos x \geqslant 0$، تنها درمورد سه تا ازآن‌ها صادق است:

$$x = 2m\pi + \frac{\pi + 2}{6} \quad (m \in Z);$$

$$x = 2r\pi + \frac{-\pi + 2}{6} \quad (r \in Z);$$

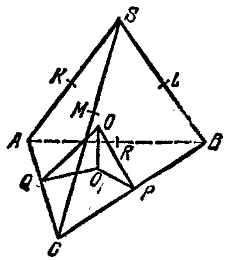
$$x = 2q\pi + \frac{-3\pi + 2}{6} \quad (q \in Z)$$

که تنها به ازای $m = -1$، $m = 0$، $r = 0$، $r = 1$، $q = 0$، $q = 1$ با شرط $|x| \leqslant 2\pi$ سازگارند:

$\frac{-11\pi + 2}{6}$، $\frac{\pi + 2}{6}$، $\frac{-\pi + 2}{6}$، $\frac{11\pi + 2}{6}$، $\frac{-3\pi + 2}{6}$، $\frac{9\pi + 2}{6}$.

پاسخ: $\frac{\pm\pi + 2}{6}$، $\frac{-3\pi + 2}{6}$، $\frac{\pm 11\pi + 2}{6}$، $\frac{9\pi + 2}{6}$، $\frac{-\pi + 2}{2}$، $\frac{3\pi + 2}{2}$.

۶. ازمرکز دایرهٔ محاطی هر وجه هرم، عمودی بر آن وجه اخراج می‌کنیم ونقطهٔ برخورد این عمودها را O می‌نامیم (شکل۴۶). اگر O_1 را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، و P ، Q را نقطه‌های تماس این‌دایره برضلع‌های BC و AC بگیریم، آن‌وقت‌مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OO_1P و OO_1Q در ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ OO_1 مشترک‌اند و، علاوه برآن، $|QO_1| = |PO_1|$؛ بنابراین $|OQ| = |OP|$. شعاعی از دایره که از نقطهٔ تماس بگذرد، برخط مماس عمود است. یعنی $PO_1 \perp BC$ و $QO_1 \perp AC$. اکنون، باتوجه به قضیهٔ سه‌عمود، می‌توان نتیجه گرفت: $OP \perp BC$ و $OQ \perp AC$. ازاین‌جا نتیجه



شکل ۴۶

می‌شود که نقطهٔ O از یال‌های AC و BC به‌یك فاصله‌است. به‌همین ترتیب، ثابت‌می‌شود که‌نقطهٔ O، ازهردو یال‌متعلق به‌یك‌وجه به یك فاصله است، وچون هردووجه‌یك‌یال‌مشترك دارند، بنابراین،نقطهٔ O، ازهمهٔ یال‌های‌هرم به‌یك‌فاصله است. پای عمودهایی را که از نقطهٔ O بریال‌های AB، AS، BS و CS فرودمی‌آیند، به‌ترتیب، R، K، L و M می‌نامیم (شکل۴۶). این‌نقطه‌هاهم، عبارتنداز نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی وجه‌های مثلثی هرم ABCS با یال‌های متناظرهرم. فرض می‌کنیم:

$$|SL|=x،\ |BL|=y،\ |CM|=z$$

مثلث‌های قائم‌الزاویه OSK، OSL و OSM دروتر OS مشترك‌اند،علاوه بر آن، ضلع‌های OK، OL و OM یك‌طول دارند (که برابراست با فاصلهٔ نقطهٔ O ازوجه‌های هرم). یعنی

$$|SK|=|SL|=|SM|=x$$

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که

$$|BP|=|BR|=|BL|=y \qquad (۴)$$

$$|CP|=|CQ|=|CM|=z \qquad (۵)$$

و

$$|AK|=|AQ|=|AR|$$

بنابرفرض $|AS|=|BS|$، بنابراین

$$|AK|=|AS|-|SK|=|BS|-|SL|=|BL|=y$$

وبه‌دست می‌آید :

$$|AK|=|AQ|=|AR|=y \qquad (۶)$$

درمثلث‌متساوی‌الساقین، میانه‌وارتفاع برهم منطبق‌اند، بنابراین $SR\perp AB$ و

$$|SR|=\sqrt{|BS|^۲-|BR|^۲}=\sqrt{(x+y)^۲-y^۲}=\sqrt{۲xy+x^۲}$$

بنابرفرض، مساحت وجه ABS برابر است با $\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}$، بنابراین

$$y\sqrt{۲xy+x^۲}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}\Longrightarrow y^۲(۲xy+x^۲)=\frac{۶۳}{۱۶} \qquad (۷)$$

اگرازقضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث BSC استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|BS|^۲=|CS|^۲+|BC|^۲-۲|BC|\cdot|CS|\cdot\cos\widehat{BCS} \qquad (۸)$$

وچون $\widehat{BCS}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{۲۳۱}}{۳۷}$ ، بنابراین

$$\cos\widehat{BCS}=\frac{۱}{\sqrt{۱+tg^{۲}\widehat{BCS}}}=\frac{۳۷}{۴۰}$$

علاوه برآن، $|BC|y+z=|AC|$ و بنابر فرض $|AC|.|CS|=۲۰$. با استفاده از این برابری‌ها و، همچنین، برابری‌های $|BS|=x+y$ و

$$|CS|^{۲}+|BC|^{۲}=(|CS|-|BC|)^{۲}+۲|BC|\cdot|CS|=$$
$$=(x-y)^{۲}+۴۰$$

از (۸)، به معادله زیرمی‌رسیم:

$$(x+y)^{۲}=(x-y)^{۲}+۳$$

ویا بعد از ساده کردن

$$xy=\frac{۳}{۴} \qquad (۹)$$

ازآن‌جا $x=\frac{۳}{۴y}$، که اگر به‌جای x در برابری (۷) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\frac{۳}{۲}y^{۲}+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۶۳}{۱۶}\Longrightarrow y=\frac{۳}{۲}$$

واز (۹) نتیجه می‌شود: $x=\frac{۱}{۲}$. از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود

$$|AC|=y+z=\frac{۳}{۲}+z،\ |CS|=x+z=\frac{۱}{۲}+z$$

وبنابرفرض مسأله

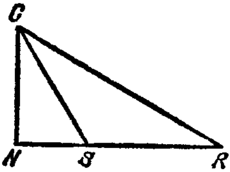
$$\left(\frac{۳}{۲}+z\right)\left(\frac{۱}{۲}+z\right)=۲۰$$

از آن‌جا $z=\frac{۷}{۲}$. به‌این ترتیب

$$|AB|=۲y=۳،$$
$$|BC|=|AC|=y+z=۵،$$
$$|AS|=|BS|=x+y=۲،$$

$$|CS|=x+z=4$$

اکنون ، به محاسبهٔ ارتفاع هرم ABCS کــه از راس C رسم شده است، می‌پردازیم. چون مثلث‌های ABC و ABS متساوی‌الساقین‌انــد و $|AR|=|BR|$، بنابر این $CR\perp AB$ و $SR\perp AB$. از این جا نتیجه می‌شود که‌خط راست AB برصفحهٔ CRS عموداست. ازهمین‌جا، بلافاصله معلوم می‌شود که صفحه‌های CRS و ABS برهم عمودند. و این، به معنای آن است که ارتفاع مثلث CRS، که از رأس C گذشته است، همان‌ارتفاع هــرم اســت. ازمثلث‌هــای ABC و ABS به‌دست می‌آید:



شکل ۴۷

$$|CR|=\sqrt{|BC|^{2}-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^{2}}=$$

$$=\sqrt{25-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{91}}{2}$$

$$|SR|=\sqrt{|BS|^{2}-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^{2}}=\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

چون داریم:

$$|CR|^{2}=\frac{91}{4}>16+\frac{7}{4}=|CS|^{2}+|SR|^{2}$$

بنا بر این، زاویهٔ CSR منفرجه است. پای ارتفاع وارد از راس C درمثلث CSR را N می‌نامیم (شکل ۴۷). برای $|CN|^{2}$، دو عبارت به‌کمك قضیهٔ فیثاغورث،ازمثلث‌های‌قائم‌الزاویهٔ CRN و CSNپیدا می کنیم وبرابرقرار می‌دهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$16-|NS|^{2}=\frac{91}{4}-\left(|NS|+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{2}$$

که ازآن‌جا، به‌دست می‌آید: $|NS|=\frac{5}{\sqrt{7}}$. حالا

$$|CN|=\sqrt{|CS|^{2}-|NS|^{2}}=\sqrt{16-\frac{25}{7}}=\sqrt{\frac{87}{7}}$$

ودیگر، حجم هرم بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}\times\sqrt{\frac{۸۷}{۷}}=\frac{\sqrt{۸۷}}{۴}$$

پاسخ: $\frac{\sqrt{۸۷}}{۴}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. ۱۰ ؛ ۲. $x_۱=۱$ ، $x_۲=\frac{۷+\sqrt{۴۱}}{۴}$ ؛

۳. $|AB|=۳\sqrt{۲}$ ، $|AC|=\sqrt{۱۰}$ (سانتیمتر) ؛

۴. درحالت $a=۲$ داریم: $x=-۱$ و درحالت $a\neq۲$ جواب نداریم ؛

۵. $k\pi+\frac{-\pi-۶}{۶}$ ، $k\pi+\frac{\pi-۲}{۲}$ ، که درآن‌ها $k=-۱ ، ۰ ، ۱$ ؛

۶. $\frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۷۱}{۱۵}}$.

گروه سوم. ۱. ۱ ؛ ۲. $x_۱=۱$ ، $x_۲=\frac{۵+\sqrt{۲۱}}{۲}$ ؛

۳. $|AC|=۷$ ، $|BC|=۸$ (سانتیمتر) ؛

۴. به‌ازای $a=-\frac{۳}{۴}$ داریم: $x=\frac{۱}{۲}$ و به‌ازای $a\neq-\frac{۳}{۴}$ جواب نداریم ؛

۵. $\frac{-۳\pi+۶}{۲}$ ، $\frac{\pi+۶}{۵}$ ، $\frac{\pm۷\pi+۶}{۶}$ ، $\frac{\pm۵\pi+۶}{۶}$ ، $\frac{۳\pi+۲}{۲}$ ، $\frac{-\pi+۲}{۲}$ ؛ ۶. $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$.

گروه چهارم. ۱. ۱ ؛ ۲. $x_۱=۲$ ، $x_۲=\frac{۹+\sqrt{۶۹}}{۲}$ ؛

۳. $|BC|=۴^{cm}$ ، $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{۴}$ ؛

۴. با شرط $a=-۱$، داریم: $x=-\frac{۱}{۲}$ وباشرط $a\neq-۱$، جوابی نداریم؛

۵. $k\pi+\frac{\pi-۲}{۲}$ و $k\pi+\frac{۳\pi-۲}{۶}$ با شرط $k=-۱ ، ۰ ، ۱$ ؛

۶. $\frac{\sqrt{۷۱}}{۳۶}$.

۱۹۷۷

گروه اول

۱. با استفاده از رابطهٔ $sin^{۲}x=\frac{۱-cos ۲x}{۲}$، معادلهٔ مفروض، سرانجام به‌صورت $cos ۲x=-\frac{۱}{۲}$ درمی‌آید، که جواب‌های آن عبارتند از:

$$(n\in Z)x=n\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

می‌توانستیم، معادلهٔ مفروض را به مجموعهٔ دو معادلهٔ $sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $sin x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تبدیل کنیم و، با حل آن‌ها، جواب‌ها را به‌دست‌آوریم.

پاسخ: $n\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ $(n\in Z)$.

۲. با حل معادلهٔ درجه دوم $۲x^{۲}+۶x-۲۰=۰$، نقطه‌های $x_{۱}=-۵$ و $x_{۲}=۲$، یعنی نقطه‌های برخورد سهمی $y=-۲x^{۲}-۶x+۲۰$ با محور Ox به‌دست می‌آید. شاخه‌های سهمی به طرف پایین‌اند (شکل ۴۸) و شکلی که مساحت S آن را باید پیدا کنیم، در بالای محور Ox و زیر سهمی، در فاصلهٔ $-۵\leqslant x\leqslant ۲$، قرار دارد. بنابراین

$$S=\int_{-۵}^{۲}(-۲x^{۲}-۶x+۲۰)dx=\left(-\frac{۲x^{۲}}{۳}۳x^{۲}+۲۰x\right)\Big|_{-۵}^{۲}=$$

$$=-\frac{۱۶}{۳}-۱۲+۴۰-\frac{۲۵۰}{۳}+۷۵+۱۰۰=\frac{۳۴۳}{۳}$$

پاسخ. $S=\frac{۳۴۳}{۳}$.

۳. برای محاسبهٔ تعداد ترتیب‌ها (جای‌گشت‌ها) و تعداد تبدیل‌ها (جاوشتش‌ها)، از رابطه‌های $A_{n}^{m}=\frac{n!}{(n-m)!}$ و $p_{n}=n!$ استفاده‌می کنیم:

$$x_n=\frac{(n+۴)!}{n!(n+۲)!}-\frac{۱۴۳}{۴\times n!}=\frac{(n+۴)(n+۳)}{n!}-\frac{۱۴۳}{۴\times n!}=$$
$$=\frac{۴n^۲+۲۸n-۹۵}{۴\times n!}$$

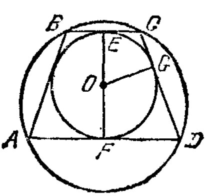
از این‌جا نتیجه می‌شود که، برای مقدارهای مجهول n، باید نابرابری $۴n^۲+۲۸n-۹۵<۰$ بر قرار باشد. این نامعادله، به سادگی منجر به $-\frac{۱۹}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$ می‌شود و، بنابراین، باید همهٔ عددهای طبیعی واقع در این فاصله را به‌دست آورد. این عددها، عبارتند از ۱ و ۲. درنتیجه، دنبالهٔ x_n تنها دوعدد منفی دارد:

$$x_۱=\frac{۴\times ۱^۲+۲۸\times ۱-۹۵}{۴\times !}=-\frac{۶۳}{۴},$$
$$x^۲=\frac{۴\times ۲^۲+۲۸\times ۲-۹۵}{۴\times ۲!}=-\frac{۲۳}{۸}$$

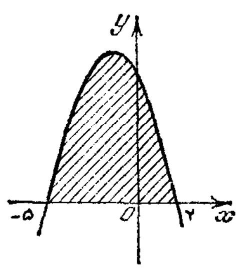
پاسخ: $-\frac{۶۳}{۴}$ و $-\frac{۲۳}{۸}$

۴. راس‌های متوالی ذوزنقه را A ، B ، C و D می‌نامیم ، به نحوی که پاره‌خط‌های AD و BC قاعده‌های آن باشند و ، ضمناً، داشته باشیم: $|AD|>|BC|$ (شکل ۴۹). زاویهٔ BAD را برابر α می گیریم، بنابراین: $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$. چون ذوزنقه، بنابرفرض، متساوی‌الساقین است، داریم:

$$\widehat{BCD}=\widehat{ABC}=\pi-\alpha \text{ و } \widehat{CDA}=\widehat{BAD}=\alpha.$$



شکل ۴۹



شکل ۴۸

طول پاره‌خط BD را، به‌دو طریق، برحسب α و R (شعاع دایرهٔ محیطی) و r (شعاع دایرهٔ محاطی)، محاسبه می کنیم. از این راه، معادله‌ای با مجهول α به‌دست می‌آید که، به کمك آن، همهٔ زاویه‌های ذوزنقه محاسبه می‌شود.

$\widehat{BAD}$، یك زاویهٔ محاطی در دایرهٔ بزرگتراست (روبه‌روی به‌کمان BD)، بنابراین

$$|BD| = ۲R\sin\widehat{BAC} = ۲R\sin\alpha$$

نقطهٔ O، مرکزدایرهٔ محاطی‌را به‌نقطه‌های تماس این‌دایره باضلع‌های BC، CDو AD وصل‌می کنیم. روی‌شکل،این‌نقطه‌ها را،به‌ترتیب، E، G و F نامیده‌ایم. چون شعاع وارد به‌نقطهٔ تماس برخط مماس عمود است،بنابراین: $OE \perp BC$و $OF \perp AD$؛ خطهای راست BCو AD موازی‌اند،بنابراین $OF \perp BC$ و، بنابراین، نقطه‌های E، O و F بریك امتدادقراردارند. ضمناً ازاین‌جا نتیجه می‌شود که طول ارتفاع‌ذوزنقه، برابراست با ۲r. بنابرشرط مساله داریم: $\frac{۲r}{R} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$ یا $r \cdot R\sqrt{۶}$. درنتیجه

$$|BD| = ۲\sqrt{۶}\,r \cdot \sin\alpha$$

چون دایرهٔ به‌مرکزO، برضلع‌های BC، CD و AD مماس است، بنابراین، خطهای‌راست BO، COو DO، به‌ترتیب، نیمسازهای زاویه‌های ABC، BCD و CDA هستند. به‌این‌ترتیب:

$$|BC| = |BE| + |EC| = r\,cotg\frac{\widehat{ABC}}{۲} + r\,cotg\frac{\widehat{BCD}}{۲} =$$

$$= ۲r\,cotg\frac{\pi-\alpha}{۲} = ۲r\,tg\frac{\alpha}{۲}, \quad |CD| = |CG| + |GD| =$$

$$= r\,cotg\frac{\widehat{BCD}}{۲} + r\,cotg\frac{\widehat{CDA}}{۲} = r\,cotg\frac{\pi-\alpha}{۲} + r\,cotg\frac{\alpha}{۲} =$$

$$= r\left(tg\frac{\alpha}{۲} + cotg\frac{\alpha}{۲}\right) = \frac{۲r}{\sin\alpha}$$

اگر ازقضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث BCD استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|BD|^۲ = |BC|^۲ + |CD|^۲ - ۲|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{BCD} =$$

$$=4r^2 tg^2\frac{\alpha}{2}+\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}-8r^2\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cos(\pi-\alpha)=$$

$$=4r^2\left[\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right]=4r^2\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$$

اگر دومقداری را که برای $|BD|^2$ دراختیار داریم، برابرقرار دهیم، به این معادله می‌رسیم:

$$1+\frac{1}{\sin^2\alpha}=6\sin^2\alpha \Longrightarrow 6\sin^4\alpha-\sin^2\alpha-1=0$$

معادلهٔ اخیر، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\sin^2\alpha=-\frac{1}{3} \text{ و } \sin^2\alpha=\frac{1}{2}$$

معادلهٔ اول، جواب ندارد و معادلهٔ دوم هم‌ارز است با

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \cos 2\alpha=0$$

و این معادله، در فاصلهٔ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، تنها یك جواب دارد: $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

پاسخ: $\widehat{BAD}=\widehat{CDA}=\frac{\pi}{4}$ ، $\widehat{BCD}=\widehat{ABC}=\frac{3\pi}{4}$

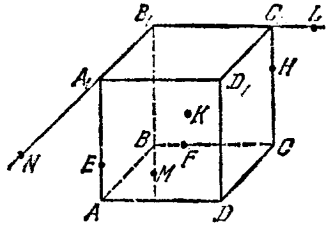
۵. راه حل اول. مرکز مکعب را K و نقطه‌های برخورد صفحهٔ α را باخط‌های راست B_1C_1 ، B_1B و B_1A_1 ، به ترتیب، L ، M و N می‌نامیم (شکل ۵۰). اندازهٔ پاره خط‌های $|B_1L|$ ، $|B_1M|$ و $|B_1N|$ را پیدا کنید. نقطهٔ K وسط پاره خط AC_1 است و، بنابراین، به‌صفحهٔ AA_1C_1C تعلق دارد. خط‌های راست EK و CC_1 در همین صفحه‌اند. نقطهٔ برخورد آن‌ها را H می‌گیریم (شکل ۵۱). صفحهٔ α یال CC_1 از مکعب را درنقطهٔ H قطع می‌کند. در مثلث‌های AKE و C_1KH داریم:

$$|AK|=|KC_1| \quad , \quad \widehat{EKA}=\widehat{C_1KH} \quad , \quad \widehat{EAK}=\widehat{HC_1K}$$

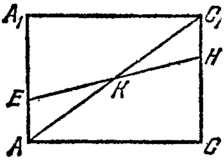
بنابراین $|C_1H|=|AE|=\frac{1}{3}$. صفحه‌های α و BB_1C_1C یکدیگر را روی خط راست FH قطع می‌کنند، یعنی نقطه‌های L و M ، به ترتیب ،

عبارتند از نقطه‌های برخورد FH با خط‌های راست $B_۱C_۱$ و $B_۱B$ (شکل ۵۲). مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $C_۱HL$ ، HFC و MBF متشابه‌اند ($C_۱\widehat{H}L=C_۱\widehat{H}F$ و $\widehat{CFH}=\widehat{BFM}$). یعنی

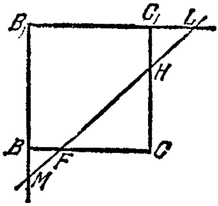
$$\frac{|C_۱L|}{|CF|}=\frac{|C_۱H|}{|CH|} \quad , \quad \frac{|BM|}{|CH|}=\frac{|BF|}{|CF|}$$



شکل ۵۰



شکل ۵۱



شکل ۵۲

و از آن‌جا

$$|C_۱L|=\frac{|C_۱H|\cdot|CF|}{|CH|}=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۸}$$

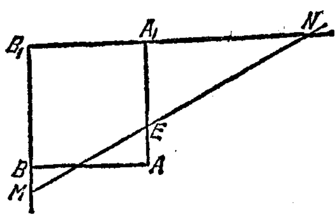
$$|BM|=\frac{|BF|\cdot|CH|}{|CF|}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۹}$$

به‌این ترتیب:

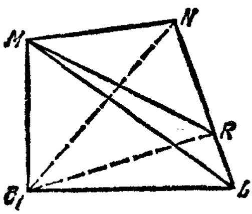
$$|B_۱L|=۱+\frac{۳}{۸}=\frac{۱۱}{۸} \quad , \quad |B_۱M|=۱+\frac{۲}{۹}=\frac{۱۱}{۹}$$

چون صفحه‌های α و $BB_۱A_۱A$ ، روی خط راست ME ، یکدیگر را قطع می‌کنند، N نقطهٔ برخورد خط‌های راست ME و $B_۱A_۱$ می‌شود. $|B_۱N|$ را x می‌گیریم؛ آن وقت $|A_۱N|=x-۱$ (شکل ۵۳). از تشابه مثلث‌های $MB_۱N$ و $EA_۱N$ بـه دست می‌آیـد: $\frac{|A_۱N|}{|B_۱N|}=\frac{|A_۱E|}{|B_۱M|}$. وچـون $|A_۱E|=۱-|AE|=\frac{۲}{۳}$ ، بنابرایـن $\frac{x-۱}{x}=\frac{۲}{۳}:\frac{۱۱}{۹}$ و از آن‌جـا

$x=\frac{۱۱}{۵}$. بنابراین $|B_۱N|=\frac{۱۱}{۵}$. فاصلهٔ مجهول، برابر است با طول ارتفاعی ازهرم $MNLB_۱$ که از راس $B_۱$ رسم شده باشد. از نقطهٔ $B_۱$ ، عمود $B_۱R$ را برخط راست NL رسم می‌کنیم (شکل ۵۴). چون خط راست $MB_۱$ برخط‌های‌راست $NB_۱$ و $LB_۱$ عمود است، بنابراین ، $MB_۱$ برصفحهٔ $LB_۱N$ عمود می‌شود. و این، به‌معنای آن است که خط‌های راست $MB_۱$ و LN بر هم عمودند. از عمود بودن خط‌های راست LN و $MB_۱$ و، همچنین، LN و $B_۱R$ نتیجه می‌شود که خط‌راست LN برصفحهٔ $MRB_۱$ عمود است. در نتیجه، صفحه‌های $MRB_۱$ و MNL برهم عمودند. این، به معنای آن است که ارتفاع وارد از راس $B_۱$ درهـرم $MNLB_۱$ ، در صفحهٔ $MRB_۱$ قرار دارد و همان ارتفاع h از مثلث MRB است (شکل ۵۵).



شکل ۵۳



شکل ۵۴

از مثلث قائم‌الزاویهٔ $B_۱NL$ به‌دست می‌آید:

$$|NL|=\sqrt{|B_۱N|^۲+|B_۱L|^۲}=\sqrt{\frac{۱۲۱}{۲۵}+\frac{۱۲۱}{۶۴}}=\frac{۱۱}{۴۰}\sqrt{۸۹}$$

سپس

$$\frac{|B_۱R|}{|B_۱L|}=\sin B_۲\widehat{L}R=\frac{|B_۱N|}{|NL|}$$

از آن‌جا

$$|B_۱R|=\frac{|B_۱L|.|B_۱N|}{|NL|}=\frac{\frac{۱۱}{۸}\times\frac{۱۱}{۵}}{\frac{۱۱}{۴۰}\sqrt{۸۹}}=\frac{۱۱}{\sqrt{۸۹}}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ $MB_۱R$ معلوم می‌شود:

$$|MR|=\sqrt{|MB_۱|^۲+|B_۱R|^۲}=\sqrt{\frac{۱۲۱}{۸۱}+\frac{۱۲۱}{۸۹}}=\frac{۱۱}{۹}\sqrt{\frac{۱۷۰}{۸۹}}$$

و چـون $\frac{|B_۱R|}{|MR|}=\sin B_۱\widehat{M}R=\frac{h}{|MB_۱|}$ ، بنابراین

$$h=\frac{|MB_۱|.|B_۱R|}{|MR|}=\frac{\frac{۱۱}{۹}\times\frac{۱۱}{\sqrt{۸۹}}}{\frac{۱۱}{۹}\times\sqrt{\frac{۱۷۰}{۸۹}}}=\frac{۱۱}{\sqrt{۱۷۰}}$$

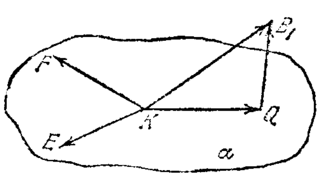
راه حل دوم. تصویر قائم نقطهٔ $B_۱$ برصفحهٔ α را Q می گیریم. دستگاه محورهای مختصات فضایی را، به‌این‌ترتیب انتخاب می کنیم که مبدأ مختصات درنقطهٔ B ، محور Ox درجهت نیم خط BA ، محور Oy درجهت نیم‌خط BC و محور Oz درجهت نیم خط $BB_۱$ باشد؛ ضمناً ، واحد مقیاس‌را پاره‌خط به‌طول واحد می گیریم. در این صورت، مختصات نقطه‌های E ، F ، K و $B_۱$ چنین است:

$$E\left(۱, ۰, \frac{۱}{۳}\right) \;;\quad F\left(۰, \frac{۱}{۴}, ۰\right) \;;$$
$$K\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \;,\quad B_۱(۰, ۰, ۱)$$

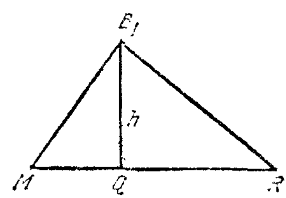
چون بردارهای $\overrightarrow{KE}$ و $\overrightarrow{KF}$ هم‌راستا نیستند و نقطهٔ Q درصفحهٔ α قراردارد (شکل ۵۶)، عددهای a و b وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{KQ}=a.\overrightarrow{KE}+b.\overrightarrow{KF} \quad و \quad \overrightarrow{QB_۱}=\overrightarrow{KB_۱}-\overrightarrow{KQ}=$$
$$=\overrightarrow{KB_۱}-a.\overrightarrow{KE}-b.\overrightarrow{KF}$$

و چون



شکل ۵۶



شکل ۵۵

$$\overrightarrow{KF}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}\right) \text{ ، } \overrightarrow{KE}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{6}\right)$$

و $\overrightarrow{KB_1}=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ ، پس

$$\overrightarrow{QB_1}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\ ,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\ ,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b\right)$$

بردار $\overrightarrow{QB_1}$ بر بردارهای $\overrightarrow{KE}$ و $\overrightarrow{KF}$ عمود است. بنابراین

$$\circ=(\overrightarrow{KE}\ ,\ \overrightarrow{QB_1})=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b\right)=$$

$$=-\frac{1}{12}-\frac{19}{36}a+\frac{1}{24}b\ ,$$

$$\circ=(\overrightarrow{KF}\ ,\ \overrightarrow{OB_1})=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}a-\frac{9}{16}b$$

با حل این دستگاه، نسبت به a و b ، به‌دست می‌آید:

$$b=\frac{18}{85}\ ,\ a=-\frac{12}{85}$$

و بنابراین

$$\overrightarrow{QB_1}=\left(-\frac{55}{170}\ ,\ -\frac{88}{170}\ ,\ \frac{99}{170}\right)$$

و فاصلهٔ مجهول، چنین می‌شود:

$$|QB_1|=\sqrt{\left(\frac{55}{170}\right)^2+\left(\frac{88}{170}\right)^2+\left(\frac{99}{170}\right)^2}=\frac{11}{\sqrt{170}}$$

پاسخ: $\frac{11}{\sqrt{170}}$.

۶. با حل دستگاه مفروض، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{a+۳}{۳}\ ,\ \ y=\frac{۲a-۳}{۳}$$

بنابراین، مقدارهای مجهول پارامتر a ، عبارت است از جواب‌های نامعادلهٔ

$$\frac{a+۳}{۳}>\frac{۲a-۳}{۳}$$

و این نابرابری، برای همهٔ مقدارهای $a<۶$ برقرار است:

پاسخ : $a<۶$.

۷. حوزهٔ مقدارهـای قابل قبول نامعادلهٔ مفروض، باشرطهای $x>۰$ و $x\neq ۱$ معین می‌شود. دراین حوزه، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$log_۷ x+\frac{۱}{log_۷ x}\geqslant ۲ \qquad (۱)$$

که اگر $log_۷ x = t$ بگیریم، می‌توان نامعادلهٔ (۱) را چنین نوشت:

$$t+\frac{۱}{t}\geqslant ۲ \implies \frac{(t-۱)^۲}{t}\geqslant ۰ \qquad (۲)$$

جواب‌های نامعادلهٔ (۲) عبارتند از $t>۰$. بنابراین، نامعادلهٔ مفروض، در حوزهٔ تعریف خودبه‌صورت $log_۷ x>۰$ درمی‌آید که به‌معنای $x>۱$ است.

پاسخ : $x>۱$.

گروه‌های دوم تا ششم

گروه دوم. ۱. $(n\in Z)x=n\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ؛ ۲. $\frac{۲۴۳}{۲}$ ؛

۳. ۲ ؛ ۴. $arc\,cos\left(\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\right)$ ، $\pi-۲arc\,cos\left(\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\right)$ ؛

۵. $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱۱۲۱}{۱۷۰}}$ ؛ ۶. $b<۰$ ؛ ۷. $x>۱$.

گروه سوم. ۱. $(n\in Z)x=n\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ؛ ۲. $\frac{۳۴۳}{۳}$ ؛

۳. ۴ ؛ ۴. $arc\,sin\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\pi-arc\,sin\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ؛

۵. $\frac{۶}{\sqrt{۱۷۰}}$ ؛ ۶. $c<۷۰$ ؛ ۷. $x>۱$.

گروه چهارم. ۱. $(n\in Z)x=n\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ؛ ۲. $\frac{۲۴۳}{۲}$ ؛

۳. ۳ ؛ ۴. $arccos\left(\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right)$ ، $\pi-۲arccos\left(\frac{۱}{۲}\mp\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right)$ ؛

۵. $\sqrt{\frac{۵۵۱}{۸۵۰}}$ ؛ ۶. $a>-۳$ ؛ ۷. $x>۱$.

گروه پنجم. ۱. $(n\in Z)x=n\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ؛ ۲. $\frac{۵۱۲}{۳}$ ؛

۳. $\frac{۳۹}{۴}$ ؛ $\frac{۱۵}{۸}$ ؛ ۴. $\frac{\pi}{۶}$ ، $\frac{۵\pi}{۶}$ ؛ ۵. $\frac{۳}{\sqrt{۱۷۰}}$ ؛

۶. $b<-\frac{۲}{۳}$ ؛ ۷. $x>۱$.

گروه ششم. ۱. $(n\in Z)x=n\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ؛ ۲. $\frac{۲۴۳}{۲}$ ؛

۳. ۴ ؛ ۴. $arccos\left(\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)$ ، $\pi-۲arccos\left(\frac{۱}{۲}\pm\frac{۱}{\sqrt{۶}}\right)$ ؛

۵. $\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱۳۷۹}{۸۵}}$ ؛ ۶. $c>\frac{۲۳}{۲}$ ؛ ۷. $x>۱$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. سمت چپ معادله را تبدیل می کنیم:

$$۲\sin x+۳\sin ۲x=۲\sin x+۶\sin x\cos x=۲\sin x(۱+۳\cos x)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ معادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$\sin x=۰,\quad \cos x=-\frac{۱}{۳}$$

پاسخ: $x=n\pi$ ، $x=۲k\pi\pm arccos\left(-\frac{۱}{۳}\right)$ $(n ، k\in Z)$.

۲. چون مبیّن سه جمله‌ای درجه دوم $۲x^۲-x+۲$ منفی است $(\Delta=-۱۵)$،

بنابراین، با برابری $2x^2-x+2>0$ برای همهٔ مقدارهای x برقرار است و این، به‌معنای آن است که حوزهٔ تعریف تابع $y(x)=\sqrt{2x^2-x+2}$ برمجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی منطبق است. مشتق $y'(x)$ را محاسبه‌می کنیم:

$$y'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}}\cdot(2x^2-x+2)'=$$

$$=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$

چون تابع در هرنقطهٔ از محور عددی مشتق پذیر است، بنابراین، نقطه‌های اکسترمم آن، بین جواب‌های معادلهٔ $y'(x)=0$ قرار دارد.

معادلهٔ $\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}=0$ ، تنها یك جواب دارد : $x=\frac{1}{4}$.

ثابت می کنیم که $x=\frac{1}{4}$ ، در واقع، نقطهٔ اکسترمم تابع است. در مجموعهٔ $x<\frac{1}{4}$ داریم:

$$\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}<0 \Rightarrow y'(x)<0$$

و درمجموعهٔ $x>\frac{1}{4}$

$$\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}>0 \Rightarrow y'(x)>0$$

ضمناً، تابع $y(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{1}{4}$ پیوسته است و ، بنابراین، $x=\frac{1}{4}$ نقطهٔ می‌نیمم تابع است. مقدار تابع دراین نقطه برابر است با $\sqrt{\frac{15}{8}}$.

می‌توانستیم، از یکنوابودن تابع $\sqrt{x}$ نتیجه بگیریم که نقطه‌های اکسترمم تابع $y(x)$، برنقطه‌های نظیرخود درتابع $f(x)=2x^2-x+2$ منطبق است و، بنابراین،کافی بود، برای پیداکردن طول نقطه‌های اکسترمم، تابع $f(x)$ را مورد بررسی قرار دهیم.

پاسخ : تابع دارای یك اکسترمم منحصر به‌فرد است (می‌نیمم) :

$$y=\sqrt{\frac{۱۵}{۸}}\ ،\ x=\frac{۱}{۴}$$

۳. ازفرض‌مساله معلوم‌است که بردار $\overrightarrow{AB}$ دارای مختصات (۶ ، ۴ ، ۳) است. چون صفحهٔ مجهول ، براین بردار عمود است، معادلهٔ آن را می‌توان به این صورت نوشت:

$$۳x+۴y+۶z+d=۰$$

و چون این صفحه از نقطهٔ A می‌گذرد، باید مختصات آن دراین معادله‌صدق کندکه، از آن‌جا، بدست می‌آید: $d=-۲۹$.

پاسخ : $۳x+۴y+۶z-۲۹=۰$.

۴. معادله مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$۳x-۸=۳^{۲-x}$$

که اگر دو طرف آن را در ۳^x ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۳^{۲x}-۸\times۳^x-۹=۰ \Longrightarrow ۳^x=-۱\ ،\ ۳^x=۹$$

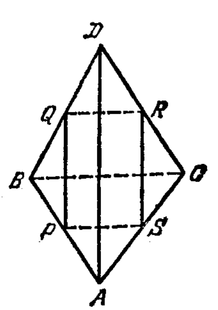
معادلهٔ $۳^x=-۱$ جواب ندارد و جواب منحصر به‌فرد معادلهٔ $۳^x=۹$ عبارت است از $x=۲$.

پاسخ : $x=۲$.

۵. P ، Q ، R و S را به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد صفحهٔ α با خطهای راست AB ، BD ، CD و AC می‌گیریم (شکل ۵۷). چون $AD\|\alpha$ و $BC\|\alpha$، بنابراین

$$PQ\|AD\|RS، \qquad QR\|BC\|PS \qquad (۳)$$

و این، به‌معنای آن است که چهارضلعی PQRS متوازی‌اضلاع است. چون هرم منتظم است، تصویر AD برصفحهٔ ABC ازراس A ومرکزمثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گذرد، یعنی بر BC عمود است. در نتیجه، بنا بر قضیهٔ سه عمود، یال‌های AD و BC برهم عمودند. اکنون از (۳) نتیجه می‌شود که PQRS مستطیل است. $|AP|$ را x می‌نامیم و مساحت $S(x)$ مستطیل مقطع PQSR را برحسب x محاسبه



شکل ۵۷

می کنیم. از تشابه مثلث‌های PBQ و ABD نتیجه می‌شود: $\frac{|PQ|}{|AD|}=\frac{|BP|}{|AB|}$ یا $\frac{|PQ|}{b}=\frac{a-x}{a}$. به این ترتیب: $|PQ|=\frac{b}{a}(a-x)$. بنابرفرض، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. از توازی خطهای راست PS و BC نتیجه می‌شود که مثلث APS هم متساوی‌الاضلاع است، یعنی

$$|PS|=|AP|=x$$

بنابراین

$$S(x)=|PQ|.|PS|=\frac{b}{a}(a-x).x=\frac{b}{a}(ax-x^۲) \quad (۴)$$

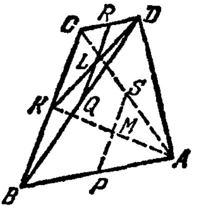
برای این‌که مقطع با حداکثر مساحت را پیدا کنیم، باید روی بازهٔ $[\circ , a]$ نقطه‌ای را به‌دست آوریم که، در آن‌جا، تابع $S(x)$ حداکثر مقدار ممکن شود. مشتق $S'(x)=\frac{b}{a}(a-۲x)$، در نقطهٔ $x=\frac{a}{۲}$ برابر صفر می‌شود؛ یعنی $S(x)$، یا در نقطه $\frac{a}{۲}$ ویادریکی از دو انتهای بازهٔ $[\circ,a]$، به‌حداکثر ممکن مقدار خود می‌رسد. وچون داریم:

$$S(\circ)=S(a)=\circ, \qquad S\left(\frac{a}{۲}\right)=\frac{b}{a}.\frac{a^۲}{۴}=\frac{ab}{۴}$$

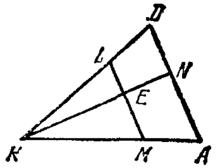
بنابراین، مساحت مقطع به‌ازای $x=\frac{a}{۲}$، یعنی وقتی که صفحهٔ α از وسط پاره خط AB عبور کند، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد.

اکنون، فاصلهٔ یال AD ازصفحهٔ α را محاسبه می کنیم، بااین شرط که $|AP|=x$، عددی از فاصلهٔ $\circ \leqslant x \leqslant a$ باشد. وسط پاره‌خط BC را K و نقطه‌های برخورد پاره خطهای KD و QR، KA و PS را، به ترتیب، L و M می گیریم (شکل ۵۸). چون خط‌راست LM فصل مشترك صفحه‌های α و AKD و، ضمناً، α موازی AD است، بنابراین، خطهای راست LM و AD موازی‌اند. خطهای راست KA و KD بر BC عمودند (در مثلث متساوی‌الساقین، میانه برقاعده عمود است). با توجه به معیار عمودبودن خط برصفحه، خط راست BC برصفحهٔ AKD عمود است. ولی $PS||BC$،

بنابراین خط راست PS و در نتیجه، صفحهٔ α برصفحهٔ AKD عمود است. این، به‌معنای آن است که تصویر AD برصفحهٔ α برخط راست LM منطبق



شکل ۵۸



شکل ۵۹

است و فاصلهٔ AD از صفحهٔ α (که آن را یال نشان می‌دهیم)، برابر است با فاصلهٔ بین خط‌های راست موازی AD و LM. این فاصله‌را، برحسب x، محاسبه می‌کنیم. بـرای سادگی کار، مقطع AKD هـرم را روی شکل ۵۹ نشان‌داده‌ایم. KN را ارتفاع‌مثلث AKD و E را نقطهٔ‌برخورد KN وLM می گیریم. دراین صورت، $d=|NE|$. ازتشابه‌مثلث‌های ANK و MEK نتیجه می‌شود

$$\frac{|NE|}{|NK|}=\frac{|AM|}{|AK|}$$

و از تشابه مثلث‌های APM و ABK (شکل ۵۸)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{|AM|}{|AK|}=\frac{|AP|}{|AB|}=\frac{x}{a}$$

ازاین دوبرابری به‌دست می‌آید: $d=\frac{x}{a}|NK|$. حالا $|NK|$ را محاسبه می‌کنیم، از مثلث متساوی‌الساقین BDC به‌دست می‌آید.

$$|DK|=\sqrt{|BD|^۲-|BK|^۲}=\sqrt{b^۲-\frac{a^۲}{۴}}$$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است:

$$|AK|=|AB|.\frac{\sqrt{۳}}{۲}=a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بااستفاده از قضیهٔ‌کسینوس‌ها، درمثلث ADK ، به‌دست می‌آید:

$$b^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2b\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\hat{A}$$

از آن جا $\cos\hat{A} = \frac{a}{b\sqrt{3}}$، ولی در این صورت $\sin\hat{A} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2b^2}}$ و

$$|NK| = |\hat{A}K|\sin A = a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$$

بنابراین

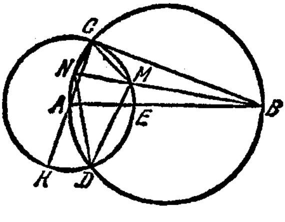
$$d = \frac{x}{a}\cdot\frac{a}{2b}\cdot\sqrt{3b^2 - a^2} = \frac{x}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$$

که اگر برای x_1 ، مقدارش $\frac{a}{2}$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$d_{max} = \frac{a}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$$

پاسخ: $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$

۶. روی شکل ۶۰ ، ترکیب مساله، با توجه به‌شرط‌های آن رسم شده است. ثابت می‌کنیم دو مثلث CNM و DNM متشابه‌اند. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم:



شکل ۶۰

$\widehat{CNM} = \widehat{DNM}$ و

$\widehat{CMN} = \widehat{NDM}$

چون AB قطر است، بنابراین، مثلث‌های ACB و ADB قائم‌الزاویه‌اند. آن‌ها در وتر AB مشترك‌اند. ویك ضلع برابر دارند (AC و AD ، شعاع‌های دایرهٔ به‌مرکز A هستند). بنابراین: $|BC| = |BD|$. زاویه‌های CNB و DNB، محاطی وروبه‌روی به‌کمان‌های برابرند، یعنی: $\widehat{CNB} = \widehat{DNB}$ و یا $\widehat{CNM} = \widehat{DNM}$. زاویهٔ CMN، زاویهٔ خارجی مثلث CMB است، بنابراین

$$\widehat{CMN} = \widehat{BCM} + \widehat{MBC}$$

زاویه‌هـای NBC و CDN ، زاویه‌های محاطی رو به رو به یک کمان‌اند، یعنی $\widehat{MBC}=\widehat{NBC}=\widehat{CDN}$. نقطهٔ برخـورد خط راست CA را بـا دایرهٔ دوم K می‌گیریم. در این صورت $AC\perp BC$ و $KM\perp CM$ (CK قطر دایرهٔ دوم است). از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$\widehat{BCM}=\widehat{CKM}=\widehat{CDM}$$

(دوزاویهٔ آخر، در دایرهٔ دوم محاطی و روبه‌روی کمان CM هستند). به‌این ترتیب

$$\widehat{CMN}=\widehat{BCM}+\widehat{MBC}=\widehat{CDM}+\widehat{CDN}=\widehat{NDM}$$

و در همین جا ، تشابه دو مثلث CNM و DNM ثابت می‌شود. از تشابه نتیجه می گیریم:

$$\frac{|MN|}{|ND|}=\frac{|CN|}{|MN|}$$

از آن‌جا

$$|MN|^{۲}=|CN|.|ND|=ab \ , \ |MN|=\sqrt{ab}$$

پاسخ : $|MN|=\sqrt{ab}$.

۷. وزن فلزی راکه از ۲۴ تن سنگ معدن به‌دست می‌آید، x می گیریم. درآن ۴٪ مخلوط و ۹۶٪ فلز خـالص است. بنابراین، مقدار فلز خالص آن برابر $۰/۹۶x$ تن خواهد بود و این مقدار باید با ۶۰٪ سنگ معدن، یعنی ۲۴ تن برابر باشد.

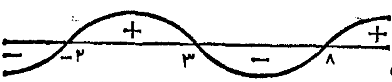
$$۰/۹۶x=۰/۶\times ۲۴ \Longrightarrow x=۱۵$$

پاسخ: ۱۵.

۸. اگر همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ ببریم، بعد ازیکی کردن مخرج‌ها وتبدیل‌های ساده، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x-۸}{(x+۲)(x-۳)}<۰ \qquad (۶)$$

که با نامعادلهٔ اصلـی هم ارز است. جواب‌های این‌نامعادله را هم، می‌توان باروش فاصله‌ها (شکل ۶۱) پیدا کرد.



شکل ۶۱

پاسخ: $x<-2$ ، $3<x<\infty$

گروه‌های دوم تا ششم

گروه دوم. ۱. $n=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n\in Z)$ ، $x=2k\pi\pm\arccos\frac{3}{4}$ $(k\in Z)$ ؛

۲. $y_{min}=y\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{e}$ ؛ ۳. $\arccos\frac{5}{6}$ ؛ ۴. $x=0$ ؛

۵. $\frac{\sqrt{3a}}{8b}\sqrt{4b^2-3a^2}$ ؛ ۶. $\frac{m^2}{n}$ ؛ ۷. ٪۵ ؛

۸. $x>1$ ، $-3<x<0$.

گروه سوم. ۱. $n=n\pi+\frac{\pi}{2}$ ،

$x=k\pi+(-1)^k\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ $(n , k\in Z)$ ؛

۲. $y_{min}=y\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ؛ ۳. $2x-2y-z+9=0$ ؛

۴. $x=3$ ؛ ۵. $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$ ؛ ۶. $\sqrt{ab}$ ؛

۷. ۷ کیلوگرم ؛ ۸. $x<-3$ ، $-\frac{4}{7}<x<2$.

گروه چهارم. ۱. $x=n\pi$ ، $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ $(n,k\in Z)$ ؛

۲. $y_{max}=y\left(\frac{1}{5}\right)=1+\frac{2}{5e}$ ؛ ۳. $\arccos\frac{5}{14}$ ؛ ۴. $x=0$ ؛

۵. $\frac{\sqrt{3n}}{8m}\cdot\sqrt{4m^2-3n^2}$ ؛ ۶. $\frac{m^2}{n}$ ؛ ۷. ٪۵۳ ؛

۸. $x<-3$ ، $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$.

گروه پنجم. ۱. $x=n\pi$ ، $x=2k\pi\pm\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$ $(n , k\in Z)$ ؛

۲. $y_{min}=y\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{15}{8}}$ ؛ ۳. $x-y+4z+11=0$

۴. $x=1$ ؛ ۵. $\frac{n}{4m}\sqrt{3m^2-n^2}$ ؛ ۶. $\sqrt{ab}$ ؛

۷. ۱۹۰ کیلوگرم ؛ ۸. $x<-2$ ، $-\frac{1}{2}<x<2$.

گروه ششم. ۱. $x=n\pi$ ، $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ $(n,k\in Z)$؛

۲. $y_{min}=y\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3}{2e}$ ؛ ۳. $\arccos\frac{5}{11}$ ؛

۴. $x=0$ ؛ ۵. $\frac{\sqrt{3n}}{8m}\cdot\sqrt{4m^2-3n^2}$ ؛ ۶. $\frac{m^2}{n}$ ؛

۷. ٪۹۰ ؛ ۸. $-5<x<-\frac{7}{8}$ ، $x>\frac{1}{2}$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. با استفاده از رابطهٔ تبدیل به کسینوس نصف کمان، معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\Longrightarrow\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

درنتیجه، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر است:

$$\cos\frac{x}{2}=0 \quad \text{و} \quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$

که با حل آن‌ها، به‌رشته جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$x=(2n+1)\pi,\quad x=4k\pi+\frac{2\pi}{3},\quad x=4m\pi-\frac{2\pi}{3}$$
$$(n, k, m\in Z)$$

۲. از نمایش مختصاتی حاصل‌ضرب اسکالر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و ، همچنین ، از رابطهٔ $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = ۶\times۵+(-۲)\times۰+(-۳)\times۰=۳۰,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{۶^۲+(-۲)^۲+(-۳)^۲}=۷, \ |\vec{b}|=۵$$

بنابراین $۳۰ = ۷\times۵\times\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$، از آن جا $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{۶}{۷}$. چون، مقدار زاویهٔ بین دو بردار، به بازهٔ $[۰, \pi]$ تعلق دارد ، به دست می‌آید:

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \arccos\frac{۶}{۷}.$$

پاسخ : $\arccos\frac{۶}{۷}$.

۳. از معادلهٔ دوم داریم: $y = ۲ + x$ ؛ $۲ + x$ را به جای y در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم ، به‌این معادله می‌رسیم:

$$۳^x \cdot ۲^{۲+x} = ۳^{-۲} \Longrightarrow ۶^x = ۶^{-۲}$$

ازاین جا روشن است‌که به‌جواب منحصر به‌فرد $x = -۲$ می‌رسیم و ، در نتیجه ، $y = ۰$. به‌سادگی قابل تحقیق است‌که این جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

پاسخ: $(-۲, ۰)$.

۴. نقطه‌هایی از نمودار تابع $y(x) = \frac{x+۱}{x-۳}$ را پیدا می‌کنیم که مماس در آن‌ها ، برنمودار تابع ، با محور Ox زاویه‌ای برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ بسازد. طول این نقطه‌ها ، از حل معادلهٔ $y'(x) = tg\frac{۳\pi}{۴}$ به دست می‌آید. داریم:

$$y'(x) = -\frac{۴}{(x-۳)^۲}, \ tg\frac{۳\pi}{۴} = -۱$$

و از آن جا

$$-\frac{۴}{(x-۳)^۲}=-۱ \Longrightarrow x_۱=۵ \text{ , } x_۲=۱$$

چون مختصات نقطه‌های تماس باید درمعادلهٔ تابع صدق کنند:

$$y_۱=y(x_۱)=\frac{۵+۱}{۵-۳}=۳ \text{ ، } y_۲=y(x_۲)=\frac{۱+۱}{۱-۳}=-۱$$

و اکنون دیگر می‌توان ، معادلهٔ خط‌های مماس را نوشت:

$$y=-x+۸ \text{ ، } y=-x$$

چون‌معادلهٔ محور Ox عبارت است از $y=۰$، بنابراین، نقطه‌های برخورد مماس‌ها با محور Ox ، از مجموعهٔ دستگاه‌های زیر به دست می‌آید:

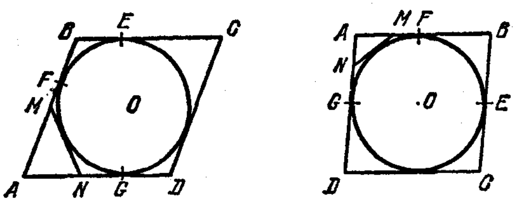
$$\begin{cases}y=-x+۸\\ y=۰\end{cases} \text{ و } \begin{cases}y=-x\\ y=۰\end{cases}$$

یعنی خط راست اول در نقطهٔ $(۸ \text{ ، } ۰)$ و خط راست دوم درنقطهٔ $(۰ \text{ ، } ۰)$ ، محور Ox را قطع می‌کنند.

پاسخ: $(۸ \text{ ، } ۰)$ ، $(۰ \text{ ، } ۰)$.

۵. $|AM|$ را x و $|AN|$ را y مـی‌گیریم. در مثلث AMN ، از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم (شکل ۶۲):

$$۴a^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos\alpha$$



شکل ۶۲

مرکز دایره را O و نقطه‌های تماس دایره را با ضلع‌های AB ، BC و AD ، بـه ترتیب ، E و F و G می‌نامیم. چون ، شعاعی کـه از نقطهٔ تماس بگذرد بـرخط مماس عمود است ، پس $OE \perp BC$ و $OG \perp AD$ ، ولی $AD \| BC$ ، بنابراین $OG \perp BC$. از نقطـهٔ O تنها یك عمود بـرخط BC می‌توان رسم کرد ؛ در نتیجه ، خط‌های راست OE و OG برهم منطبق‌اند، یعنی نقطه‌های E ، O و G روی یك خط راست قراردارند. خط‌های‌راست

EG و AD برهم عمودند، بنابراین

$$|EG|=|AB|\sin\alpha=l\sin\alpha\ ;\ |OE|=|OF|=|OG|=\frac{1}{2}l\sin\alpha$$

نقطهٔ A، روی نیمساز زاویهٔ BAD قرار دارد، بنابراین

$$|AG|=|AF|=\frac{|OF|}{tg\frac{\alpha}{2}}=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=l\cos^2\frac{\alpha}{2}=l\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

پاره خط‌های مماس بر دایره، که از یك نقطه گذشته باشند، با هم برابرند، یعنی

$$2a=|MN|=|MF|+|NG|=|AF|-x+|AG|-y=$$
$$=l(1+\cos a)-x-y$$

به‌این ترتیب، x ، y ، در دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2xy\cos\alpha=4a^2\\ x+y=l(1+\cos\alpha)-2a\end{cases}$$

اگر در معادلهٔ اول، به‌جای x^2+y^2 قرار دهیم: $(x+y)^2-2xy$ و سپس، به‌جای $x+y$ از معادلهٔ دوم استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$-2xy(1+\cos\alpha)=-l^2(1+\cos\alpha)^2+4al(1+\cos a)$$

و چون $\alpha\neq\pi$ ، می‌توان این معادله را به $1+\cos\alpha$ ساده‌کرد. سرانجام، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}x+y=l(1+\cos\alpha)-2a\\ \\ xy=\frac{1}{2}l^2(1+\cos\alpha)-2al\end{cases}$$

یعنی x و y عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ زیر:

$$t^2+[2a-l(1+\cos\alpha)]t+\frac{1}{2}l^2(1+\cos\alpha)-2al=0$$

که با حل آن بدست می‌آید:

$$t_{1,2}=\frac{1}{2}[l(1+\cos\alpha)-2a\pm\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}]$$

چون پاره‌خطهای مجهول BM و ND برابرند با $x-l$ و $y-l$ ، با به حساب آوردن $x \geqslant y$، جواب مسأله به‌دست می‌آید. یادآوری می‌کنیم که در شکل ۶۲ ، سمت چپ ، مقدار زاویهٔ BAD از $\frac{\pi}{2}$ کوچکتر است. ولی در راه‌حل بالا ، ازاین مطلب استفاده نکردیم. راه‌حلی که ارائه دادیم، برای همهٔ حالت‌های $0<\alpha<\pi$ درست است:

پاسخ:

$$|ND|=\frac{1}{2}[l(1-\cos\alpha)+2a+\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}]$$

$$|MB|=\frac{1}{2}[l(1-\cos\alpha)+2a-\sqrt{4a^2+4al(1-\cos\alpha)-l^2\sin^2\alpha}]$$

۶. نقطه‌های تماس کره را با خطهای راستی که از نقطه‌های A و C می‌گذرند، به‌ترتیب ، A_1 و C_1 می‌گیریم. تصویرهای قائم نقطه‌های A_1 و C_1 را برصفحهٔ P ، به‌ترتیب، A_2 و C_2 فرض می‌کنیم. (شکل ۶۳). چون پاره‌خطهای مماسی که از یك نقطه برکره رسم شوند ، باهم برابرند ، بنابراین

$$|AA_1|=|AB|=l ,\ |CC_1|=|CB|=l$$

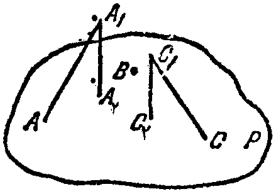
از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AA_1A_2 و CC_1C_2 به‌دست می‌آید:

$$|A_1A_2|=l\sin\alpha ,\ |C_1C_2|=l\sin\alpha$$

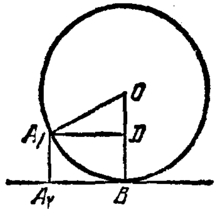
و در نتیجه: $|A_1A_2|=|C_1C_2|$. چون $A_1A_2\perp P$ و $C_1C_2\perp P$، پس $A_1A_2\|C_1C_2$ ، یعنی چهارضلعی $A_1A_2C_2C_1$ متوازی‌الاضلاع و حتی مستطیل است ، زیرا $C_1C_2\perp A_2C_2$. از همین مثلث‌های قائم‌الزاویه به دست می‌آید:

$$|AA_2|=l\cos\alpha ,\ |CC_2|=l\cos\alpha$$

مرکز کره را O می‌گیریم. چون خطهای راست A_1A_2 و OB برصفحهٔ P عمودند (OB ، شعاع وارد به‌نقطهٔ تماس است)، بنابراین $A_1A_2\|OB$، یعنی نقطه‌های A_1 ، A_2 ، O و B روی یك صفحه واقع‌اند. روی شکل ، مقطع این صفحه را با کره و صفحهٔ P ، به‌طور جداگانه ، نشان می‌دهیم (شکل ۶۴).اگر پای عمود وارد ازنقطهٔ A_1 برخط راست OB را D فرض کنیم ، آن وقت



شکل ۶۳



شکل ۶۴

$$|A_2B| = |A_1D| = \sqrt{|A_1O|^2 - |OD|^2} = \sqrt{r_2 - (|OB| - A_1A_2|)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 - (r - l\sin\alpha)^2} = \sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}$$

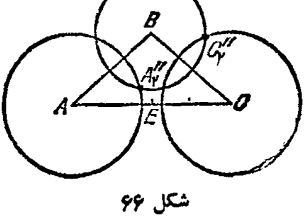
به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$|C_2B| = \sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}$$

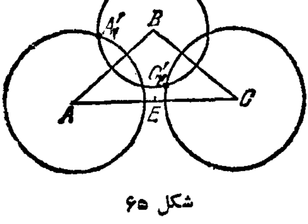
یعنی نقطه‌های A_2 و C_2 روی محیط دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt{2rl\sin\alpha - l^2\sin^2\alpha}$ و به‌مرکز B قرار دارند.

قبلاً هم ثابت کردیم که نقطهٔ A_2، ضمناً، روی محیط دایرهٔ به‌شعاع $l\cos\alpha$ و به مرکز A و نقطهٔ C_2 روی محیط دایرهٔ به شعاع $l\cos\alpha$ و به مرکز C قرار دارد. این سه دایره را، ازاین به‌بعد، به‌نام مرکزهای آن ــ دایرهٔ B، دایرهٔ A و دایرهٔ C ــ می‌نامیم.

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، ارتفاع BE، که از راس B برضلع AC فرودآمده است، ازوسط ضلع AC می‌گذرد. دایرهٔ B، نسبت به‌خط‌راست BE متقارن است؛ همچنین، دایره‌های A و C هم، نسبت به همین خط راست متقارن یکدیگرند. از این جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ B و A، نسبت به BE، قرینهٔ نقطه‌های برخورد دودایرهٔ B و C هستند.



شکل ۶۶



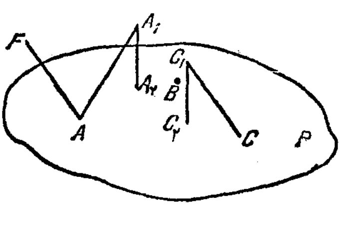
شکل ۶۵

A_2 و C_2 را ، نسبت به‌خط راست BE ، قرینهٔ یکدیگر می گیریم. در این صورت ، خواهیم داشت: $A_2C_2 \perp BE$ ، یعنی $A_2C_2 \| AC$ چون $A_1A_2C_2C_1$ مستطیل است ، بنابراین $A_1C_1 \| A_2C_2$ ؛ و در نتیجه $AC \| A_1C_1$. ولی دراین صورت ، خطهای‌راست AA_1 و CC_1 ، دریك صفحه قرار می‌گیرند که با فرض مسأله متناقض است.

به این ترتیب ، A_2 و C_2 نسبت به خط راست BE ، قرینهٔ یکدیگر نیستند. روی شکل‌های ۶۵ و ۶۶ ، دوحالت ممکن ، برای وضع قرارگرفتن A_2 و C_2 ، نشان داده شده است. ضمناً ، روی این شکل‌ها ، نقطه‌های A_2 و C_2 را ، به‌ترتیب ، $A'_2A''_2$ و $C'_2C''_2$ نامیده‌ایم.

ثابت می کنیم ، فاصلهٔ بین خطهای راست AA_1 و CC_1. در این دو حالت یکی است. صفحهٔ OBE برصفحهٔ P عمود است. از آن چه قبلاً دیدیم ، نتیجه می‌شود که نقطه‌های A و C ، A'_2 و C''_2 ، A''_2 و C'_2 نسبت به صفحهٔ OBE قرینهٔ یکدیگرند. A'_1 ، A''_1 ، C'_1 ، C''_1 ، را ، نقطه‌های متناظر A_1 و C_1 ، در حالت‌هایی می گیریم که روی شکل‌های ۶۵ و ۶۶ نشان داده شده است. چون $A'_1A'_2 \| OBE$ ، $A'_1A'_2 \| C''_2C''_1$ ، $|C''_2C''_1| = |A'_1A'_2|$ ونقطه‌های A'_2 و C''_2 نسبت به‌صفحهٔ OBEمتقارن‌اند، بنابراین نقطه‌های A'_1 و C''_1 هم ، نسبت به همین صفحه ، قرینه یکدیگرند. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که دونقطهٔ A''_1 و C'_1 هم، نسبت به‌صفحهٔ OBE قرینهٔ یکدیگرند. واین به‌معنای‌آن است‌که خطهای راست AA'_1 و CC''_1، AA''_1 و CC'_1 ، نسبت به‌صفحهٔ OBE، قرینهٔ یکدیگر می‌شوند. ولی دراین صورت ، فاصلهٔ AA'_1 و CC'_1 ، برابر فاصلهٔ بین خطهای راست CC''_1 و AA''_1 است. از این به‌بعد ، برای مشخص‌بودن وضع ، نقطه‌های A_2 و C_2 را ، دروضع A'_2 و C'_2 می گیریم (شکل ۶۵).

از نقطهٔ A ، خط راستی موازی خط راست CC_1 رسم و نقطهٔ F را روی آن طوری انتخاب می کنیم که پاره‌خطهای AF و CC_1 هم‌جهت و برابرباشند(شکل۶۷). صفحهٔ AA_1F با خط راست CC_1 موازی است (زیرا $AF \| CC_1$). بنابراین ، فاصلهٔ بین خطهای راست AA_1 و CC_1 ، برابر است با فاصلهٔ بین خط راست CC_1 و صفحهٔ AA_1F یا فاصلهٔ بین نقطهٔ C_1 با صفحهٔ AA_1F. این فاصله



شکل ۶۷

را h_{C_1} می‌نامیم. اگر h_A، فاصلهٔ بین نقطهٔ A تا صفحهٔ FA_1C_1 باشد، در آن صورت، برای $V_{AA_1C_1F}$ ــ حجم هرم AA_1C_1F ــ دو عبارت به‌دست می‌آید:

$$V_{AA_1C_1F}=\frac{1}{3}h_{C_1}S_{AA_1F}=\frac{1}{3}h_AS_{FA_1C_1}$$

که در آن S_{AA_1F} و $S_{FA_1C_1}$، مساحت مثلث‌های نظیرند. از برابری اخیر، به‌دست می‌آید:

$$h_{C_1}=h_A\frac{S_{FA_1C_1}}{S_{AA_1F}} \qquad (1)$$

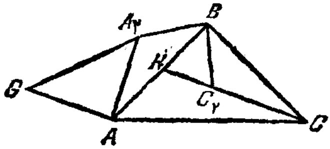
باید h_A، $S_{FA_1C_1}$ و S_{AA_1F} را پیدا کنیم. چهارضلعی ACC_1F متوازی‌الاضلاع است ($AF\|CC_1$ و $|AF|=|CC_1|$). بنابراین $CA\|C_1F$. قبلاً ثابت کردیم: $A_2C_2\|A_1C_1$. بنا برمعیار توازی دو صفحه (قبلاً دیدیم که خط‌های راست AC و A_2C_2 موازی نیستند) نتیجه می‌گیریم که دوصفحهٔ ABC و FA_1C_1 موازی‌اند. دراین صورت

$$h_A=|A_1A_2|=l\sin\alpha \qquad (2)$$

حالا مساحت مثلث FAA_1 را پیدا می‌کنیم. چون مثلث FAA_1 متساوی‌الساقین است، بنابراین

$$S_{FAA_1}=\frac{1}{2}|FA_1|\cdot\sqrt{|AA_1|^2-\frac{1}{4}|FA_1|^2}$$

تصویر نقطهٔ F برصفحهٔ ABC را G می‌گیریم. چون $FG\|A_1A_2$ و $|FG|=|A_1A_2|$، چهارضلعی FGA_2A_1 متوازی‌الاضلاع است وداریم: $|FA_1|=|GA_2|$. صفحه‌های AFG و CC_1C_2 موازی‌اند ($AF\|CC_1$، $FG\|C_1C_2$). صفحهٔ ABC، آن‌ها را در خط‌های راست AG و CC_2 قطع می‌کند یعنی $AG\|CC_2$ (شکل ۶۸). درمثلث‌های AA_2B و CC_2B، ضلع‌های متناظر برابرند. یعنی



شکل ۶۸

$$\widehat{A_2AB}=\widehat{C_2CB}\,،\ \widehat{A_2BA}=\widehat{C_2BC} \qquad (3)$$

نقطهٔ برخورد خط‌های راست CC_2 و AB را k می‌گیریم. داریم:

$$\widehat{GAA_2}+\widehat{A_2AB}=\widehat{GAB}=\widehat{AKC} \qquad (۴)$$

برابری اخیر، از این جا ناشی می‌شود که $AG \| CC_2$. چون زاویهٔ AKC زاویهٔ خارجی مثلث KBC است، بنابراین

$$\widehat{AKC}=\widehat{ABC}+\widehat{C_2CB} \qquad (۵)$$

از برابری‌های (۴) و (۵) نتیجه می‌شود: $\widehat{GAA_2}=\widehat{ABC}$. ولی دراین صورت

$$|GA_2|=2|AA_2|\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{GAA_2}\right)=2|AA_2|\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{|AC|}{|AB|}=$$
$$=l\cos\alpha\cdot\frac{2a}{l}=2a\cos\alpha$$

و

$$S_{AA_1F}=a\cos\alpha\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha} \qquad (۶)$$

برای این $S_{FA_1C_1}$ را پیدا کنیم، توجه می کنیم که در مثلث‌های FA_1C_1 و GA_2G_2، ضلع‌های متناظر، برابرند، بنابراین $S_{FA_1C_1}=S_{GA_2C_2}$. با استفاده از برابری دوم (۳)، به‌دست می آید.

$$\widehat{A_2BC_2}=\widehat{A_2BA}+\widehat{ABC_2}=\widehat{C_2BC}+\widehat{ABC_2}=\widehat{ABC} \qquad (۷)$$

چون مثلث‌های A_2BC_2 و ABC متساوی‌الساقین‌اند، ازبرابری (۷) معلوم می‌شود که این دو مثلث متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{|A_2C_2|}{|AC|}=\frac{|A_2B|}{|AB|}$$

و در نتیجه

$$|A_2C_2|=\frac{|AC|\cdot|A_2B|}{|AB|}=\frac{2a}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-l^2\sin^2\alpha}$$

ارتفاع مثلث GA_2C_2 را h می گیریم (ارتفاعی که ازراس A_2 می گذرد). آن وقت

$$\sqrt{|GA_2|^2-h^2}+\sqrt{|A_2C_2|^2-h^2}=|GC_2|$$

یا

$$\sqrt{4a^2\cos^2\alpha-h^2}+\sqrt{\frac{8a^2r}{l}\sin\alpha-4a^2\sin^2\alpha-h^2}=2a$$

این معادله را ، می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt{\frac{8a^2r}{l}\sin\alpha-4a^2\sin^2\alpha-h^2}=2a-\sqrt{4a^2\sin^2\alpha-h^2} \qquad (8)$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۸) را مجذور کنیم ، بعداز تبدیل‌های لازم ، خواهیم داشت:

$$h=\frac{2a}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}$$

که از آن جا ، به‌دست می آید:

$$S_{GA_2C_2}=\frac{1}{2}|GC_2|h=\frac{2a^2}{l}\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha} \qquad (9)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۶) و (۹) ، خواهیم داشت:

$$h_{C_1}=l\sin\alpha\frac{2a^2\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}}{la\cos\alpha\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{2a\,tg\alpha\sqrt{2rl\sin\alpha-(r^2+l^2)\sin^2\alpha}}{\sqrt{l^2-a^2\cos^2\alpha}}$$

۷. جملهٔ اول تصاعد را a_1 و قدر نسبت آن را d می گیریم. a_7 ، یعنی جملهٔ هفتم ، برابر می‌شود با a_1+6d. در نتیجه

$$a_1+6d=21$$

مجموع هفت جملهٔ اول تصاعد حسابی، برابر $\frac{a_1+a_7}{2}\times 7$ است ، یعنی

$$\frac{a_1+21}{2}\times 7=105 \qquad (11)$$

از رابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آید: $a_1=9$ و سپس از رابطهٔ (۱۰): $d=2$.
پاسخ : جملهٔ اول تصاعد برابر ۹ و قدرنسبت آن برابر ۲ می باشد.

۸. ریشه‌های سه جمله‌ای درجه دوم x^2+x-2 عبارتند از $x_1=-2$ و $x_2=1$. بنابراین ، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول برای نامعادله ، عبارت

است از $x \leqslant -2$ و $x \geqslant 1$.

وقتی داشته باشیم $x \leqslant -2$، سمت چپ نامعادله غیرمنفی و سمت راست آن منفی است. یعنی، همهٔ مقدارهای x از مجموعهٔ $x \leqslant -2$، جواب معادلهٔ مفروض‌اند.

به‌ازای $x \geqslant 1$، دو طرف نامعادله غیرمنفی‌اند، بنابراین نامعادلهٔ مفروض، دراین حوزه، با نامعادلهٔ

$$x^2+x-2>x^2$$

هم‌ارز است؛ که با حل آن، به‌جواب $x>2$ می‌رسیم؛ که همهٔ آن‌ها به حوزهٔ $x \geqslant 1$ تعلق دارند.

پاسخ: $x \leqslant -2$ و $x>2$.

گروه‌های دوم تا ششم

گروه دوم. ۱. $x=4n\pi$ ، $x=4m\pi+(-1)^m\frac{2\pi}{3}$ $(n، m\in Z)$؛

۲. $\arc\cos\left(-\frac{4}{\sqrt{45}}\right)$؛ ۳. $x=-2$ ، $y=3$

۴. $(0 ، 47)$ ، $(0 ، 11)$ ، $\left(-\frac{47}{9}, 0\right)$ ، $\left(-\frac{11}{9}, 0\right)$؛

۵. $|PQ|=l\cos^2\frac{\beta}{2}-\frac{2s}{l\sin\beta}$؛ ۶. $\frac{2b\,tg\beta\sqrt{r^2-m^2\sin^2\beta}}{\sqrt{m^2-b^2\cos^2\beta}}$؛

۷. $q=8$ ، $S_5=14043$؛ ۸. $x \leqslant -4$ ، $x>0$.

گروه سوم. ۱. $x=12m\pi$ ، $x=6n\pi+3\pi$ $(m، n\in Z)$؛

۲. $\arc\cos\frac{3}{7}$؛ ۳. $x=-1$ ، $y=2$؛

۴. $(0 ، 21)$ ، $(0 ، 1)$؛ ۵. $\left(\frac{2r}{\sin\gamma}-m\right)\left(r-\frac{r^2}{m}tg\frac{\gamma}{2}\right)$؛

۶. $\frac{2d\,tg\gamma\sqrt{2r\,n\sin\gamma-(r^2+n^2)\sin^2\gamma}}{\sqrt{n^2-d^2\cos^2\gamma}}$؛ ۷. $a_{10}=61$؛

۸. $x \leqslant -1$ ، $x>3$.

گروه چهارم. ۱. $x=2n\pi$ ، $x=4k\pi+\pi$ $(n، k\in Z)$؛

۲. $\arc\cos\left(-\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\right)$؛ ۳. $x=-۱$ ، $y=۲$؛

۴. $(۰ , -۲)$ ، $(۰ , ۱۴)$ ، $\left(\frac{۱}{۲} , ۰\right)$ ، $\left(-\frac{۷}{۲} , ۰\right)$؛

۵. $|PS|=d_۱$ ، $|RT|=d_۲$ یا $|PS|=d_۲$ ، $|RT|=d_۱$ که در آن‌ها:

$$d_۱=b+tg\frac{\varphi}{۲}+\sqrt{b^۲+۲br\,tg\frac{\varphi}{۲}-r^۲}$$ و

$$d_۲=b+tg\frac{\varphi}{۲}-\sqrt{b^۲+۲br\,tg\frac{\varphi}{۲}-r^۲}$$؛

۶. $\frac{۲b\,tg\beta\sqrt{r^۲-l^۲\sin^۲\beta}}{\sqrt{l^۲-b^۲\cos^۲\beta}}$؛ ۷. $a_۱=۲۷$ ، $a_۶=\frac{۱}{۹}$؛

۸. $x\leqslant -۳$ ، $x>\frac{۳}{۲}$.

گروه پنجم. ۱. $x=۴n\pi+۲\pi$ ، $x=۲m\pi$ $(n , m\in Z)$؛

۲. $\arc\cos\frac{۲}{۷}$؛ ۳. $x=۱$ ، $y=-۱$؛

۴. $(۰ , ۰)$ ، $(۰ , ۱۲)$؛ ۵. $|AD|=r\,cotg\frac{\alpha}{۲}-\frac{S}{r}$؛

۶. $\frac{۲a\,tg\sqrt{۲r\,m\sin\alpha-(r^۲+m^۲)\sin^۲\alpha}}{\sqrt{m^۲-a^۲\cos^۲\alpha}}$؛

۷. $a_{۱۴}=۱۴۰$ ، $d=۱۰$؛ ۸. $x\leqslant -۲$ ، $x>\frac{۱۰}{۳}$.

گروه ششم. ۱. $x=۶n\pi$ ، $x=۱۲m\pi+۳\pi$ $(n , m\in Z)$؛

۲. $\arc\cos\left(-\frac{۲}{\sqrt{۴۵}}\right)$؛ ۳. $x=-۱$ ، $y=۲$؛

۴. $(۰ , ۱۲۸)$ ، $(۰ , ۲۸۸)$ ، $\left(-\frac{۱۲۸}{۲۵} , ۰\right)$؛

۵. $S=\frac{۱}{۲}l(l-n)\sin\beta\left(۱+\frac{l}{۲n}\sin\beta\,tg\frac{\beta}{۲}\right)$؛

۶. $\frac{۲d\,tg\gamma\sqrt{r^۲-n^۲\sin^۲\gamma}}{\sqrt{n^۲-d^۲\cos^۲\gamma}}$؛ ۷. $a_۱=۵$ ، $a_۷=۳۲۰$؛

۸. $x \leqslant -۴$ ، $x > \frac{۹}{۴}$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. با استفاده از رابطهٔ سینوس مجموع دو کمان ، معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$sin\left(x+\frac{\pi}{۸}\right)=\frac{۱}{۲}$$

از آن جا:

$$x+\frac{\pi}{۸}=۲n\pi+\frac{\pi}{۶} \text{ و } x+\frac{\pi}{۸}=۲m\pi+\frac{۵\pi}{۶}\,(n \text{ ، } m\in Z)$$

و یا

$$x=۲n\pi+\frac{\pi}{۲۴} \text{ ، } x=۲m\pi+\frac{۱۷\pi}{۲۴}\,(n \text{ ، } m\in Z)$$

از رشته جواب‌های اول $x_۱=\frac{\pi}{۲۴}$ ، و از رشته جواب‌های دوم $x_۲=\frac{۱۷\pi}{۲۴}$ و $x_۳=\frac{۱۸\pi}{۲۴}-۲\pi$ ، در بازهٔ $-\frac{۳\pi}{۲}\leqslant x\leqslant \pi$ قرار دارند.

پاسخ: $\frac{\pi}{۲۴}$ ، $\frac{۱۷\pi}{۲۴}$ ، $-\frac{۳۱\pi}{۲۴}$.

۲. چون نقطهٔ C برمحور Ox قرار دارد ، بنابراین ، مختص دوم و سوم آن برابرصفر است، یعنی مختصات نقطهٔ C عبارت است از: $x=a$ ، $y=۰$ ، $z=۰$. بنابر رابطهٔ مربوط به‌فاصلهٔ بین دونقطه داریم:

$$|AC|=\sqrt{(a-۱)^۲+(۰-۲)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{a^۲-۲a+۱۴} \text{ ،}$$
$$|BC|=\sqrt{(a-۲)^۲+(۰-۳)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{a^۲-۴a+۲۹} \text{ .}$$

و چون $|AC|=|BC|$ ، پس

$$\sqrt{a^۲-۲a+۱۴}=\sqrt{a^۲-۴a+۲۹}$$

دو طرف معادله ، به ازای همهٔ مقدارهای a ، معین و مثبت‌اند ، بنابراین ، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$a^{2}-2a+14=a^{2}-4a+29$$

که یك ریشهٔ منحصر دارد: $a=\frac{15}{2}$.

پاسخ: $\left(\frac{15}{2}, 0, 0\right)$

۳. چون $\log_{3}3x=\log_{3}x+1$ ، بنابراین ، معادلهٔ اصلی را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\log_{3}x-3\sqrt{\log_{3}x}+2=0 \qquad (1)$$

و چون معادلهٔ درجه دوم

$$t^{2}-3t+2=0$$

دارای دو ریشه $t_1=1$ و $t_2=2$ می‌باشد ، معادلهٔ (۱) ، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\sqrt{\log_{3}x}=1 \text{ و } \sqrt{\log_{3}x}=2$$

معادلهٔ اول، جواب منحصر $x_1=3$ ومعادلهٔ دوم، جواب منحصر $x_2=81$ را دارد.

پاسخ: $x_1=3$ ، $x_2=81$.

۴. برای هرمقدار x ازبازهٔ $-1\leqslant x\leqslant 2$ داریم: $|x|\leqslant 2$ و $x^{2}-4\leqslant 0$. بنابراین ، تابع مفروض ، دراین بازه ، به‌این صورت درمی‌آید:

$$f(x)=4-x^{2}$$

و نمودار آن ، یك سهمی است که شاخه‌هایش به‌طرف پایین امتداد دارند. شکل مورد نظر مسأله ، زیرسهمی $y=4-x^{2}$ و بالای محور Ox در فاصلهٔ $[-1, 2]$ قرار دارد. بنابراین، مساحت S ، به‌این ترتیب به‌دست می‌آید:

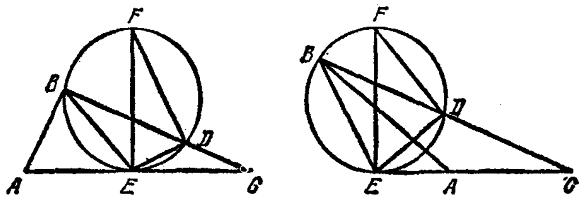
$$S=\int_{-1}^{2}(4-x^{2})dx=\left(4x-\frac{x^{3}}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=9$$

پاسخ: ۹ واحد مربع.

۵. شعاع دایره را R و نقطهٔ تماس آن را با خط راست AC ، E می‌گیریم.

عمود EF ،کــه از نقطهٔ تماس بـرخط مماس رسم می‌شود ، از مرکز دایره می‌گذرد و ، بنابراین ، قطری از دایره است: $|EF| = ۲R$. حالت‌هـای مختلفی وجـود دارد: نقطهٔ E می‌تواند بر پاره‌خط AC و یا برامتداد آن ، از طرف نقطهٔ A ، واقع شود (شکل ۶۹). ولی همان طور که خواهیم‌دید، استدلال ما بستگی به این نخواهد داشت که از کدام شکل استفاده می کنیم. مثلث FED دردایره محاط‌است وچون EF قطر است، این‌مثلث قائم‌الزاویه می‌شود. از مثلث EFD به‌دست می آید:

$$۲R = |EF| = \frac{|ED|}{sin\widehat{EFD}} \qquad (۲)$$



شکل ۶۹

چون $DF \perp ED$ و $EF \perp AC$ ، پس $\widehat{DEC} = \widehat{EFD}$ (ضلع‌های آن‌ها ، برهم عمودند). بنابراین

$$۲R = |ED| : sin\widehat{DEC}$$

اگر در مثلث EDC ، از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کنیم ، به‌دست می آید:

$$\frac{|CD|}{sin\widehat{DEC}} = \frac{|ED|}{sin\beta}$$

از این جا $sin\widehat{DEC}$ پیدا می‌شود که، اگر دررابطهٔ (۲) قرار دهیم؛ داریم:

$$۲R = \frac{|ED|^۲}{|CD| sin\beta} \qquad (۳)$$

مثلث‌هـای EDC و BEC ، در زاویهٔ C مشترك‌اند. بـه جز آن ، داریم : $\widehat{DEC} = \widehat{EFD} = \widehat{EBD}$ (برابری‌دو زاویهٔ آخر، به‌این مناسبت‌درست‌است کــه زاویه‌هــای EFD و EBD ، زاویه‌هایی محاطی و رو به روی به یك کمان‌اند). از برابری زاویه‌ها ، معلوم می‌شود که دو مثلث EDC و BEC متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{|EC|}{|BC|}=\frac{|CD|}{|EC|}$$

و از آن جا

$$|EC|=\sqrt{|BC|\cdot|CD|}=\sqrt{|BC|\cdot\frac{۱}{۴}|BC|}=\frac{|BC|}{۲}=۲|CD|$$

با استفاده ازقضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث EDC به‌دست می‌آید:

$$|ED|^۲=|EC|^۲+|CD|^۲-۲|EC|\cdot|CD|\cos\beta=(۵-۴\cos\beta)\cdot|CD|^۲$$

که اگر آن را در (۳) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$۲R=\frac{۵-۴\cos\beta}{\sin\beta}|CD|=\frac{۵-۴\cos\beta}{۴\sin\beta}|BC| \qquad (۴)$$

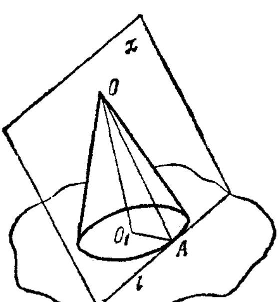
بالاخره ، با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AC|}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}$$

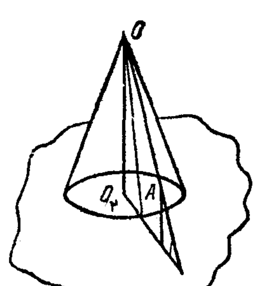
و از آن جا $|BC|=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}b$. اگر این مقدار $|BC|$ را در (۴) قرار دهیم ، به‌دست می‌آید:

$$R=\frac{۵-۴\cos\beta}{۸\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}b$$

۶. طول مولد هر یك از مخروط‌ها را a می گیریم: $|OA|=|OB|=a$. پای ارتفاع مخروط‌های با مولد OA و OB را ، به ترتیب ، $O_۱$ و $O_۲$ می‌نامیم. چون هرزاویهٔ مسطحهٔ کنج سه‌وجهی ، از مجموع دو زاویهٔ مسطحهٔ



شکل ۷۱



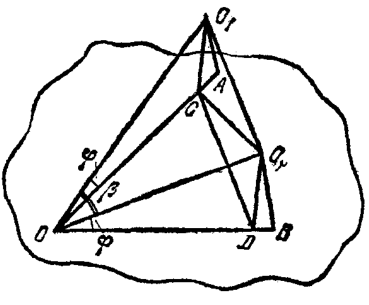
شکل ۷۰

آن کوچکتر است، برای کنج سه‌وجهی به‌رأس O و یال‌های OO_1 ، OO_2 و OA داریم:

$$\widehat{AOO_2}<\widehat{AOO_1}+\widehat{O_1OO_2}=\varphi+\beta<\frac{\pi}{2}$$

از این جا نتیجه می‌شود که زاویهٔ مجهول برابر است با $\frac{\pi}{2}-\widehat{AOO_2}$ (شکل ۷۰). صفحهٔ قاعدهٔ مخروط به‌مولد OA ، صفحهٔ α را درخط‌راستی مثل l قطع می‌کند (شکل ۷۱)، که دارای تنها یك نقطهٔ مشترك A با دایرهٔ قاعدهٔ مخروط است. بنابراین، پاره‌خط O_1A ـ شعاع قاعدهٔ مخروط ـ برخط راست l عمود است. به جز این، خط راست l ، بر OO_1 ، ارتفاع مخروط، عمود است (l ، برصفحهٔ قاعدهٔ مخروط قرار دارد). به‌این ترتیب، خط راست l ، برصفحهٔ OO_1A عمود است. و ازاین جا نتیجه می‌شود که صفحهٔ OO_1A برصفحهٔ α عمود است. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که صفحهٔ OO_2B هم، برصفحهٔ α عمود است.

از نقطه‌های O_1 و O_2 ، عمودهای O_1C و O_2D را برصفحهٔ α رسم می‌کنیم (شکل ۷۲). از آن چه ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که نقطهٔ C بر پاره‌خط AO و نقطهٔ D بر پاره‌خط BO قرار دارد. از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OO_2B و OO_2D به‌دست می‌آید:



شکل ۷۲

$$|OO_2|=|OB|\ \cos\varphi=a\cos\varphi ,$$
$$|O_2D|=|OO_2|\sin\varphi=a\sin\varphi\cos\varphi ,$$
$$|OD|=|OO_2|\cos\varphi=a\cos^2\varphi$$

به همین ترتیب ، از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OO_1A و OO_1C ، به دست می‌آید:

$$|OO_1| = a\cos\varphi, \quad |O_1C| = a\sin\varphi\cos\varphi, \quad |OC| = a\cos^2\varphi$$

پاره‌خطهای O_1C و O_2D، بر یک صفحه عمود و، بنابراین، باهم موازی‌اند. علاوه بر آن ، هم‌اکنون ثابت کردیم $|O_1C| = |O_2D|$، یعنی چهار ضلعی O_1CDO_2 متوازی‌الاضلاع است. ولی چون $O_1C \perp CD$ ، بنابراین O_1CDO_2 مستطیل است.

از مثلث متساوی‌الساقین O_1OO_2 ، به‌دست می‌آید:

$$|O_1O_2| = 2|OO_2|\sin\frac{\beta}{2} = 2a\cos\varphi\sin\frac{\beta}{2}$$

اگر در مثلث O_1CO_2 از قضیهٔ فیثاغورث استفاده کنیم:

$$|CO_2|^2 = |O_1C|^2 + |O_1O_2|^2 = a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4a^2\cos^2\varphi\sin^2\frac{\beta}{2}$$

از آن جا

$$\cos A\widehat{O}A_2 = \frac{|OC|^2 + |OO_2|^2 - |CO_2|^2}{2|OC|\cdot|OO_2|} =$$

$$= \frac{a^2\cos^4\varphi + a^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 4a^2\cos^2\varphi\sin^2\frac{\beta}{2}}{2a^2\cos^3\varphi} =$$

$$= \cos\varphi - \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}$$

به این ترتیب ، زاویهٔ مجهول ، برابر است با

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\varphi - \frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\varphi}\right).$$

۷. به‌سادگی دیده می‌شود که هرجواب دستگاه مفروض ، به‌شرط $x+y \neq 0$ سازگار است. دو طرف هر یک از معادله‌های دستگاه را در $x+y$ ضرب می‌کنیم ، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 1+x^2+xy=-x-y \\ x=-2x-2y \end{cases}$$

که با دستگاه اصلی هم‌ارز است. ازمعادلهٔ دوم این دستگاه به‌دست می‌آید: $y=-\frac{3}{2}x$، که اگر به‌جای y درمعادلهٔ‌اول قراردهیم، به‌این معادله‌می‌رسیم:

$$1+x^2-\frac{3}{2}x^2=-x+\frac{3}{2}x$$

که، بعد ازتبدیل‌های ساده، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x^2+x-2=0$$

معادلهٔ اخیر، دوریشه‌دارد: $x_1=1$، $x_2=-2$. بنابراین،دستگاه مفروض، دارای دو جواب است: $x_1=1$، $y_1=-\frac{3}{2}$؛ $x_2=-2$، $y_2=3$.

۸. نامعادلهٔ مفروض را می‌توان به‌صورت $2^{x-1}>2^{-\frac{4}{x}}$ نوشت. اگر از دو طرف، درپایهٔ ۲، لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$x-1>-\frac{4}{x}$$

که اگرهمهٔ جمله‌ها رابه‌سمت چپ نامعادله ببریم، بعدازیکی کردن‌مخرج‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^2-x+4}{x}>0 \qquad (5)$$

که با نامعادلهٔ اصلی هم‌ارز است. مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم صورت کسر منفی است: $\Delta=-15$. بنابراین، صورت کسرسمت‌چپ‌نامعادلهٔ (۵)همیشه مثبت است و، درنتیجه، به‌نامعادلهٔ $\frac{1}{x}>0$ یا $x>0$ می‌رسیم.

پاسخ: $x>0$.

گروه‌های دوم تا ششم

گروه دوم. ۱. $x_1=\frac{\pi}{30}$، $x_2=\frac{11\pi}{30}$، $x_3=\frac{61\pi}{30}$؛

۲. $\frac{\sqrt{13}}{2}$؛ ۳. $x_1=2^4$، $x_2=2^9$؛ ۴. $\frac{44}{3}$؛

۵. $\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$، $\frac{\frac{7}{4}-\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$؛ ۶. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{tg\beta}\right)$؛

۷. $\left(-\frac{7}{4}, -3\right)$، $\left(-\frac{7}{6}, -2\right)$؛ ۸. $x<0$.

گروه سوم. ۱. $x_1=-\frac{29\pi}{42}$، $x_2=-\frac{\pi}{42}$، $x_3=\frac{55\pi}{42}$؛

۲. $\left(0, -\frac{8}{10}, 0\right)$؛ ۳. $x_1=7$، $x_2=7^9$؛ ۴. ۹؛

۵. $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$، $\frac{\frac{5}{3}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\beta}{2\sin\beta}$؛ ۶. $\arccos\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)$؛

۷. $(2, 3)$، $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$؛ ۸. $x>0$.

گروه چهارم. ۱. $x_1=-\frac{35\pi}{24}$، $x_2=-\frac{19\pi}{24}$، $x_3=\frac{13\pi}{24}$؛

۲. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$؛ ۳. $x_1=3^4$، $x_2=3^9$؛ ۴. $\frac{68}{3}$؛

۵. $\frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$، $\frac{\frac{8}{5}-2\sqrt{\frac{3}{5}}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$؛

۶. $\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\cos\varphi\cdot\frac{h}{\sqrt{k^2+h^2}}\right)$؛

۷. $\left(\frac{7}{3}, -1\right)$، $(-7, 3)$؛ ۸. $x<0$.

گروه پنجم. ۱. $x_1=-\frac{23\pi}{15}$، $x_2=\frac{2\pi}{15}$، $x_3=\frac{7\pi}{15}$؛

۲. $K(-2, 0, 0)$؛ ۳. $x_1=2$، $x_2=16$؛ ۴. $\frac{80}{3}$؛

۵. $\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$، $\frac{\frac{5}{4}-\cos\beta}{2\sin\beta}$؛ ۶. $\operatorname{arctg}(\cos\gamma)$؛

۷. $(4,-9)$، $\left(-1,\frac{9}{4}\right)$؛ ۸. $x>0$.

گروه ششم. ۱. $x_1=-\frac{4\pi}{21}$، $x_2=\frac{10\pi}{21}$، $x_3=\frac{38\pi}{21}$ ۲. $\frac{\sqrt{21}}{2}$؛

۳. $x_1=5$، $x_2=5^9$؛ ۴. $\frac{16}{3}$؛

۵. $\frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. $\frac{\frac{5}{3}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$؛ ۶. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\varphi\sin\frac{\beta}{2}\right)$؛

۷. $\left(-\frac{17}{2},3\right)$، $\left(-\frac{17}{3},2\right)$؛ ۸. $x<0$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. چون داریم:

$$\cos(x+30^\circ)=\sin(60^\circ-x)=-\sin(x-60^\circ)$$

معادلهٔ مفروض، به‌معادلهٔ هم‌ارز خود

$$\sin(x-60^\circ)=0$$

تبدیل می‌شود که جواب آن عبارت است از $x=180^\circ n+60^\circ\ (n\in Z)$.

۲. راه حل اول. a را عددی سازگار با شرط‌های مسأله و (x_0, y_0) را تنها جواب دستگاه مفروض معادله‌ها می گیریم. چون هردو معادلهٔ دستگاه نسبت به x و y متقارن‌اند، پس زوج عددهای (y_0, x_0) هم، درمعادله‌های‌دستگاه صدق خواهد کرد. بنابراین به‌ناچار باید داشته باشیم: $x_0=y_0$، وازمعادلهٔ اول دستگاه به‌دست می آید: $x_0=y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و، سپس، ازمعادلهٔ‌دوم: $a\sqrt{2}$؛ یا $x_0=y_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $a=-\sqrt{2}$. اگر دستگاه را، به‌ازای این دو مقدار a حل کنیم، قانع‌می‌شویم که، درهردوحالت، شرط‌مسأله برقراراست.

راه حل دوم. دستگاه مفروض، با دستگاه زیر، هم‌ارز است:

$$\begin{cases}y=a-x\\x^2+(a-x)^2=1\end{cases}$$

و دستگاه اخیر، وقتی جواب منحصر به‌فرد دارد، که جواب‌های معادلهٔ دوم، با هم برابر باشند. معادلهٔ دوم چنین است:

$$2x^2-2ax+(a^2-1)=0$$

وبرای این‌که ریشه‌های آن برابرباشند، باید مبینی برابرصفرداشته باشد:

$$\Delta=4a^2-8(a^2-1)=0 \implies a=\pm\sqrt{2}$$

یعنی دستگاه مفروض، به‌ازای $a=\sqrt{2}$ و $a=-\sqrt{2}$، جواب منحصربه‌فرد دارد. به‌ازای سایرمقدارهای a، این دستگاه یا دوجواب دارد و یا جواب حقیقی ندارد.

پاسخ: $a_1=\sqrt{2}$، $a_2=-\sqrt{2}$.

۳. چون $2^{x-2}\neq 0$، بنابراین می‌توان مخرج را از بین برد ومعادله را به‌این صورت نوشت:

$$36=(10+4^{\frac{x}{2}})\,2^{x-2} \qquad (1)$$

چون $2^{x-2}=\frac{2^x}{4}$ و $4^{\frac{x}{2}}=2^x$، معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$(2^x)^2+10\cdot 2^x-144=0 \qquad (2)$$

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $y^2+10y-144=0$ عبارتند از $y_1=8$ و $y_2=-18$. درنتیجه، معادلهٔ (۲)، به‌مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرتبدیل می‌شود:

$$2^x=8 \quad \text{و} \quad 2^x=-18$$

معادلهٔ اول، دارای ریشهٔ منحصر $x=3$ است ومعادلهٔ دوم، ریشه ندارد.

پاسخ: $x=3$.

۴. حوزهٔ تعریف این نامعادله، عبارت است ازهمهٔ مقدارهای $x>-2$. چون پایهٔ توان در نامعادلهٔ مفروض، بزرگتر ازواحد است، این نامعادله،درحوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول خود، با نامعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\log_3\frac{2}{2+x}<0$$

وچون مبنای لگاریتم بزرگترازواحد است، بنابراین،درمجموعهٔ $x>-2$، داریم:

$$\frac{2}{x+2}<1$$

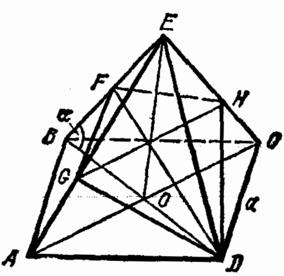
که درمجموعهٔ $x>-2$، با نامعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$2<x+2 \implies x>0$$

همهٔ مقدارهای جواب، جزو حوزهٔ تعریف نامعادله‌اند.

پاسخ: $x>0$.

۵. راس‌های مربع قاعده‌را A، B، C و D می‌نامیم و، ضمناً، به‌نحوی که‌مقطع مورد نظر مسأله، از رأس D عبور کند (شکل ۷۳). رأس هرم را با E، و نقطه‌های برخورد مقطع را با یال‌های AE، BE و CE، به ترتیب، با G، F و H نشان می‌دهیم. طول ضلع مربع قاعده را a واندازهٔ زاویهٔ EBD را α می‌گیریم. هرم قائم است و، بنابراین، پای ارتفاع هرم ــ که از رأس E بر قاعده فرودآمده است ــ بر نقطهٔ O ــ مرکز قاعده ــ قرار می‌گیرد و، رابطهٔ مجهول $\frac{|OE|}{|BE|}$ برابر است با $\sin\alpha$.



شکل ۷۳

مساحت مقطع GFHD را، برحسب a و α، محاسبه می‌کنیم.

طبق فرض، BE بر صفحهٔ GFHD عموداست، یعنی BE برخط‌های راست FG، FD و FH عمود است. چون $|BD|=a\sqrt{2}$، بنابراین ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BFD (شکل ۷۴)، به‌دست می‌آید:

$$|FD|=|BD|\cdot\sin\alpha=a\sqrt{2}\sin\alpha \qquad (4)$$

علاوه براین: $|BF|=|BD|\cos\alpha=a\sqrt{2}\cos\alpha$؛ وچون‌مثلث BED متساوی‌الساقین است، پس

$$|BE|=\frac{|BO|}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}|BD|}{\cos\alpha}=\frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha}$$

حالا، پاره‌خط EG را محاسبه می‌کنیم. چون مثلث ABE متساوی‌الساقین است (شکل ۷۵)، پس

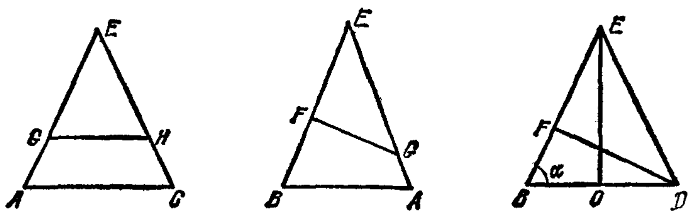
$$|AE|=|BE|=\frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha}$$

و بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها

$$|AB|^{۲}=|BE|^{۲}+|AE|^{۲}-۲|BE|\cdot|AE|\cos\widehat{BEA}$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$\cos\widehat{BEA}=\frac{|BE|^{۲}+|AE|^{۲}-|AB|^{۲}}{۲|BE|\cdot|AE|}=\frac{\dfrac{a^{۲}}{\cos^{۲}\alpha}-a^{۲}}{\dfrac{a^{۲}}{\cos^{۲}\alpha}}=\sin^{۲}\alpha$$



شکل ۷۶ شکل ۷۵ شکل ۷۴

با توجه به‌این‌که داریم:

$$|EF|=|BE|-|BF|=\frac{a}{\sqrt{۲}\cos\alpha}-a\sqrt{۲}\cos\alpha=-\frac{a\cos ۲\alpha}{\sqrt{۲}\cos\alpha}$$

وضمناً $FG\perp BE$. ازمثلث قائم‌الزاویهٔ FGE به‌دست می‌آید:

$$|EG|=\frac{|EF|}{\cos\widehat{BEA}}=-\frac{a\cos ۲\alpha}{\sqrt{۲}\sin^{۲}\alpha\cos\alpha}$$

مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ FGE و EHF در وتر FE مشترک‌اند و، علاوه بر آن، $\widehat{FEG}=\widehat{FEH}$ (هرم منتظم است). بنا براین $|EG|=|EH|$، وچون مثلث AEC متساوی‌الساقین است، پس $GH\|AC$. چون OE ارتفاع هرم‌است، بنابراین $OE\perp AC$، یعنی $OE\perp GH$. تصویرنقطهٔ E برصفحهٔ GFHD، روی نقطهٔ F می‌افتد، و خطهـای راست OE و FD برصفحهٔ BED قـرار می‌گیرند ویکـدیگررا قطـع می‌کنند. یعنی تصویرخـط OE روی صفحـهٔ GFHD، برخط راست FD منطبق می‌شود. اکنـون، بنابر قضیهٔ سه عمود، نتیجه می‌گیریم: $FD\perp GH$.

ازمثلث AEC، طـول پاره‌خط GH را پیـدا می‌کنیم (شکل ۷۶).

چون $GH \parallel AC$، ازتشابه دومثلث GEH و AEC معلوم می‌شود که

$$\frac{|GH|}{|AC|}=\frac{|GE|}{|AE|}$$

وازآن‌جا

$$|GH|=\frac{|GE|\cdot|AC|}{|AE|}=$$

$$=-\frac{a\cos ۲\alpha\cdot a\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۲}\cos\alpha}{\sqrt{۲}\sin^۲\alpha\cos\alpha\cdot a}=\frac{-a\sqrt{۲}\cos ۲\alpha}{\sin^۲\alpha} \qquad (۵)$$

چون قطرهای FD و GH ازچهارضلعی GFHD برهم عمودند، با توجه به (۴) و (۵)، داریم:

$$S_{GFHD}=\frac{۱}{۲}|FD|\cdot|GH|=$$

$$=-\frac{a\sqrt{۲}\cos ۲\alpha\cdot a\sqrt{۲}\sin a}{۲\sin^۲\alpha}=-a^۲\frac{\cos ۲\alpha}{\sin\alpha}$$

طبق فرض داریم: $S_{GFHD}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}a^۲$. اگر دومقداری راکه برای مساحت مقطع دردست داریم، مقایسه‌کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$-\frac{\cos ۲\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۱}{۲}$$

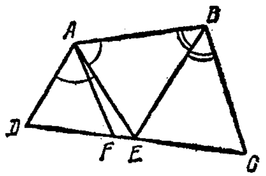
که با معادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$۴\sin^۲\alpha-\sin\alpha-۲=۰$$

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۴t^۲-t-۲=۰$ عبارتند از: $t_۱=\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۸}$، $t_۲=\frac{۱-\sqrt{۳۳}}{۸}$. چون، α زاویه‌ای ازمثلث است، بنابراین $\sin\alpha>۰$ و،در نتیجه، $\sin\alpha=t_۱$، یعنی $\sin\alpha=\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۸}$. وچون، نسبت مجهـول، برابر است با $\sin\alpha$، جواب به‌دست می‌آید.

پاسخ: $\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۸}$.

۶. نقطهٔ E روی نیمساز زاویهٔ BAD قراردارد (شکل ۷۷) وازخط‌های‌راست AD و AB به‌یك‌فاصله است. ولی، همین نقطه، روی نیمساز زاویهٔ ABC



شکل ۷۷

هم واقع است. بنابراین، فاصلهٔ نقطهٔ E تا خط راست BC برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ E تا خط راست AB. به‌این ترتیب، نقطهٔ E، از خط‌های راست AD، AB و BC به‌یك فاصله است ونسبت مجهول، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ E ازخط‌های راست AD و BC برابراست با ۱.

ثابت می‌کنیم:

$$|AD|+|BC|=|CD| \qquad (۶)$$

اندازهٔ زاویهٔ EAB را α واندازهٔ زاویهٔ ABE را β می‌گیریم. بدون این که به‌کلی‌بودن مسأله، لطمه‌ای واردآید، می‌توان فرض کرد: $\beta \leqslant \alpha$. ازنقطه A، نیم‌خط AF را طوری رسم می‌کنیم که پاره‌خط DC را درنقطهٔ F قطع کند وداشته باشیم: $\widehat{DAF}=\beta$. چون $\beta \leqslant \alpha$، بنابراین، نقطهٔ F روی‌پاره‌خط DE قرارمی‌گیرد. چهارضلعی ABCD، طبق فرض، یك چهارضلعی محاطی است، یعنی

$$\widehat{ADC}=\pi-\widehat{ABC}=\pi-۲\beta,$$

$$\widehat{DFA}=\pi-\widehat{DAF}-\widehat{ADC}=\pi-\beta-(\pi-۲\beta)=\beta$$

ازاین‌جا نتیجه می‌گیریم که مثلث DAF متساوی‌الساقین است، یعنی

$$|DF|=|DA| \qquad (۷)$$

چون $\widehat{ABE}=\beta$ و $\widehat{AFC}=\pi-\widehat{DEA}=\pi-\beta$، پس چهارضلعی ABEF محاطی است وداریم: $\widehat{FBE}=\widehat{FAE}$. روشن است که

$$\widehat{FAE}=\widehat{DAE}-\widehat{DAF}=\alpha-\beta,$$

$$\widehat{FBC}=\widehat{FBE}+\widehat{EBC}=\alpha-\beta+\beta=\alpha$$

اگردوباره ازمحاطی‌بودن چهارضلعی ABCD استفاده کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$\widehat{BCD}=\pi-\widehat{DAB}=\pi-۲\alpha،$$

$$\widehat{BFC}=\pi-\widehat{FBC}-\widehat{BCD}=\pi-\alpha-(\pi-۲\alpha)=\alpha$$

ازبرابری $\widehat{FBC}=\alpha=\widehat{BFC}$ نتیجه می‌گیریم که مثلث BFC متساوی‌الساقین است، یعنی

$$|CF|=|BC| \qquad (۸)$$

از برابری‌های (۷) و (۸)، درستی برابری (۶) نتیجه می‌شود.

از شرط $m = \frac{|CD|}{|BC|}$، با توجه به برابری (۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|CD| - |BC|}{|BC|} = m - ۱$$

و چون نقطهٔ E از خطهای راست AD و BC به یك فاصله است، بنابراین

$$\frac{S_{ADE}}{S_{BCE}} = \frac{|AD|}{|BC|} = m - ۱$$

پاسخ : نسبت فاصلهٔ نقطهٔ E ازخط راست AD به فاصلهٔ نقطهٔ E از خط راست BC ، برابر است با ۱ ؛ و $\frac{S_{ADE}}{S_{BCE}} = m - ۱$

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $k\pi + ۳\pi \ (k \in Z)$ ؛ ۲. $b = -۲$ ؛

۳. $x = log_{۰/۳}۳$ ؛ ۴. $x > ۲$ ؛

۵. $\frac{۳۳}{۱۷\sqrt{۱۷}}$ ؛ ۶. $k - ۱$، ۱.

گروه سوم. ۱. $k\pi + \frac{\pi}{۳۲} \pm \frac{\pi}{۶} \ (k \in Z)$ ؛ ۲. $m = -\frac{۱}{۳}$ ؛

۳. $x = ۲$ ؛ ۴. $x < -۱$ ؛ ۵. $\frac{\sqrt{۷۳} - ۱}{۲}$ ؛

۶. ۱، $b + ۱$.

گروه چهارم. ۱. $n\pi + \frac{۵\pi}{۸} \ (n \in Z)$ ؛ ۲. $p = -۱$ ؛

۳. $x = log_{۰/۴}۴$ ؛ ۴. $۱ < x < ۵$ ؛ ۵. $arssin\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$ ؛

۶. ۱، $\frac{۲}{۳}$.

۱۹۷۷

گروه اول

۰۱ فاصلهٔ بین A تا B را S کیلومتر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم، سرعت موتور سوار x کیلومتر در ساعت وسرعت دو چرخه سوار y کیلومتر در ساعت باشد.

موتور سوار، مسافت $\frac{۲}{۳}S$ کیلومتر را در $\frac{۲}{۳}\cdot\frac{S}{x}$ ساعت ودوچرخه‌سوار مسافت $\frac{۱}{۳}S$ کیلومتر رادر $\frac{۱}{۳}\cdot\frac{S}{y}$ ساعت، طی می‌کنند. پس، در مدت $\left(\frac{۲}{۳}\cdot\frac{S}{x}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{S}{y}\right)$ ساعت از A به B می‌رسد که، بنا برفرض مساله، باید برابر $\frac{S}{۴۰}$ ساعت باشد. به این ترتیب، معادلهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲}{۳}\cdot\frac{S}{x}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{S}{y}=\frac{S}{۴۰}$$

اگرموتورسوار ودوچرخه‌سوار به‌طرف‌هم‌حرکت‌کنند، بعد از $\frac{S}{x+y}$ ساعت به هم می‌رسند که، بنابر فرض مساله، باید برابر $\frac{S}{۱۰۰}$ ساعت باشد در نتیجه، معادلهٔ دوم هم به‌دست می‌آید:

$$\frac{S}{y+x}=\frac{S}{۱۰۰}$$

اگر دو طرف هریك ازمعادله‌های اول و دوم را بر S تقسیم‌کنیم ($S\neq ۰$)، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۴۰} \\ \frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{۱۰۰} \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم داریم $y=۱۰۰-x$، که اگر درمعادله اول دستگاه، به‌جای y قرار دهیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

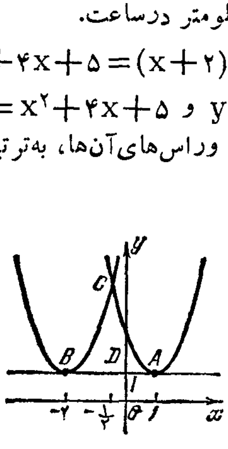
$$\frac{۲}{۳x}+\frac{۱}{۳(۱۰۰-x)}=\frac{۱}{۴۰}$$

که دارای دو ریشه است: $x_۱=۸۰$ ، $x_۲=\frac{۱۰۰}{۳}$؛ ولی در این صورت $y_۱=۲۰$ ، $y_۲=\frac{۲۰۰}{۳}$. به‌سادگی دیده می‌شود این زوج عددها، جواب‌های دستگاه معادله‌ها هستند:

$$x_۱=۸۰ \text{ و } y_۱=۲۰ \qquad \text{و} \qquad x_۲=\frac{۱۰۰}{۳} \text{ و } y_۲=\frac{۲۰۰}{۳}$$

چون، سرعت موتور سوار بیشتر از سرعت دوچرخه سوار است، بنابراین، تنها یکی از جواب‌هـای دستگاه قابل قبول است: $x_۱=۸۰$ ، $y_۱=۲۰$. یعنی سرعت موتورسوار عبارت است از ۸۰ کیلومتر درساعت.

۲. چون $x^۲-۲x+۲=(x-۱)^۲+۱$ و $x^۲+۴x+۵=(x+۲)^۲+۱$، بنابرایـن، نمودار تابع‌های $y=x^۲-۲x+۲$ و $y=x^۲+۴x+۵$، سهمی‌هایی هستند که شاخه‌های آن‌ها درجهت بالا وراس‌های آن‌ها، به‌ترتیب، در نقطه‌های $A(۱،۱)$ و $B(-۲،۱)$ قراردارند (شکل ۷۸).



شکل ۷۸

از دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} y=x^۲-۲x+۲ \\ y=x^۲+۴x+۵ \end{cases}$$

مختصات نقطهٔ C ـ نقطـهٔ برخـورد دو سهمی ـ به دست می‌آید:

$$x_C = -\frac{1}{2}, \quad y_C = 3\frac{1}{4}$$

شکل مورد نظر BAC از دو بخش تشکل شده است:

a) شکلی که زیرنمودارتابع $y = x^2 + 4x + 5$ وبالای خطراست $y = 1$ ، درفاصلهٔ از -2 تا $-\frac{1}{2}$ ، قرارگرفته است؛

b) شکلی که زیرنمودارتابع $y = x^2 - 2x + 2$ وبالای خط راست $y = 1$ ، درفاصلهٔ از $-\frac{1}{2}$ تا ۱ قراردارد.

مساحت شکل اول: چنین است:

$$S_1 = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (x^2 + 4x + 5 - 1)dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (x+2)^2 dx =$$

$$= \frac{(x+2)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{8}$$

و مساحت شکل دوم:

$$S_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^2 - 2x + 2 - 1)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^2 dx =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1} = \frac{9}{8}$$

وبنابراین

$$S = S_1 + S_2 = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = 2\frac{1}{4}$$

۳. نامعادلهٔ مفروض، با نامعادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$0 < 6^{x+1} - 36^x \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$$

که هم‌ارز با دستگاه نامعادله‌های زیر است:

$$\begin{cases} 6^{x+1} - 36^x > 0 \\ 6^{x+1} - 36^x \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2} \end{cases} \qquad (1)$$

که اگر 6^x را با y نشان دهیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 6y-y^2>0 \\ 6y-y^2\leqslant 5 \end{cases} \qquad (2)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول عبارت است از $0<y<6$ ؛ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم از دو فاصله تشکیل شده است: $y\leqslant 1$ و $y\geqslant 5$. بنابراین، جواب‌های دستگاه (۲) شامل دوحوزهٔ $0<y\leqslant 1$ و $5\leqslant y<6$ می‌باشد. بـه این ترتیب، دستگاه (۱)، هم‌ارز مجموعهٔ دونامعادلهٔ دوگانهٔ زیر است:

$$0<6^x\leqslant 1 \quad \text{و} \quad 5\leqslant 6^x<6$$

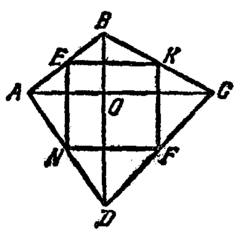
و یا مجموعهٔ دو دستگاه نامعادله‌های زیر:

$$\begin{cases} 6^x>0 \\ 6^x\leqslant 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 6^x\geqslant 5 \\ 6^x<6 \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های دستگاه $-\infty<x\leqslant 0$ ومجموعهٔ‌جواب‌های دستگاه دوم $\log_6 5\leqslant x<1$ است.

پاسخ: $x\leqslant 0$ و $\log_6 5\leqslant x<1$

۴. ABCD را، چهارضلعی مفروض مساله می گیریم.(شکل ۷۹). وسط ضلع‌های AB ، BC ، CD و AD را، بـه ترتیب، E ، K ، F و N فرض می کنیم. آن وقت، EN خطی است که وسط‌دو ضلع مثلث ABD را به‌هم وصل می‌کند، یعنی $EN\|BD$. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود: $KF\|BD$ ، $EK\|AC$ و $NF\|AC$ در نتیجه: $EN\|KF$ و $EK\|NF$ ، یعنی چهارضلعی NEKF متوازی‌الاضلاع است. به این‌ترتیب ، خواهیم داشت: $|EK| = |NF|$ ، $|EN|=|KF|$ و بنابـرفرض $|EF|=|NK|$. از این‌جا نتیجه می‌شود: $\widehat{EKF}=\widehat{KFN}$ ؛ یعنی چهارضلعی NEKF، مستطیل است. قبلاً ثابت کردیم که: $EN\|BD$ و $EK\|AC$ ، بنابراین $BD\perp AC$:



شکل ۷۹

O را محل برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD می گیریم؛ بنابراین

مساحت مثلث‌های ABC و ADC ، به‌ترتیب، برابرند با $\frac{۱}{۲}|AC|\times|BO|$ و $\frac{۱}{۲}|AC|\cdot|OD|$. مساحت S چهارضلعی ABCD برابر است با مجموع مساحت‌های این دومثلث. یعنی

$$S=\frac{۱}{۲}|AC|\cdot|BO|+\frac{۱}{۲}|AC|\cdot|OD|=\frac{۱}{۲}|AC|\cdot|BD|=$$

$$=\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۲=۱$$

پاسخ: ۱ مترمربع.

۵. با استفاده از رابطه‌های

$$۲\cos^{۲}۳x=۱+\cos ۶x \quad و \quad \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos ۲x-\frac{۱}{۲}=\sin ۲x=\cos\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)$$

معادلهٔ مفروض را، به این صورت می‌نویسیم:

$$۲-۲\cos\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)=۲+۲\cos ۶x \qquad (۳)$$

معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos ۶x+\cos\left(۲x+\frac{\pi}{۶}\right)=۰ \Rightarrow ۲\cos\left(۴x+\frac{\pi}{۱۲}\right)\times$$

$$\times\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۱۲}\right)=۰$$

که خود، هم‌ارز مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر است:

$$\cos\left(۴x+\frac{\pi}{۱۲}\right)=۰ \quad و \quad \cos\left(۲x-\frac{\pi}{۱۲}\right)=۰$$

وجواب‌های این معادله‌ها، به ترتیب، چنین است:

$$x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴۸} \quad ، \quad x=\frac{n\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۲۴} \qquad (k ، n\in Z)$$

که همان جواب‌های معادلهٔ مفروض ما هستند.

اکنون باید، از بین این‌جواب‌ها، آن‌هایی را انتخاب کنیم که‌با شرط $\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)>۰$ سازگار باشند. $x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴۸}$ فرض می‌کنیم، آن

وقت داریم:

$$\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\left(\frac{k\pi}{۲}+\frac{۵\pi}{۲۴}-\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\left(\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲۴}\right)$$

به سادگی دیده می‌شود که شرط مساله، با این زیر مجموعه‌ها از مجموعهٔ جواب‌های اول معادلهٔ اصلی سازگارند، که به ازای $k=۴m+۱$ و $k=۴m$ به دست آمده‌اند:

$$x=m\pi+\frac{۵\pi}{۴۸} \quad و \quad x=m\pi+\frac{۱۷\pi}{۴۸} \qquad (m\in Z)$$

اکنون فرض می‌کنیم: $x=\frac{n\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۲۴}$ ، آن وقت

$$\cos\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\left(n\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{۳}\right)=$$

$$=\cos\frac{\pi}{۳}\cos n\pi-\sin\frac{\pi}{۳}\sin n\pi=(-۱)^n\cdot\frac{۱}{۲}$$

شرط مساله، با مقدارهای زوج $n\,(n=۲l)$ سازگار است؛ یعنی از مجموعهٔ دوم جواب‌ها، این زیر مجموعه به دست می‌آید:

$$x=\pi l+\frac{۷\pi}{۲۴} \qquad (l\in Z)$$

پاسخ: $x=m\pi+\frac{۵\pi}{۴۸}$ ، $x=n\pi+\frac{۱۷\pi}{۴۸}$ ،

$x=l\pi+\frac{۷\pi}{۲۴}$ $(m,n,l\in Z)$.

۶. اگر دوطرف هریك از معادله‌های دستگاه را مجذور کنیم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y-۱=۰ \\ x-y+۲=۴y^۲-۸y+۴ \end{cases} \qquad (۴)$$

هرجوابی از دستگاه اصلی، حتماً جوابی از دستگاه (۴) است، ولی عکس این‌حکم ممکن است درست‌نباشد، یعنی همهٔ‌جواب‌های دستگاه (۴) جواب‌های دستگاه مفروض مساله نباشند، بنابراین، از بین جواب‌های دستگاه (۴)،

باید آن‌هایی را انتخاب کرد که در دستگاه مفروض ما، صدق کنند.

از معادلهٔ اول دستگاه (۴) به دست می‌آید: $x = ۲ - y$ ، که اگر به‌جای x درمعادلهٔ دوم دستگاه قرار دهیم، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$۲y^۲ - ۳y = ۰ \Rightarrow y_۱ = ۰ ، y_۲ = \frac{۳}{۲}$$

دستگاه (۴) دوجواب دارد:

$$۲y^۲ - ۳y = ۰ \Rightarrow y_۱ = ۰ ، y_۲ = \frac{۳}{۲}$$

و آزمایش مستقیم نشان می‌دهد کـه تنها جواب دوم دردستگاه اصلی صدق می‌کند.

پاسخ: $x = \frac{۱}{۲}$ ، $y = \frac{۳}{۲}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه‌دوم . ۱. ۶ روز ؛ ۲. $\frac{۹}{۴}$ ؛

۳. $x \leqslant log_۵ ۲$ ، $log_۵ ۳ \leqslant x < ۱$ ؛ ۴. ۱ متر ؛

۵. $\frac{۴}{۳}l\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ ، $\frac{۴}{۳}m\pi + \frac{۱۳\pi}{۱۲}$ ، $\frac{۴}{۳}k\pi - \frac{۷\pi}{۱۸}$ $(l ، m ، k \in Z)$ ؛

۶. $x = ۰$ ، $y = ۱$.

گروه‌سوم . ۱. ۴۸ کیلومتر درساعت؛ ۲. ۱۸؛

۳. $x \leqslant ۰$ ، $log_۳ ۸ \leqslant x < ۲$ ؛ ۴. ۱ متر؛

۵. $۴k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ، $۴m\pi + \frac{۴\pi}{۳}$ ، $۴l\pi + \frac{۱۱\pi}{۳}$ $(k ، m ، l \in Z)$؛

۶. $x = ۵$ ، $y = ۱$.

گروه‌چهارم . ۱. ۱۰ روز، ۲. $\frac{۹}{۴}$ ؛

۳. $x \leqslant ۰$ ، $log_۲ ۳ \leqslant x < ۲$ ؛ ۴. $\frac{\pi}{۲}$ ؛

۵. $(۴l + ۱)\pi$ ، $۴m\pi + \frac{\pi}{۲}$ ، $۴k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$ $(l ، m ، k \in Z)$ ؛

۶. $y=2$ ، $x=2$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. بـا استفاده از رابطهٔ مجموع دوسینوس، معادلـهٔ مفروض بـه این صورت درمی آید:

$$2\sin 4x \cos 2x = 3\cos^2 2x$$

و یا
$$\cos^2 2x(3-4\sin 2x)=0$$

بنا براین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\sin 2x=\frac{3}{4} \quad , \quad \cos^2 2x=0$$

جواب‌های معادلهٔ اول به صورت $(m\in Z)\, x=\frac{m\pi}{2}+\frac{(-1)^m}{2}\arcsin\frac{3}{4}$

وجواب‌های معادلهٔ دوم به‌صورت $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$ درمی‌آید.

پاسخ: $x=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ، $(k,m\in Z)\, x=\frac{m\pi}{2}+\frac{(-1)^m}{2}\arcsin\frac{3}{4}$

۲. سرعت اتومبیل باری را x کیلومتر در ساعت و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را S کیلومتر می گیریم. اتومبیل باری، فاصله A تا B را در $\frac{S}{x}$ ساعت و اتومبیل سواری در $\left(\frac{S}{x}-1\right)$ ساعت‌طی‌می کنند. بنا براین، سرعت‌اتومبیل‌سواری برابر است بـا $\frac{S}{\frac{S}{x}-1}$ کیلومتر درساعت. طبق فرض می‌دانیم که اگراتومبیل‌ها دریک زمان از A و B به‌طرف یکدیگر حرکت‌کنند، بعداز $1\frac{1}{5}$ ساعت به هم می‌رسند، بنابراین، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$1\frac{1}{5}\left(x+\frac{S}{\frac{S}{x}-1}\right)=S$$

با توجه به این که $x>0$، دوطرف معادله را بر x تقسیم می کنیم، به‌معادله زیر که هم‌ارز معادلهٔ بالا است، می‌رسیم:

$$\frac{6}{5}\left(1+\frac{\frac{S}{x}}{\frac{S}{x}-1}\right)=\frac{S}{x}$$

که اگر $\frac{S}{x}$ را برابر t فرض‌کنیم، این معادله به دست می‌آید:

$$5t^2-17t+6=0$$

که ریشه‌های آن $t_1=3$ و $t_2=\frac{2}{5}$ است. از فرض مساله روشن است کـه اتومبیل باری فاصلهٔ از A تا B را درمدتی بیش از یك ساعت طی‌می کند، درنتیجه، تنها $t_1=3$ با شرط مساله سازگاراست.

پاسخ: ۳ ساعت.

۳. طول ضلع‌قاعدهٔ مکعب مستطیل را (که یك‌مربع‌است) x سانتیمتر می گیریم، چون محیط‌وجه‌جانبی، برابر۶ سانتیمتر است،بنابراین، ارتفاع مکعب‌مستطیل برابر $\frac{6-2x}{2}$،یعنی$(3-x)$سانتیمتروحجم‌آن‌برابر$V(x)=x^2(3-x)$ سانتیمتر مکعب می‌شود. مساله به این جا منجر می‌شودکه حداکثر مقدارتابع $V(x)$ را، دربازهٔ $0<x<3$، پیدا کنیم. مشتق تابع $V(x)$ چنین است:

$$V'(x)=(3x^2-x^3)'=6x-3x^2=3x(2-x)$$

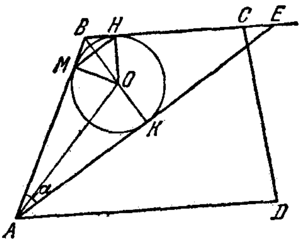
این مشتق، دربازهٔ $0<x<2$ مثبت است، یعنی $V(x)$ دراین بازهٔ صعودی است.مشتق$V'(x)$، دربازهٔ $2<x<3$منفی‌استو، بنابراین، $V(x)$ دراین بازه نزولی است. چون تابع $V(x)$ درنقطهٔ $x=2$ پیوسته است، ازآنچه گفتیم معلوم می‌شودکه تابع $V(x)$ در نقطهٔ $x=2$ به حداکثر مقدار خود در بازهٔ $0<x<3$ می‌رسد.

به این ترتیب، حداکثر حجم، برای مکعب‌مستطیلی که قاعدهٔآن مربع

باشد، درحالتی پیش می‌آید که طول ضلع مربع قاعده برابر ۲ سانتیمتر باشد. دراین حالت، حجم مکعب مستطیل برابر ۴ سانتیمتر مکعب می‌شود.

پاسخ: مکعب مستطیلی که طول ضلع قاعدهٔ آن ۲ سانتیمتر، طول یال جانبی آن یك سانتیمتر باشد؛ حجم مجهول برابر است با ۴ سانتیمترمکعب.

۴. $ABCD$ را ذوزنقه‌ای می‌گیریم که باشرطهای مساله‌ساز گار باشد (شکل ۸۰) اندازهٔ زاویهٔ BAE را α می گیریم. طبق فرض : $\widehat{BAE}=\widehat{EAD}$. چون $BC \| AD$، پس $\widehat{AEB}=\widehat{EAD}=\widehat{BAE}$. بنابراین، مثلث ABE متساوی‌الساقین است و



شکل ۸۰

$$\widehat{BAE}=\frac{\pi-\widehat{ABC}}{۲} \qquad (۱)$$

پاره خطهای BM و BH، مماس‌هایی هستند که ازنقطهٔ B بردایره رسم‌شده‌اند و، بنابراین، با هم برابرند. در نتیجه، مثلث MBH متساوی‌الساقین است و

$$\widehat{BMH}=\frac{\pi-\widehat{ABC}}{۲} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\widehat{BAE}=\widehat{BMH}$$

واین، به معنای آن است که دومثلث ABE و MBH متشابه‌اند وداریم:

$$\frac{|BM|}{|BA|}=\frac{|MH|}{|AE|} \qquad (۳)$$

نقطهٔ O، روی نیمساز BK زاویهٔ B ازمثلث متساوی‌الساقین ABE قراردارد و BK، در عین حال میانه و ارتفاع این مثلث نیز می‌باشد. به این ترتیب:

$$|AE|=۲|AK|=۲|AB|\cos\alpha=۴\cos\alpha$$

مرکزدایرهٔ O روی نیمساز BK قراردارد، که‌درآن، K محل برخوردنیمساز با ضلع AE است. شعاع وارد ازنقطهٔ O به‌نقطهٔ تماس دایره با خط راست AE، برAE عموداست؛ وچون $OK \perp AE$، پس K همان‌نقطهٔ تماس‌است. از این جا نتیجه می‌شود:

$$|BM|=|AB|-|AM|=|AB|-|AK|=۲(۱-\cos\alpha)$$

به جز این، $|BA|=۲$ ، $|MH|=۱$. اگر این مقدارها را دررابطهٔ (۳) قرار دهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۲(۱-\cos\alpha)}{۲}=\frac{۱}{۴\cos\alpha}$$

و یا، بعداز ساده‌کردن

$$۴\cos^۲\alpha-۴\cos\alpha+۱=۰$$

که جواب منحصر به‌فرد $\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ را دارد. و چون، α زاویه‌ای است حاده، بنابراین $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ ؛ و $\widehat{BAD}=۲\alpha=\frac{۲\pi}{۳}$.

۵. $(x_۰ ، y_۰ ، z_۰)$ را جوابی ازدستگاه می‌گیریم که با شرط $z_۰\geqslant ۰$ سازگار باشد. این برابری‌های عددی باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} y_۰+۲=(۳-x_۰)^۳ \\ ۲z_۰y_۰-y_۰^۲+۴z_۰-۲y_۰=۹+۴y_۰ \\ x_۰^۲-۴x_۰=-z_۰^۲ \end{cases} \qquad (۴)$$

اگردربرابری دوم، بخش مجذورکامل نسبت به $y_۰$ و دربرابری سوم، بخش مجذور کامل نسبت بـه $x_۰$ را جدا کنیم، می‌توان ایـن نابرابری‌ها را این‌طور نوشت:

$$\begin{cases} (۳-x_۰)^۳=y_۰+۲ \\ (y_۰+۳-z_۰)^۲=z_۰^۲-۲z_۰ \\ (x_۰-۲)^۲=۴-z_۰^۲ \end{cases}$$

ازاین‌جا روشن می‌شود که بایدنابرابری‌های $z_۰^۲-۲z_۰\geqslant ۰$ ، $۴-z_۰^۲\geqslant ۰$ برقرار باشند. به‌جزاین،داشتیم: $z_۰\geqslant ۰$. به‌این‌ترتیب، اگر $(x_۰ ، y_۰ ، z_۰)$ جوابی سازگار با شرط $z_۰\geqslant ۰$ باشد، باید نابرابری‌های زیربرقرارباشند:

$$\begin{cases} z_۰(z_۰-۲)\geqslant ۰ \\ -۲\leqslant z_۰\leqslant ۲ \\ z_۰\geqslant ۰ \end{cases}$$

و این نابرابری‌ها، تنها به ازای $z_\circ=۲$ ، $z_\circ=۰$ برقرارنـد؛ ولی دراین صورت‌ازبرابری‌های (۴)نتیجه‌می‌شود که یا: $x_\circ=۴$، $y_\circ=-۳$، $z_\circ=۰$ ویا $x_\circ=۲$ ، $y_\circ=-۱$ ، $z_\circ=۲$. به سادگی می‌توان تحقیق‌کرد که هر دو جواب درمعادلهٔ اصلی صدق می‌کنند.

پاسخ: $(۴ ، -۳ ، ۰)$ ، $(۲ ، -۱ ، ۲)$.

۶. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول نامعادله، ازشرط $۵^x-۷\geqslant ۰$ به دست می‌آید، یعنی $\log_۵ ۷\leqslant x<+\infty$ نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است

$$\sqrt{۲(۵^x+۲۴)}\geqslant\sqrt{۵^x+۷}+\sqrt{۵^x-۷}$$

چون، درحوزهٔ تعریف نامعادله، هر دوطرف غیر منفی‌اند، بنابراین، می‌توان دوطرف نامعادله را مجذور کرد:

$$۲(۵^x+۲۴)\geqslant ۵^x+۷+۵^x-۷+۲\sqrt{۵^{۲x}-۴۹}$$

ویا

$$۲۴\geqslant\sqrt{۵^{۲x}-۴۹}$$

بازهم، دوطرف این نامعادله، درحوزهٔ تعریف غیرمنفی‌اند وبنابراین می‌توان دوطرف را مجذورکرد:

$$۵۷۶\geqslant ۵^{۲x}-۴۹$$

که با نامعادلهٔ مفرض هم‌ارزاست وجوابی به‌صورت $-\infty<x\leqslant ۲$ دارد. ازاین جواب‌ها،تنها آن‌هایی قابل قبول‌اند که درشرط $\log_۵ ۷\leqslant x<+\infty$ صدق کنند.

پاسخ: $\log_۵ ۷\leqslant x\leqslant ۲$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ $(n\in Z)$؛ ۲. ۵ ساعت؛

۳. مکعب مستطیلی که ضلع قاعدهٔ آن به طول ۲ سانتیمتر و یال جانبی آن بـه طول ۱ سانتیمتر باشد، محیط مجهول برابر است با ۶ سانتیمتر ؛

۴. $\frac{\pi}{۶}$ ۵. $(۲ ، -۳ ، ۳)$ ، $(۱ ، ۰ ، ۰)$ ؛ ۶. $\log_{۱۳} ۵\leqslant x\leqslant ۱$.

گروه سوم. ۱. $x=۲n\pi$ $(n\in Z)$؛ ۲. ۴ ساعت؛

۳. مکعب مستطیلی که طول ضلع‌های قاعدهٔ آن، برابر ۴ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر باشد، حجم ــ ۳۲ سانتیمترمکعب؛ ۴. $\frac{\pi}{۳}$ ؛

۵. $(-4, 2, 0)$ ،$(-2, 1, 2)$؛   ۶. $\log_{17} 8 \leqslant x \leqslant 1$.

گروه چهارم. ۱. $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $(n \in Z)$؛   ۲. ۳ ساعت؛

۳. مکعب مستطیلی که طول ضلع‌های قاعدهٔ آن برابر ۱ سانتیمتر و ۰/۵ سانتیمتر وطول یال جانبی آن ۱ سانتیمتر باشد، محیط مجهول برابر است با ۳ سانتیمتر؛

۴. $\frac{2}{3}\pi$؛   ۵. $(2, 2, -1)$ ،$(0, 1, 1)$ ،$(0, 1, 0)$ ،$(0, 1, 0)$؛

۶. $\log_{15} 9 \leqslant x \leqslant 1$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. با استفاده از رابطه‌های

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ و $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$، معادلهٔ مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x$$

یا

$$2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

و یا

$$2\sqrt{2}\cos x\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right] = 0$$

که با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos x = 0 \ , \ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

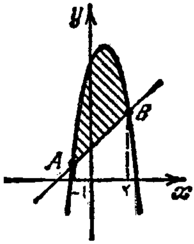
که با حل آن‌ها، جواب‌های معادلهٔ مفروض به‌دست می‌آید.

پاسخ: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x = n\pi + \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$ $(k, n \in Z)$

۲. چون داریم: $-2x^2 + 3x + 6 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 7\frac{1}{8}$،

بنابراین نمودار تابع $y(x) = -2x^2 + 3x + 6$ یك سهمی است که

شاخه‌های آن به‌طرف پایین ورأس آن در نقطهٔ $\left(\frac{3}{4}, 7\frac{1}{7}\right)$ است. نمودار تابع $x=x+2$ خط راستی است که سهمی را در نقطهٔ A و B قطع می‌کند و مختصات آن‌ها را می‌توان از حل دستگاه زیر به‌دست آورد:



شکل ۸۱

$$\begin{cases} y=-2x^2+3x+6 \\ y=x+2 \end{cases} \qquad (1)$$

جواب‌های این دستگاه عبارت است از:

$x_1=-1$ ، $y_1=1$ و $x_2=2$ ، $y_2=4$، یعنی خط راست، سهمی را در دو نقطهٔ $A(-1, 1)$ و $B(2, 4)$ قطع می‌کند (شکل ۸۱). شکل مورد نظر، زیر سهمی $y=-2x^2+3x+6$ وبالای خط راست $y=x+2$، درفاصلهٔ از ۱— تا ۲ قراردارد. ومساحت آن، به‌این ترتیب، محاسبه می‌شود:

$$S=\int_{-1}^{2}[(-2x^2+3x+6)-(x+2)]dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2}=9$$

پاسخ: ۹ واحد مربع.

۳. سرعت کشتی‌ها را x کیلومتر در ساعت وسرعت آب رودخانه را y کیلومتر در ساعت می‌گیریم. از لحظه‌ای که کلك در بند A آغاز به‌حرکت می‌کند تا لحظه‌ای که کشتی دوم به‌آن می‌رسد، $\frac{144}{y}$ ساعت طول می‌کشد. کشتی دوم، در این فاصله، $\frac{144}{x+y}$ ساعت درراه بوده است (کشتی دوم درجهت جریان‌آب حرکت می‌کند و، بنابراین، سرعت آن نسبت به‌ساحل، برابر $(x+y)$ کیلومتردرساعت است). ازفرض مساله، معلوم می‌شود که باید این برابری برقرارباشد:

$$\frac{144}{y}-\frac{144}{x+y}=40 \qquad (2)$$

در این $\frac{۱۴۴}{y}$ ساعت، کشتی اول توانسته است ۳۲۴ کیلومتر در جهت جریان آب با سرعت $(x+y)$ کیلومتر در ساعت پیش‌برود، سپس در بندر B به‌اندازهٔ ۱۸ ساعت توقف کند و ۱۴۴ کیلومتر (۱۸۰ − ۳۲۴) با سرعت $(x-y)$ کیلومتر در ساعت در خلاف جهت جریان آب حرکت کند. بنابراین، این برابری برقرار است.

$$\frac{144}{y}=\frac{324}{x+y}+18+\frac{144}{x-y} \qquad (3)$$

به‌این ترتیب، می‌توانیم به‌کمك دستگاه شامل دومعادلهٔ (۲) و(۳)، مقدارهای x و y را پیدا کنیم. از معادلهٔ(۲) به‌دست می‌آید: $x=\frac{5y^2}{18-5y}$، که اگر آن‌را به‌جای x درمعادلهٔ(۳) قراردهیم، بعداز تقسیم دوطرف معادله‌بر ۱۸، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{8}{y}=\frac{18-5y}{y}+1+\frac{4(18-5y)}{5y^2-9y}$$

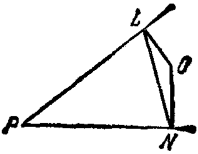
که اگرمخرج‌ها را ازبین‌ببریم، به‌دست می‌آید:

$$10y^2-33y+9=0$$

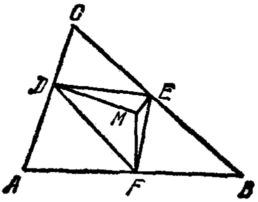
این معادلهٔ درجه دوم، دوریشه دارد: $y_1=\frac{3}{10}$ ، $y_2=3$. مقدارهای‌متناظر x چنین می‌شود: $x_1=\frac{3}{110}$ و $x_2=15$. ازفرض مساله معلوم است که $x>y$. واین‌شرط تنها باجواب دوم دستگاه سازگاراست.

پاسخ: سرعت کشتی‌ها ۱۵ کیلومتر درساعت وسرعت جریان آب رودخانه ۳ کیلومتر درساعت.

۴. اگر نقطهٔ O در داخل زاویهٔ حادهٔ LPN واقع باشد (شکل ۸۲)، آن وقت، عمودهای OL و ON، که برضلع‌های این‌زاویه رسم‌شوند، به‌ترتیب، خود نیم‌خط‌های PL و PN راقطع می‌کنند (و نه‌امتداد آن‌ها را ازطرف رأس). بنابراین پاره‌خط LN، که پای عمودها را به‌هم وصل می‌کند، در داخل زاویه قراردارد، به‌نحوی که رأس P ونقطهٔ O، دردوطرف مختلف این پاره‌خط واقع می‌شوند.



شکل ۸۲



شکل ۸۳

بنابراین، چون زاویه‌های مثلث ABC حاده‌اند، پای عمودهایی که ازنقطهٔ M برضلع‌های آن فرود می‌آید، روی ضلع‌های مثلث‌قراردارند ونه درامتدادآن‌ها ازطرف رأس‌های مثلث. ضمناً، M نقطهٔ داخلی مثلثی خواهد بود که منطبق برپای سه عمود باشند.

پای عمودهای واردبرضلع‌های AC، BC و AB را، به‌ترتیب، D، E و F می‌گیریم (شکل۸۳). چون M، نقطهٔ درونی مثلث DEF است،پس

$$S_{DEF}=S_{DEM}+S_{EFM}+S_{DMF}=\frac{1}{2}|DM|\cdot|EM|\cdot\sin\widehat{DME}+$$

$$+\frac{1}{2}|EM|\cdot|FM|\cdot\sin\widehat{EMF}+\frac{1}{2}|DM|\cdot|MF|\cdot\sin\widehat{DMF}$$

وچون $\widehat{DME}=\pi-\widehat{C}$، $\widehat{EMF}=\pi-\widehat{B}$ و $\widehat{DMF}=\pi-\widehat{A}$،
درنتیجه :

$$S_{DEF}=\frac{1}{2}|DM|\cdot|EM|\cdot\sin\hat{C}+\frac{1}{2}|EM|\cdot|FM|\cdot\sin\hat{B}+$$

$$+\frac{1}{2}|DM|\cdot|MF|\cdot\sin\hat{A}$$

مساحت مثلث ABC را، می‌توان چنین نوشت:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB|\cdot\sin\hat{A}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\hat{B}=$$

$$=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin C$$

ازاین رابطه‌ها، به‌دست می‌آید:

$$sin A=\frac{۲S_{ABC}}{|AC|\cdot|AB|}, \qquad sin B=\frac{۲S_{ABC}}{|AB|\cdot|BC|},$$

$$sin C=\frac{۲S_{ABC}}{|AC|\cdot|BC|}$$

که اگر این مقدارها را در رابطهٔ مربوط به S_{DEF} قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$S_{DEF}=\left(\frac{|DM|\cdot|EM|}{|AC|\cdot|BC|}+\frac{|EM|\cdot|FM|}{|AB|\cdot|BC|}+\frac{|DM|\cdot|MF|}{|AC|\cdot|BA|}\right)S_{ABC}=$$

$$=\left(\frac{mk}{ab}+\frac{nk}{ac}+\frac{mn}{bc}\right)S_{ABC}=\frac{mkc+nkb+mna}{abc}S_{ABC}$$

که از آن‌جا نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث DEF به‌دست می‌آید.

پاسخ: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{abc}{mkc+nkb+mna}$.

۵. ازمعادلهٔ دوم دستگاه، y را برحسب x محاسبه می‌کنیم و برای سادگی کار $۴^{sin^۲x}+۴^{cos^۲x}$ را a می‌نامیم. در این صورت، معادلهٔ دوم دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$(۲۵-۶a)y^۲+(۶-۲a)y+۱=۰ \qquad (۴)$$

ثابت‌می‌کنیم که، برای‌هرجواب دستگاه، نمی‌تواند برابری $۲۵-۶a=۰$ برقرار باشد.

اگر این برابری برقرار باشد، یعنی داشته‌باشیم: $a=\frac{۲۵}{۶}$، آن‌وقت‌از معادلهٔ(۴) به‌دست می‌آید: $y=\frac{۳}{۷}$. ولی دراین‌صورت، باتوجه به‌معادلهٔاول دستگاه، به‌دست می‌آید.

$$-\frac{۳}{۷}\leqslant y sin x=log_۲\left|\frac{y sin x}{۱+۳y}\right|=log_۲\left|\frac{۳ sin x}{۱۶}\right|\leqslant log_۲\frac{۳}{۱۶}\leqslant -۲$$

واین به‌معنای آن است که، جواب‌دستگاه هرچه‌باشد، برابری $۲۵-۶a=۰$ برقرارنیست.

اکنون، معادلهٔ درجه دوم(۴) را، نسبت به‌مجهول y، حل می‌کنیم:

$$y_{1,2}=\frac{-(3-a)\pm\sqrt{a^2-16}}{25-6a}$$

وچون داریم:

$$a^2-16=(4^{sin^2x}+4^{cos^2x})^2-16=(4^{sin^2x}-4^{cos^2x})^2$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$y_1=\frac{2\times 4^{sin^2x}-3}{25-6\left(4^{sin^2x}+4^{cos^2x}\right)},$$

$$y_2=\frac{2\times 4^{cos^2x}-3}{25-6\left(4^{sin^2x}+4^{cos^2x}\right)},$$

به‌این‌ترتیب، دستگاه مفروض، بامجموعهٔ دودستگاه زیرهم‌ارز می‌شود که، به‌ترتیب، آن‌هارا I و II می‌نامیم:

$$\begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right| \\ y=\dfrac{2\times 4^{sin^2x}-3}{25-6\left(4^{sin^2x}+4^{cos^2x}\right)} \end{cases},$$

$$\begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right| \\ y=\dfrac{2\times 4^{cos^2x}-3}{25-6\left(4^{sin^2x}+4^{cos^2x}\right)} \end{cases}$$

ابتدا دستگاه I را حل می‌کنیم. با استفاده از معادله، دوم دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱+۳y}{y}=۳+\frac{۱}{y}=۳+\frac{۲۵-۶\left(۴^{sin^۲x}+۴^{cos^۲x}\right)}{۲\times۴^{sin^۲x}-۳}=$$

$$=\frac{۱۶-۶\times۴^{cos^۲x}}{۲\times۴^{sin^۲x}-۳}=\frac{۲\times۴^{cos^۲x}\left(۲\times۴^{sin^۲x}-۳\right)}{۲\times۴^{sin^۲x}-۳}=$$

$$=۲\times۴^{cos^۲x}$$

دراین‌جا، ازاین‌حقیقت‌استفاده کردیم که $y\neq ۰$ است، زیرا درغیراینصورت، درمعادلهٔ اول، عبارت $log_۲\left|\frac{y\,sin\,x}{۱+۳y}\right|$ بی‌معنامی‌شود. اکنون، اگر $۲\times۴^{cos^۲x}$ را به‌جای $\frac{۱+۳y}{y}$ در سمت راست معادلهٔ اول دستگاه بگذاریم، به دست می‌آید

$$log_۲\left|\frac{y\,sin\,x}{۱+۳y}\right|=log_۲|sin\,x|-log_۲\left|\frac{۱+۳y}{y}\right|=$$

$$=log_۲|sin\,x|-log_۲(۲\times۴^{cos^۲x})=log_۲|sin\,x|-۱-۲\,cos^۲x$$

با توجه به شرط $y\leqslant ۱$ مسأله، و، همچنین، نابرابری‌های واضح

$$log_۲|sin\,x|\leqslant ۰ \quad \text{و} \quad cos^۲x\geqslant ۰ \qquad (۵)$$

به‌دست می‌آید:

$$-۱\leqslant y\,sin\,x=log_۲|sin\,x|-۱-۲\,cos^۲x\leqslant -۱ \qquad (۶)$$

اکنون، روشن است که همهٔ‌نابرابری‌های (۵) و (۶)، درواقع برابری‌هستند و باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} y\,sin\,x=-۱\\ log_۲|sin\,x|=۰\\ cos\,x=۰\end{cases}$$

ویا هم‌ارزآن‌ها:

$$\begin{cases} y\,sin\,x=-۱\\ |sin\,x|=۱\end{cases}$$

اگر $\sin = -1$ ، یعنی اگر $x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$ $(n \in Z)$ ، آن وقت $y = 1$. اگـر این مقدارها را درمعادلهٔ دوم دستگاه، به‌جای x و y، قرار دهیم. به بـرابـری نادرست $1 = -1$ می‌رسیم. اگر $\sin = 1$ ، یعنی اگر $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ $(n \in Z)$ ، آن وقت $y = -1$ ؛که اگر به‌جای x و y در معادله‌های دستگاه I قرار دهیم، معلوم‌می‌شود که درهردوی‌آن‌ها صدق‌می‌کند. به‌این ترتیب، دستگاه I دارای بی‌نهایت جواب، به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \in Z) \\ y = -1 \end{cases}$$

حالا، به حل دستگاه II می‌پردازیم. با استفاده از معادلهٔ دوم دستگاه، شبیه حالت قبل، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1+3y}{y} = 2 \times 4^{\sin^2 x}$$

اگـر $2 \times 4^{\sin^2 x}$ را به‌جـای $\frac{1+3y}{y}$ درمعادلهٔاول دستگاه قراردهیم، مثل حالت قبل، به‌دست می‌آید:

$$y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\sin^2 x$$

اکنون اگـر به شرط $y \geqslant 1$ و، همچنین نابرابری‌هـای روشن $\sin^2 x \geqslant 0$ و $\log_2 |\sin x| \leqslant 0$ توجه کنیم، مثل حالت قبل، به‌دست می‌آید:

$$-1 \leqslant y \sin x = \log_2 |\sin x| - 1 - 2\sin^2 x \leqslant -1$$

و از آن‌جا، نتیجه می‌شود که برای جواب‌های II ، باید این شرطها برقرار باشد:

$$\begin{cases} y \sin x = -1 \\ \log_2 |\sin x| = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

ولی دوبرابری آخر این شرطها، نمی‌توانند باهم برقرار باشند و، بنابراین، دستگاه II جواب ندارد.

پاسخ : $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n\in Z)$ ، $y=-1$.

۶. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول این نامعادله، عبارت است از

$$-3\leqslant x<+\infty$$

این بازه را به دو مجموعه تقسیم می کنیم:

$$-3\leqslant x<-1 \quad \text{و} \quad -1\leqslant x<+\infty.$$

نامعادلهٔ مفروض را، درهریك ازمجموعه‌ها، به‌طور جداگانه، حل می کنیم.

a) $-3\leqslant x<-1$. در ایـن فاصله، سمت چپ نامعادلهٔ مفروض غیرمنفی وسمت‌راست آن منفی است. درنتیجه، تمامی این فاصله، جواب‌های نامعادلهٔ مفروض‌اند.

b) $-1\leqslant x<+\infty$. درایـن بازه، دو طرف نامعـادلهٔ مفروض غیرمنفی‌اند و نامعادلهٔ مفروض، دراین بازه، هم‌ارز می‌شود با نامعادلهٔ

$$x+3>(x+1)^2 \implies x^2+x-2<0$$

که مجموعهٔ جواب‌های آن ، عبارت است از : $-2<x<1$؛که با توجه به شرط $-1\leqslant x<+\infty$ ایـن حالت، به جواب‌هـای $-1\leqslant x<1$ می‌رسیم. اجتماع مجموعهٔ جواب‌های دو حالت، ما را به‌مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اصلی می رساند.

پاسخ : $-3\leqslant x<1$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم: ۱. $x=k\pi$ ، $x=n\pi+\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}$ $(k , n\in Z)$ ؛

۲. ۶۲/۵ ؛ ۳. $V_1=5$ ، $V_2=4$ (کیلومتر درساعت) ؛

۴. $\frac{(l\sin\gamma+m\sin\alpha+n\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$ ؛

۵. (x , y) ، که درآن : $x=n\pi$ $(n\in Z)$ و $y=1$ ؛

۶. $-14\leqslant x<2$.

گروه‌سوم: ۱. $x=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}$ ، $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(n , k\in Z)$;

۲. ۴/۵ ؛ ۳. $V_1=5$ ، $V_2=4/5$ (کیلومتر درساعت) ؛

۴. $h_a=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}$ ، $h_b=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\beta}$ ،

$h_c=\frac{\sqrt{2S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\gamma}$ ؛

۵. (x , y) ، که در آن : $x=n\pi \quad (n\in Z)$ ، $y=1$ ؛

۶. $-46\leqslant x<3$.

گروه چهارم ۱. $x=k\pi$ ، $x=n\pi-\frac{\pi}{3}+(-1)^n.\frac{\pi}{6} \quad (k , n\in Z)$ ؛

۲. ۳۲ ؛ ۳. سرعت آب از لولهٔ بزرگتر برابر ۵ مترمکعب درساعت و سرعت آب از لولهٔ کوچکتر برابر ۲ متر مکعب در ساعت است؛

۴. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}.S}$ که در آن:

$2p=a+b+c$ ، $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ؛

۵. (x , y) ، که در آن : $x=2n\pi \quad (n\in Z)$ ، $y=\frac{1}{2}$ ؛

۶. $-27\leqslant x<9$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. با توجه به‌این‌که شرط‌های $x+3>0$ و $3x-6>0$ باید، به طور هم زمان، برقرارباشند، حوزهٔ تعریف معادله عبارت است از بازهٔ $2<x<+\infty$ در این حوزه، معادلهٔ مفروض با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\frac{x+3}{21}=\frac{2}{3x-6}\Longrightarrow x^2+x-20=0$$

که دارای دو ریشه است: $x_1=4$ و $x^2=-5$. از این دو ریشه، تنها ریشهٔ $x_2=4$ درحوزهٔ تعریف معادله قرار دارد.

پاسخ : $x=4$.

۲. معادلهٔ مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\cos 3x.(2\cos 3x-1)=0$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم ارز است:

$$\cos 3x=0 \quad \text{و} \quad \cos 3x=\frac{1}{2}$$

که با حل آن‌ها، جواب‌های معادلهٔ مفروض به‌دست می‌آید.

پاسخ : $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{2n\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$ $(k \text{ ، } n\in Z)$.

۳. معادلهٔ سهمی $y=4x-x^2$ را به‌این صورت می‌نویسیم :

$$y=-(x-2)^2+4$$

از این جا معلوم می‌شود که راس سهمی در نقطهٔ $D(2 \text{ ، } 4)$ است و شاخه‌های سهمی به‌طرف پایین امتداد دارند. این سهمی محور Ox را در نقطه‌های به طول های $x_1=0$ و $x_2=4$ قطع می کند. از فرض مساله معلوم است که طول راس B از مثلث ABC ، برابر است با طول راس C و، بنابراین، روی بخشی از سهمی قرار می گیرد که بالای پاره خط $[0 \text{ ، } 4]$ از محور Ox است.

ABC را مثلثی می گیریم که با شرط‌های مساله سازگار باشد (شکل ۸۴). S_{ABC} ، مساحت این مثلث را محاسبه می کنیم.

طول نقطهٔ B را x می گیریم. چون نقطهٔ B روی سهمی‌است، بنابراین، عرض آن مثبث و برابر است بـا $4x-x^2$ ؛ یعنی $|BC|=4x-x^2$. چون طول نقطهٔ c هم برابر x است، بنابراین $|AC|=4+x$. اگر $S_{ABC}=S(x)$ فرض کنیم، داریم:

$$S(x)=S_{ABC}=\frac{1}{2}|BC|.|AC|=\frac{1}{2}(x+4)(4x-x^2)=$$

$$=\frac{16x-x^3}{2}$$

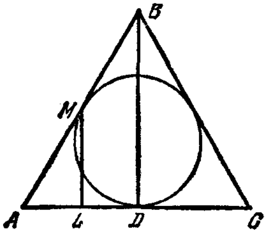
مساله، منجر به این می‌شود که حداکثر تابع $S(x)=\frac{16x-x^3}{2}$ را، در بازهٔ $[0 \text{ ، } 4]$ ، پیدا کنیم. برای این کـه حداکثر مقدار ممکن S(x) را در بازهٔ $[0 \text{ ، } 4]$ به‌دست آوریم ، باید مقدار آن را در دو انتهای بـازه (یعنی به‌ازای ۰ ، ۴) و در نقطه‌های بحرانی واقع دراین فاصله پیدا و ازبین آن‌ها،

بزرگترین مقدار را انتخاب کنیم. $S(x)$ یك چند جمله‌ای است و، بنابراین، نقطه‌های بحرانی آن، جواب‌های معادلهٔ $S'(x)=0$ هستند (چند جمله‌ای، در تمام نقطه‌های خود، مشتق پذیر است):

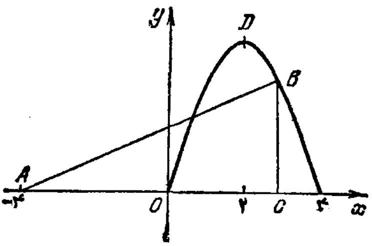
$$S'(x)=\frac{1}{2}(16-3x^2)=0$$

که ریشه‌های آن، عبارتند از

$$x_1=-\frac{4}{\sqrt{3}}, \quad x_2=\frac{4}{\sqrt{3}}$$



شکل ۸۵



شکل ۸۴

از این دو ریشه، تنها $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$، دربازهٔ $[0, 4]$ قرار دارد.

مقدار $S(x)$ را در نقطه‌های $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$، $x=0$ و $x=4$ محاسبه می‌کنیم. چون

$$S(0)=S(4)=0 \quad , \quad S\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{64}{\sqrt{3}}-\frac{64}{3\sqrt{3}}\right)>0$$

بنابراین $S_{max}=S\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. بنابراین، طول راس مجهول B برابراست با $x_0=\frac{4}{\sqrt{3}}$. ولی دراین صورت

$$y_0=4x_0-x_0^2=\frac{16}{\sqrt{3}}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)$$

پاسخ: $B\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)\right)$.

۴. ABC را مثلثی می‌گیریم که در فرض داده شده است (شکل ۸۵) پای

ارتفاع وارد از راس B برضلع AC ازمثلث ABC را D می گیریم. مثلث ABC متساوی‌الساقین است ، بنابراین BD نیمساز زاویهٔ ABC می‌شود. چون دایره برضلع های AB و BC مماس است بنابراین مرکز آن ، روی خط راست BD قرار دارد و چون $BD \perp AC$ ، دایره در نقطهٔ D برضلع AC مماس می‌شود. طول پاره خطهای مماسی که از یك نقطه بردایره رسم شوند، برابرند: $|AM|=|AD|$. مثلث‌های ABD و AML متشابه‌اند، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر است با نسبت مجذورهای دو ضلع متناظر درآن‌ها :

$$\frac{S_{AML}}{S_{ABD}}=\frac{|AM|^۲}{|AB|^۲}=\frac{|AD|^۲}{|AB|^۲}=\cos^۲\widehat{BAC}=\cos^۲\widehat{BCA}$$

و چون داریم:

$$S_{AML}=S_{ABC}-S_{LMBC}=۱-s \text{ ،}$$

$$S_{ABD}=S_{DBC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\cos^۲\widehat{BCA}=\frac{۱-s}{\frac{۱}{۲}}$. چون $\widehat{BCA}$ ، زاویهٔ مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین است، بنابراین ، زاویه‌ای است حاده و، درنتیجه، کسینوس آن مثبت است و داریم: $\cos\widehat{BCA}=\sqrt{۲(۱-s)}$. از آن‌جا

$$\widehat{BCA}=\arccos\sqrt{۲(۱-s)}$$

۵. معادلهٔ اول را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$۳x^۲+(۹a^۲-۲)x+۳a^۲-۱=۰$$

و چون مبین آن

$$\Delta=(۹a^۲-۲)^۲-۱۲(۳a^۲-۱)=(۹a^۲-۴)^۲\geqslant ۰$$

بنابراین، معادله به‌ازای هرمقدار پارامتر a ، دارای جواب است.

معادلهٔ دوم، به‌ازای مقدارهایی از a که درشرط $۳^a-\frac{۱}{۲}\leqslant ۰$ صدق کنند، جواب ندارد، زیرا به‌ازای این مقدارهای a ، $\log_۳\left(۲^a-\frac{۱}{۲}\right)$ بی‌معنا می‌شود. بنابراین ، هیچ یك از این مقدارهای a ، با شرطهای مساله

سازگار نیستند.

ثابت می‌کنیم که معادلهٔ دوم، به‌ازای مقدارهایی از a که در شرط $3^a-\frac{1}{2}>0$ صدق کنند، نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد. فرض می‌کنیم، این طور نباشد، یعنی فرض می‌کنیم مقدار a_0 وجود داشته باشد که درشرط $3^{a_0}-\frac{1}{2}>0$ صدق کند و، به‌ازای آن، دو جواب مختلف x_1 ، x_2 برای معادلهٔ‌دوم پیدا شود. برای‌مشخص‌بودن ضلع، فرض می‌کنیم $x_1<x_2$. آن وقت، باید این برابری‌ها برقرار باشند:

$$x_1+(3a_0-2)^2\cdot 3^{x_1}=(8^{a_0}-4)\cdot \log_2\left(3^{a_0}-\frac{1}{2}\right)-3x_1^3$$

$$x_2+(3a_0-2)^2\cdot 3^{x_2}=(8^{a_0}-4)\cdot \log_2\left(3^{a_0}-\frac{1}{2}\right)-3x_2^3$$

از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$(x_2-x_1)+(3a_0-2)^2(3^{x_2}-3^{x_1})+3(x_2^3-x_1^3)=0$$

ولی $x_1<x_2$ و، بنابراین، همهٔ جمله‌های سمت چپ برابری مثبت می‌شوند و، در نتیجه، مجموع آن‌ها نمی‌تواند برابر صفر باشد. به‌این ترتیب، معادلهٔ دوم، به‌ازای هرمقدار پارامتر a که درشرط $3^a-\frac{1}{2}>0$ صدق کند، نمی‌تواند بیشتر از یك جواب داشته باشد.

مقدارهایی از a که، به‌ازای آن‌ها، مبین معادلهٔ اول مخالف صفرباشد، با شرط مساله سازگار نیستند، زیرا، در چنین حالتی، معادله اول دو جواب دارد، درحالی که معادلهٔ دوم بیش از یك جواب ندارد.

تنها حالتی می‌ماند که مبین معادلهٔ‌اول برابرصفرشود، که دراین‌صورت، داریم: $a=\frac{2}{3}$ و $a=-\frac{2}{3}$.

ابتدا $a=-\frac{2}{3}$ می‌گیریم. دراین حالت، چون

$$3^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\text{ ، }\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\quad\text{و}\quad \frac{1}{9}<\frac{1}{8}$$

بنابرایـن: $3^{a}-\frac{1}{2}=3^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}<0$ در نتیجه، $a=-\frac{2}{3}$ باشرط‌های مساله نمی‌سازد، زیرا به ازای مقدار، معادلهٔ دوم مفهوم خـود را از دست می‌دهـد.

اکنون $a=\frac{2}{3}$ می گیریم. در این حالت داریم:

$$3^{a}-\frac{1}{2}=3^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}>0$$

و معادلهٔ دوم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x+3x^{3}=0$$

که تنها یك ریشه دارد: $x=0$. چون، به‌ازای $a=\frac{2}{3}$، هریك از دو معادلهٔ مفروض، یك جواب دارند، بنابراین، هرمقدار پارامتر a، باشرط‌های مساله سازگار است.

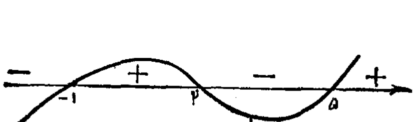
پاسخ: $a=\frac{2}{3}$.

۶. همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ نامعادله می‌بریم و به یك مخرج تبدیل می کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^{2}-4x-5}{x-2}<0 \qquad (1)$$

که با نامعادلهٔ اصلی هم‌ارز است و به‌راحتی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(x+1)(x-5)}{x-2}<0$$



شکل ۸۶

باروش فاصله‌ها، معلوم‌شود که مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله و، بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، شامل دو بازه است:

$x<-1$ و $2<x<5$

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=-1$ ؛

۲. $x=\frac{1}{5}k\pi$ ، $x=\frac{1}{5}n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{20}$ $(k ، n\in Z)$ ؛

۳. $B\left(\frac{1}{3} ، \frac{2}{9}\right)$ ؛ ۴. $\arcsin\sqrt{a}$ ؛ ۵. $a=\frac{1}{3}$ ؛

۶. $-2<x<1$ ، $x>3$.

گروه سوم. ۱. $x=3$ ؛

۲. $x=\frac{1}{14}k\pi$ ، $x=\frac{2}{7}n\pi\pm\frac{\pi}{28}$ $(k ، n\in Z)$ ؛

۳. $B\left(\frac{5}{\sqrt{3}} ، \frac{25}{3}(\sqrt{3}-1)\right)$ ؛ ۴. $\arccos\sqrt{2-4S}$ ؛

۵. $a=\frac{1}{4}$ ؛ ۶. $x<-3$.

گروه چهارم. ۱. $5=-5$ ؛

۲. $x=\frac{1}{5}k\pi$ ، $x=n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{30}$ $(k ، n\in Z)$ ؛

۳. $B\left(\frac{2}{3} ، \frac{8}{9}\right)$ ؛ ۴. $\mathrm{asc}\cos\sqrt{1-2a}$ ؛

۵. $a=-\frac{1}{2}$ ؛ ۶. $-4<x<-3$ ، $x>1$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. اگر همهٔ جمله‌ها را به‌سمت راست ببریم، بعد از یکی کردن مخرج‌ها، به نامعادلهٔ

$$\frac{۲۵x^{۲}-۳۰x-۹۱}{x-۲}\leqslant ۰ \qquad (۱)$$

می‌رسیم که با نامعادلهٔ مفروض هم‌ارز است. ریشه‌های سه جمله‌ای درجهٔ دوم صورت کسر عبارتند از: $x_۱=-۱/۴$ و $x_۲=۲/۶$ ، بنابراین، نامعادلهٔ (۱) هم‌ارز نامعادلهٔ زیر است:

$$\frac{(x-۲/۶)(x+۱/۴)}{x-۲}\leqslant ۰ \qquad (۲)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) تشکیل شده است ازهمهٔ جواب‌های معادلهٔ

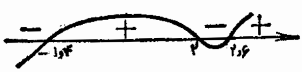
$$\frac{(x-۲/۶)(x+۱/۴)}{x-۲}=۰ \qquad (۳)$$

و همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ

$$\frac{(x-۲/۶)(x+۱/۴)}{x-۲}<۰ \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۳) ، دو ریشه دارد:

$$x_۱=-۱/۴ \quad و \quad x_۲=۲/۶$$



شکل ۸۷

با استفاده از روش فاصله‌ها (شکل ۸۷)، معلوم می‌شود که مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۴) از دو فاصله تشکیل شده است: $x<-\frac{۱}{۴}$ و $۲<x<۲/۶$.

پاسخ : $x\leqslant -۱/۴$ و $۲<x\leqslant ۲/۶$.

۴. با استفاده از رابطه‌های

$$\cos^{۲}\frac{x}{۲}=\frac{۱+\cos x}{۲} \ , \qquad \cos ۲x=۱-۲\sin^{۲}x \ ,$$

$$\cos\left(\frac{۵\pi}{۲}-x\right)=\sin x$$

معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۲\sin^{۲}x+۵\sin x-۳=۰ \qquad (۵)$$

که باحل آن، نسبت به $\sin x$ ، نتیجه می گیریم که معادلهٔ (۵) هم‌ارز مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر است:

$$\sin x=-۳ \quad \text{و} \quad \sin x=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ اول جواب ندارد و جواب‌های معادلهٔ دوم عبارتند از:

$$(n\in Z) \quad x=n\pi+(-۱)^{n}.\frac{\pi}{۶}$$

۳. فاصلهٔ A تا D را x کیلومتر می گیریم. از فرض مسالهٔ معلوم می‌شود که فاصلهٔ بین A و B برابر ۱۸۰+۲۷۰ ، یعنی ۴۵۰ کیلومتر وفاصلهٔ بین B و D برابر $(۴۵۰-x)$ کیلومتر است. اتومبیل اول، تا رسیدن به‌اتومبیل دوم، ابتدا فاصلهٔ از A تا B را، برابر ۴۵۰ کیلومتر، و سپس، فاصلهٔ B تا D را ، برابر $(۴۵۰-x)$ کیلومتر می‌پیماید ، یعنی روی هم $(۹۰۰-x)$ کیلومتر. اتومبیل دوم، تا رسیدن به اولی، ابتدا فاصلهٔ از C تا A را، برابر ۲۷۰ کیلومتر، و سپس، فاصلهٔ از A تا D را، برابر x کیلومتر ، (یعنی روی هم $(۲۷۰+x)$ کیلومتر، می‌پیماید. هردوی آن‌ها، در نقطهٔ D ، به‌یك اندازه توقف داشته‌اند. به‌این‌ترتیب، دواتومبیل، برای رسیدن به D، به‌یك اندازه زمان نیاز داشتند، بنابراین ، نسبت سرعت اتومبیل اول به سرعت اتومبیل دوم ، برابر است با نسبت فاصله‌هایی که طی کرده‌اند، یعنی

$$\frac{۹۰۰-x}{۲۷۰-x} \qquad (۶)$$

بعد از ملاقات، دو اتومبیل ، حرکت خود را بدون توقف ادامه دادند. اتومبیل اول، فاصلهٔ $|AD|$ برابر x کیلومتر و اتومبیل دوم، فاصلهٔ $|DB|$ برابر $(۴۵۰-x)$ کیلومتر را پیمودند. از D باهم حرکت‌کردند و باهم به مقصد رسیدند. بنابراین، نسبت سرعت‌های آن‌ها برابر است با

$$\frac{x}{۴۵۰-x} \qquad (۷)$$

چون سرعت اتومبیل‌ها ، بی‌تغییر بوده است، بنابراین، دو رابطهٔ (۶) و (۷) برابرند، یعنی

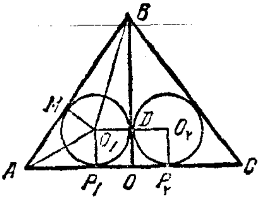
$$\frac{۹۰۰-x}{۲۷۰+x}=\frac{x}{۴۵۰-x}$$

که از آن به‌دست می‌آید: $x=۲۵۰$. چون فاصلهٔ A تا C برابر ۲۷۰ کیلومتر و فاصلهٔ A تا D برابر ۲۵۰ کیلومتر است، پس فاصلهٔ مجهول بین

D و C برابر ۲۰ کیلومتر می‌شود.

پاسخ : ۲۰ کیلومتر.

۴. زاویهٔ بین مولد و قاعدهٔ مخروط را α می گیریم. چون کره‌ها، در نقطه‌هایی بر قاعدهٔ مخروط مماس‌اند، که نسبت به‌نقطهٔ O ـ مرکز قاعدهٔ مخروط ـ قرینه یکدیگرند، بنا براین، این نقطه‌های تماس P_1 و P_2 (شکل ۸۸)، روی قطر قاعده قرار دارند؛ این قطر را AC می نامیم، ضمناً داریم:



شکل ۸۸

$$|OP_1| = |OP_1|$$

مرکز کره‌ها را O_1 و O_2 می گیریم. چون $O_1P_1 \perp AC$ و $O_2P_2 \perp AC$، بنابراین، شکل $P_1O_1O_2P_2$، مستطیلی است که برصفحهٔ گذرنده از ارتفاع BO و قطر قاعدهٔ AC قرار دارد. ولی دراین صورت، روشن است که این کره‌ها درنقطهٔ D، که برارتفاع BO قرار دارد، برهم مماس‌اند و، ضمناً D وسط پاره‌خط O_1O_2 است. چون بامخروط دوار قائم سروکار داریم، زاویهٔ بین مولد AB و قطر قاعدهٔ AC برابر است با زاویه بین مولد باصفحهٔ قاعده؛ یعنی $\widehat{BAO} = \alpha$.

نقطهٔ تماس کره به‌مرکز O_1 را باسطح جانبی مخروط، M می گیریم. از نقطهٔ M، صفحهٔ π را عمود بر محور مخروط رسم می کنیم. این صفحه، مخروط و کره را، در دایره‌هایی قطع می کندکه در نقطهٔ M برهم مماس‌اند. مرکز دایرهٔ اول، روی BO ـ ارتفاع مخروط ـ، و مرکز دایرهٔ دوم روی عمودی قرار داردکه ازنقطهٔ O_1 برصفحهٔ π رسم شود. چون هر دومرکز در صفحهٔ ABO قرار دارند، ونقطهٔ M (نقطهٔ تماس دو دایره) روی خط راستی است که مرکزهای دو دایره را به‌هم‌وصل می کند، بنا براین، نقطهٔ M درصفحهٔ ABO قرارد دارد و، درنتیجه، کرهٔ به‌مرکز O_1 درنقطهٔ M (که روی مولد AB قرارد دارد) برمخروط مماس است. دراین صورت، چون

$$|O_1P_1| = |O_1M| = 1$$

خط راست AO_1 نیمساز زاویهٔ BAO می‌شود: یعنی $\widehat{O_1AP_1} = \frac{\alpha}{2}$.

از مثلث قائم‌الزاویهٔ AO_1P_1 به دست می‌آید: $|AP_1| = cotg\frac{\alpha}{2}$.

چون $|P_1O| = 1$ ، پس

$$|AO| = |AP_1| + |P_1O| = 1 + cotg\frac{\alpha}{2}$$

حالا ، مساحت قاعدهٔ مخروط را محاسبه می کنیم (این مساحت را S می گیریم) :

$$S_{OCH} = \pi\left(1 + cotg\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

نقطهٔ O_1 روی نیمساز زاویهٔ ABO است، زیرا $|O_1D| = |O_1M|$ و، در نتیجه، $\widehat{DBO} = \frac{90° - \alpha}{2}$. از مثلث قائم‌الزاویهٔ BDO_1 به‌دست می‌آید:

$$|BD| = cotg\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

چون $|DO| = 1$ ، پس

$$|BO| = |BD| + |DO| = 1 + cotg\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

اکنون به‌محاسبهٔ حجم مخروط می‌پردازیم. چون داریم:

$$cotg\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{cotg 45° cotg\frac{\alpha}{2} + 1}{cotg\frac{\alpha}{2} - cotg 45°} = \frac{2cotg\frac{\alpha}{2}}{cotg\frac{\alpha}{2} - 1} - 1$$

بنابراین

$$V = V(\alpha) = \frac{2\pi}{3} cotg\frac{\alpha}{2} . \frac{\left(1 - cotg\frac{\alpha}{2}\right)^2}{cotg\frac{\alpha}{2} - 1}$$

مسأله منجر به‌این می‌شود که زاویهٔ α را، ازبازهٔ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، طوری پیدا کنیم که، به‌ازای آن، تابع $V(\alpha)$ به‌حداکثرمقدار خود برسد. $cotg\frac{\alpha}{2}$ را x

می‌گیریم. چون α را باید در بازهٔ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفت، بنابراین، مقدار متناظر x آن در بازهٔ $(1, +\infty)$ قرار می‌گیرد. نقطه‌های بحرانی تابع زیر را در بازهٔ $(1, +\infty)$ پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{x(1+x)^2}{x-1}$$

مشتق $f'(x)$، درهر نقطهٔ این بازه، وجود دارد:

$$f'(x)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{(1+x)(2x^2-3x-1)}{(x-1)^2}$$

اگر $f'(x)=0$ را درنظر بگیریم، این جواب‌ها به‌دست می‌آید:

$$x_1=-1,\ x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{4},\ x_3=\frac{3-\sqrt{17}}{6}$$

که x_2 در بازهٔ $(1, +\infty)$ قراردارد. بنابراین، برای تابع $f(x)$، در بازهٔ $(1, +\infty)$، تنها یك نقطهٔ بحرانی وجود دارد: $x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ چون $f'(x)$ درفاصلهٔ $\left(1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$ منفی ودرفاصلهٔ $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$ مثبت وضمناً، درنقطهٔ x_2 پیوسته است، بنابراین، $f(x)$ دراین نقطه، به‌حداقل مقدار خود می‌رسد. مقدارهای متناظر α، از معادلهٔ $cotg\frac{\alpha}{2}=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ به‌دست می‌آید.

پاسخ: $\alpha=2\operatorname{arccotg}\frac{3+\sqrt{17}}{4}$.

۵. نامعادله‌را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \qquad (8)$$

که درآن داریم:

$$\alpha=a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2},\ \beta=2(a^2-2),$$
$$\gamma=a+\sqrt{2}$$

مسأله را می‌توان به‌این صورت تنظیم کرد؛ همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۸)، شامل مجموعهٔ

$x>0$ باشد. ضریب α را، به‌صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\alpha=a^3-\sqrt{2}a^2+a^2-\sqrt{2}a-3a+3\sqrt{2}=$$
$$=a^2(a-\sqrt{2})+a(a-\sqrt{2})-3(a-\sqrt{2})=$$
$$=(a-\sqrt{2})(a^2+a-3)$$

وچون، ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم a^2+a-3 عبارتنداز $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

بنا براین

$$\alpha=(a-\sqrt{2})\left(a-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(a-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

۱) فرض کنید $a=\sqrt{2}$؛ دراین صورت، نامعادلهٔ (۸) چنین می‌شود:

$$0x^2+0x+2\sqrt{2}>0$$

که مجموعهٔ جواب‌های آن عبارت است‌از $-\infty<x<+\infty$، که شامل مجموعهٔ $x>0$ است. بنا براین $a=\sqrt{2}$، یکی‌ازجواب‌های مساله‌است.

۲) فرض کنید $a=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$؛ نامعادلهٔ(۸) چنین می‌شود:

$$(3+\sqrt{13})x+\sqrt{2}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}>0$$

که مجموعهٔ جواب‌های آن عبارت است‌از $x>\dfrac{\frac{1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{2}}{3+\sqrt{13}}$. چون عدد سمت راست نا برابری مثبت‌است، بنا براین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ(۸) شامل مجموعهٔ $x>0$ نیست؛ و، اگردقیق بگوییم، شامل بخشی‌ازاین‌مجموعه نیست، یعنی بخش

$$0<x\leqslant\frac{1+\sqrt{13}-2\sqrt{2}}{6+2\sqrt{13}}$$

بنا براین $a=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ باشرطهای مساله سازگارنیست.

۳) فرض کنید $a=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$. نامعادلهٔ (۸) چنین می‌شود:

$$(۳-\sqrt{۱۳})x+\frac{\sqrt{۱۳}-۱+۲\sqrt{۲}}{۲}>۰$$

ومجموعهٔ جواب‌های آن عبارت است از

$$x<\frac{\sqrt{۱۳}-۱+۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۱۳}-۶}$$

روشن است کـــه این مجموعـــه، شامـــل مجموعـــهٔ $x>۰$ نیست . بنابراین $a=\frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۲}$ جوابی ازمساله نیست.

بالاخره $\alpha\neq۰$ را C گیریم. یعنی $a\neq\sqrt{۲}$ ، $a\neq\frac{-۱-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ، $a\neq\frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۲}$.

۴) a را طوری می گیریم کـــه داشتـــه باشیم $\alpha<۰$؛ دراین‌صورت نامعادلهٔ درجه دوم(۸)، یا جواب ندارد ویا جواب‌های‌آن دریك بازه قرار گرفته‌اند. درهریك ازاین‌دوحالت، مجموعهٔ جواب‌ها، شامل مجموعهٔ $x>۰$ نمی‌شود. بنابراین، آن مقدارهایی از a که، به‌ازای‌آن‌ها، داشته‌باشیم $\alpha<۰$، با شرط‌های مساله سازگار نیستند.

۵) a را طوری می گیریم که داشته باشیم: $\alpha>۰$، $\beta-۴\alpha\gamma<۰$. دراین صورت، نامعادلهٔ(۸) برای همهٔ مقدارهای x، واز آن جمله $x>۰$، برقراراست. بنابراین، همهٔاین مقدارهای a باشرط‌های مساله سازگارند. آن را پیدا می‌کنیم. برای این‌منظور، باید دستگاه نامعادله‌های زیررا حل‌کنیم:

$$\begin{cases}\alpha>۰\\ \Delta<۰\end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases}(a-\sqrt{۲})\left(a-\frac{-۱-\sqrt{۱۳}}{۲}\right)\left(a-\frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۲}\right)>۰ \\ ۴(a^۲-۲)^۲-۴(a+\sqrt{۲})(a-\sqrt{۲})\times \\ \times\left(a-\frac{-۱-\sqrt{۱۳}}{۲}\right)\left(a-\frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۲}\right)<۰\end{cases} \qquad (۹)$$

اگرنامعادلهٔ اول را حل کنیم، به‌این جواب‌ها می‌رسیم:

$$\frac{-۱-\sqrt{۱۳}}{۲}<a<\frac{\sqrt{۱۳}-۱}{۲}\ ,\ \sqrt{۲}<a<+\infty$$

نامعادلهٔ دوم‌را، می‌توان این‌طور رنوشت:

$$(a+\sqrt{۲})(a-\sqrt{۲})(a-۱)>۰$$

حل این‌نامعادله‌هم، جواب‌های زیررا می‌دهد:

$$-\sqrt{۲}<a<۱ \text{ و } \sqrt{۲}<a<+\infty$$

جواب‌های دستگاه(۹)، عبارت است‌از جواب‌های مشترك معادلهٔ اول ومعادلهٔ دوم‌آن؛ یعنی

$$-\sqrt{۲}<a<۱ \text{ و } \sqrt{۲}<a<+\infty$$

۶) a را طوری می گیریم که داشته باشیم: $\alpha>۰$ و $\Delta=\beta^{۲}-۴\alpha\gamma=۰$.

چون $\Delta=-۴(a+\sqrt{۲})(a-\sqrt{۲})(a-۱)$

بنابراین، وقتی داریم $\Delta=۰$، که داشته باشیم: $a=\sqrt{۲}$ یا $a=-\sqrt{۲}$ یا $a=۱$. شرط $\alpha>۰$ تنها به‌ازای $a=۱$ و $a=-\sqrt{۲}$ برقراراست‌به‌ازای $a=۱$، نامعادلهٔ(۸) به‌این‌صورت درمی آید:

$$(\sqrt{۲}-۱)[x-(\sqrt{۲}+۱)]^{۲}>۰$$

که همهٔ مقدارهای x، به‌جز $x=\sqrt{۲}+۱$، درآن صدق می کنند. بنابراین، این مجموعهٔ جواب‌ها هم شامل مجموعهٔ $x>۰$ نیست ، زیرا شامل یکی از عضوهـای آن، یعنی $\sqrt{۲}+۱$ ، نیست. به این ترتیب، $a=۱$ جواب مساله نمی‌باشد. درحالت $a=-\sqrt{۲}$ ، نامعادلهٔ زیر چنین می‌شود:

$$۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})x^{۲}>۰$$

کـه برای همه مقدارهای x ، به جز $x=۰$ ، برقرار است،کـه در نتیجه، شامل مجموعهٔ $x>۰$ می‌شود؛ یعنی $= -\sqrt{۲}$ ، جوابی از مساله است.

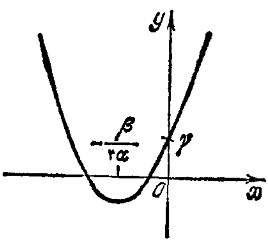
۷) a را طوری می گیریم که داشته باشیم :

$$\Delta=\beta^{۲}-۳\alpha\gamma>۰ \text{ و } \alpha>۰$$

دراین‌حالت، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۸) چنین است:

$$x<\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{۲\alpha} \text{ و } x>\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{۲\alpha}$$

این مجموعه تنها وقتی شامل مجموعه $x>0$ است که مقدار سه جمله‌ای درجه دوم $\alpha x^2+\beta\alpha+\gamma$ در نقطهٔ $x=0$، یعنی مقدار γ غیرمنفی، وطول $-\frac{\beta}{2\alpha}$ راس سهمی



شکل ۸۹

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

درسمت‌چپ مبدأ مختصات باشد (شکل ۸۹). به‌این‌ترتیب، وقتی درشرطهای مساله صدق می‌کند که داشته باشیم:

$$\alpha>0\ ,\ \Delta>0\ ,\ \gamma\geqslant 0\quad -\frac{\beta}{2\alpha}<0$$

بنابراین، باید جواب‌های دستگاه نامعادله‌های زیر را پیدا کنیم:

$$\left\{\begin{array}{l}(a-\sqrt{2})\left(a-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\left(a-\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right)>a\\ (a^2-2)(a-1)<0\qquad(10)\\ a+\sqrt{2}\geqslant 0\\ 2(a^2-2)>0\end{array}\right.$$

ازنامعادله‌های دوم و چهارم دستگاه نتیجه می‌شود که $\alpha<1$؛ ازنامعادله‌های سوم وچهارم نتیجه می‌شود: $a>\sqrt{2}$. بنابراین دستگاه (۱۰) جواب ندارد، یعنی دراین حالت نمی‌توان مقداری برای a پیدا کرد که با شرطهای مساله سازگار باشد. به‌این ترتیب، همهٔ حالت‌های ممکن را بررسی کردیم.

پاسخ $-\sqrt{2}\leqslant a<1$ ، $\sqrt{2}\leqslant a<+\infty$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $-\infty<x\leqslant -2/5$ ، $1/5\leqslant x<2$ ؛

۲. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$ ؛ ۳. ۱۶۰ کیلومتر ؛

۴. $(6+\sqrt{12})r$ ؛ ۵. $-\sqrt{3}\leqslant a<1$ $\sqrt{3}\leqslant a<+\infty$ ؛

گروه سوم. ۱. $-\infty<x\leqslant -5$ ؛ $2\leqslant x<4$ ؛

۲. $x=n\pi+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}$ $(n\in Z)$ ؛ ۳. ۴۲ کیلومتر ،

۴. $\frac{5+\sqrt{17}}{2}r$ ؛ ۵. $-1<a\leqslant\sqrt{2}$ ، $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqslant a<+\infty$

گروه چهارم. ۱. $-\infty<x\leqslant 1$ ، $2/5\leqslant x<3$ ؛

۲. $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ $(k\in Z)$ ؛ ۳. ۸ کیلومتر ؛

۴. $\arccos\frac{\sqrt{12}-3}{3}$ ؛ ۵. $-\sqrt{7}\leqslant a<1$ ، $\sqrt{7}<a<+\infty$

§ ۵. دانشکدهٔ زیست‌شناسی

۱۹۷۷

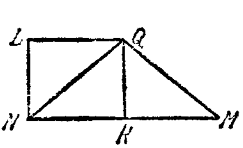
گروه اول

۱. اگر دوطرف معادلهٔ مفروض را مجذور کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$6-4x-x^2=(x+4)^2 \Longrightarrow x^2+6x+5=0 \qquad (1)$$

ریشه‌های معادلهٔ اصلی، بین ریشه‌های معادلهٔ (۱) است ولی، ضرورتی ندارد که همهٔ ریشه‌های معادلهٔ (۱)، در معادلهٔ اصلی، صدق کند. معادلهٔ (۱) دو ریشه دارد: $x_1=-1$ و $x_2=-5$ ؛ اگر این دو عدد را در معادلهٔ مفروض مسأله آزمایش کنیم، معلوم می‌شود که تنها $x_1=-1$ در آن صدق می‌کند.
پاسخ: $x=-1$.

۲. ازشرط مسأله نتیجه می‌شود که زاویهٔ NMQ ، یك زاویهٔ حاده است. QK را ارتفاع مثلث MNQ می‌گیریم (شکل ۹۰). بنا بر فرض داریم: $LN\perp MN$ و $LN\perp NQ$ ، بنابر‌این: $MN\|LQ$ و $LN\|QK$ ، یعنی چهارضلعی KNLQ متوازی‌الاضلاع است؛ در نتیجه: $|QK|=|LN|$ و $|NK|=|LQ|$. با استفاده ازفرض



شکل ۹۰

مسأله ، داریم:

$$|QK|=|LN|=|LQ|-۲ ,$$
$$|KM|=|NM|-|NK|=۲|LQ|-|LQ|=|LQ|$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ KQM ، پاره‌خط‌های QK و KM ، ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه‌اند ، بنابراین

$$\frac{|QK|}{|KM|}=tg\widehat{QMK}=tg\left(\operatorname{arc}tg\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}\Longrightarrow\frac{|LQ|-۲}{|LQ|}=\frac{۲}{۳}$$

از این جا به دست می‌آید: $|LQ|=۶$. بالاخره ، از مثلث قائم‌الزاویهٔ LNQ ، به‌دست می‌آید.

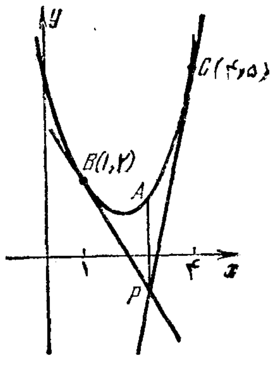
$$|NQ|=\sqrt{|LN|^۲+|LQ|^۲}=\sqrt{۴^۲+۶^۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

۰۳ نمودار تابع $y=x^۲-۴x+۵$ ، یك سهمی است که شاخه‌های آن به طرف بالا امتداد دارند. B و C را نقطه‌های تماس خط‌های راست $y=-۲x+۴$ و $y=۴x-۱۱$ برسهمی می‌گیریم (شکل ۹۱). ازحل دستگاه

$$\begin{cases}y=-۲x+۴\\y=۴x-۱۱\end{cases}$$

مختصات P، نقطهٔ برخورد خط‌های مماس به‌دست می‌آید: $x=\frac{۵}{۲}$، $y=۱$.

شکل BPCA ،که باید مساحت آن را پیدا کنیم ، ازدو بخش تشکیل شده است.



شکل ۹۱

a) شکل BPA ،که زیرمنحنی $y=x^۲-۴x+۵$ وبالای خط راست $y=-۲x+۴$ ، در فاصلهٔ ۱ تا $\frac{۵}{۲}$، قرار دارد.

b) شکل APC، که زیرمنحنی $y=x^۲-۴x+۵$ و بالای خط راست $y=۴x-۱۱$ ، در فاصلهٔ از $\frac{۵}{۲}$ تا ۴ ، قرار دارد.

مساحت شکل اول چنین است.

$$S_1=\int_1^{\frac{5}{2}}[(x^2-4x+5)-(-2x+4)]dx=$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x^2-2x+1)dx=$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx=\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^{\frac{5}{2}}=\frac{9}{8}$$

و مساحت شکل دوم

$$S_2=\int_{\frac{5}{2}}^{4}[(x^2-4x+5)-(4x-11)]dx=$$

$$=\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x^2-8x+16)dx=$$

$$=\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx=\frac{(x-4)^3}{3}\Big|_{\frac{5}{2}}^{4}=\frac{9}{8}$$

و بنا براین: $S=S_1+S_2=2\frac{1}{4}$

پاسخ : $2\frac{1}{4}$ واحد مربع.

۴. دو طرف معادلهٔ مفروض را در $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ضرب و آن‌را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right)\right]\quad(2)$$

هردو طرف برابری را به ضرب تبدیل می‌کنیم ، معادلهٔ (۲) به این صورت درمی‌آید:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right)\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)$$

و چون $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right)=\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$ ، بنابراین

$$\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)$$

که به‌سادگی ، به این صورت درمی‌آید:

$$\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)\left[1-\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\right]=0$$

و بنابراین ، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حل این معادله‌ها ساده است. جواب‌های معادلهٔ اصلی چنین‌اند:

$$x=5k\pi+\frac{5\pi}{4}\ (k\in Z)$$

$$x=5n\pi+\frac{5\pi}{12}\ (n\in Z)$$

$$x=5m\pi-\frac{5\pi}{3}(m\in Z)$$

۵. ریشه‌های معادلهٔ $x^2+\frac{3}{s}x+2s=0$ را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادلهٔ $x^2+\frac{12}{s}x-s=0$ را x_3 و x_4 می‌گیریم ؛ ضمناً فرض می‌کنیم : $x_1<x_2$ و $x_3<x_4$. مبین معادلهٔ اول برابر $\frac{9-8s^3}{s^2}$ و مبیّن معادلهٔ دوم برابر $\frac{144+4s^3}{s^2}$ است. ازاین‌جا معلوم می‌شود، برای این که هردومعادله دارای ریشه‌های حقیقی ومتمایز باشند، باید نابرابری‌های زیر برقرارباشند:

$$\begin{cases}\dfrac{9-8s^3}{s^2}>0\\[2mm]\dfrac{144+4s^3}{s^2}>0\end{cases}\qquad(3)$$

که از آن جا، برای s، این بازه‌ها به‌دست می‌آید:

$$-\sqrt[3]{36}<s<0 \quad \text{و} \quad 0<s<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$$

$x^2+\frac{3}{8}x+2s$ را $f(x)$ می‌نامیم. اگر تنها یکی از ریشه‌های $f(x)=0$ بین نقطه‌های x_3 و x_4 و ریشهٔ دیگر آن، در بیرون $x_3\leqslant x\leqslant x_4$ واقع باشد، شرط مساله برقرار نیست. در این حالت $f(x_3)$ و $f(x_4)$، مخالف صفر و با علامت‌های مختلف‌اند، یعنی $f(x_3)f(x_4)<0$. بنابراین، شرط مساله، وقتی و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $f(x_3)f(x_4)\geqslant 0$.

چون $x_3^2=s-\frac{12}{s}x^3$ و $x_4^2=s-\frac{12}{s}x_4$، بنابراین

و
$$f(x_3)=s-\frac{12}{s}x_3+\frac{3}{s}x_3+2s=3s-\frac{9}{s}x_3$$

$$f(x_4)=3s-\frac{9}{s}x_4$$

بنابراین

$$f(x_3).f(x_4)=\left(3s-\frac{9}{s}x_3\right)\left(3s-\frac{9}{s}x_4\right)=$$

$$=9s^2-27(x_3+x_4)+\frac{81}{s^2}x_3x_4$$

که با توجه به رابطه‌های ویت، $x_3+x_4=-\frac{12}{s}$ و $x_3x_3=-s$، داریم:

$$f(x_3).f(x_4)=9s^2+27\times\frac{13}{s}=\frac{81}{s^2}.s=9s^2+\frac{243}{s}$$

با حل نامعادلهٔ

$$9s^2+\frac{243}{s}\geqslant 0$$

روشن می‌شود که مجموعهٔ جواب‌ها، از دوبازه تشکیل شده است: $s\leqslant -3$ و $s>0$؛ و چون باید این جواب‌ها در دستگاه (۳) هم صدق کنند، معلوم می‌شود که شرط‌های مساله، برای مقدارهایی از s صدق می‌کند که در این

بازه‌ها باشند:

$$-\sqrt[3]{36}<s\leqslant -3 \quad \text{و} \quad 0<s<\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$$

۶. فرض کنید، درهرساعت، گروه اول x قطعه و گروه دوم y قطعه درست کنند. دراین صورت، هردو گروه روی هم، ساعتی $x+y$ قطعه و ۷۲ قطعه را در $\frac{72}{x+y}$ ساعت درست می‌کنند. بنابراین، هر گروه به طور جداگانه، $7-\frac{72}{x+y}$ ساعت کار می‌کند؛ دراین مدت، گروه اول $x\left(7-\frac{72}{x+y}\right)$ قطعه و گروه دوم $y\left(7-\frac{72}{x+y}\right)$ قطعه تهیه می‌کنند و، بنابرشرط مساله، باید داشته باشیم:

$$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8$$

درروزدوم، گروه اول ساعتی $x+1$ قطعه وگروه دوم ساعتی $y-1$ قطعه‌تهیه می‌کنند. چون بازهم، دو گروه روی هم، ساعتی $x+y$ قطعه آماده می‌کنند، ۷۲ قطعه را در $\frac{72}{x+y}$ ساعت به‌پایان می‌رسانند و، به‌طورجداگانه، هرکدام $5-\frac{72}{x+y}$ ساعت کار می‌کنند. دراین مدت به‌وسیلهٔ گروه اول $(x+1)\left(5-\frac{72}{x+y}\right)$ قطعه و به‌وسیلهٔ گروه دوم $(y-1)\left(5-\frac{72}{x+y}\right)$ قطعه آماده می‌شود، و بنابرفرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8$$

به‌این ترتیب، برای پیدا کردن x و y، به‌این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases}\left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8\\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2=8\end{cases}\qquad(4)$$

$z = \frac{۷۲}{x+y}$ و $x-y=u$ می‌گیریم، آن‌وقت، دستگاه(۴) را مـی‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} (۷-z)u = ۸ \\ (۵-z)(u+۲) = ۸ \end{cases} \qquad (۵)$$

که‌آن‌را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} ۷u = ۸+uz \\ ۵u+۱۰-۲z = ۸+uz \end{cases}$$

ازاین‌جا، روشن است که هم‌ارز آن، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۷u = ۸+uz \\ ۵u+۱۰-۲z = ۷u \end{cases}$$

ازمعادلهٔ دوم به‌دست می‌آید: $z = ۵-u$، که اگر به‌جای z درمعادلهٔ اول قراردهیم، به معادلـهٔ $۷u = ۸+u(۵-u)$ می‌رسیم. این معادله دوریشه دارد: $u_۱ = ۲$ و $u_۲ = -۴$. از آن‌جا: $z_۱ = ۳$ و $z_۲ = ۹$، بنابـرشرط مساله $x > y$، یعنی $u = x-y > ۰$. بنابراین، برای محاسبهٔ x و y به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x-y = ۲ \\ \frac{۷۲}{x+y} = ۳ \end{cases}$$

که $x = ۱۳$، $y = ۱۱$ جواب آن است؛ و این مقدارهای x و y با شرط‌های مساله سازگار است.

پـاسخ: گـروه اول ساعتی ۱۳ قطعه و گـروه دوم ساعتـی ۱۱ قطعه تهیه می‌کنند.

گروه دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x = ۳$ ؛ ۲. ۶۰۰ مترمربع ؛

۳. $\frac{۹}{۴}$ ؛ ۴. $\frac{۳}{۲}n\pi + \pi$ ، $\frac{۶}{۵}k\pi + (-۱)^{k+۱} \cdot \frac{۳\pi}{۱۰}$ $(n،k \in Z)$ ؛

۵. $\circ \leqslant s < \frac{۳}{۸}$ ، $s \leqslant -۳$ ؛ ۶. ۱۰۰ مترمکعب ، ۱۴۰ مترمکعب.

گروه سوم. ۱. $x = -۱$ ؛ ۲. $۲\sqrt{۲۱}$ متر ؛ ۳. $\frac{۹}{۸}$ ؛

۴. $۴k\pi - \frac{\pi}{۱۲} + (-۱)^{k+۱} . \frac{۴\pi}{۳}$ ، $۱۲n\pi - \frac{۵\pi}{۴}$ $(k , n \in Z)$ ؛

۵. $-۲ < s < \circ$ ؛ ۶. ۲۸ مترمکعب درساعت، ۲۲ مترمکعب درساعت.

گروه چهارم. ۱. $x = ۳$ ؛ ۲. $\frac{۱۵}{۲}$ مترمربع ؛ ۳. $\frac{۹}{۸}$ ؛

۴. $۴n\pi - \frac{۷\pi}{۶}$ ، $\frac{۸}{۳} l \pi - \frac{۵\pi}{۱۸}$ ، $\frac{۸}{۳} m\pi + \frac{\pi}{۶}$ $(n , l , m \in Z)$ ؛

۵. $\circ < s < ۱$ ؛ ۶. ۱۰ متر درثانیه، ۶ متر درثانیه.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. بااستفاده از رابطهٔ $\cos ۲\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) = ۱ - ۲ \sin^۲\left(x + \frac{\pi}{۳}\right)$ ، معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۲ \sin^۲\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) - ۴ \sin\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) + \frac{۳}{۲} = \circ \qquad (۱)$$

معادلهٔ درجه دوم $۲y^۲ - ۴y + \frac{۳}{۲} = \circ$ ، دو ریشه دارد : $y_۱ = \frac{۳}{۲}$ و $y^۲ = \frac{۱}{۲}$ ، بنابراین، معادلهٔ (۱) ، بامجموعهٔ دو معادله زیرهم‌ارز است:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۳}{۲} \quad و \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ اول جواب ندارد و از حل معادلهٔ دوم جواب‌های مورد نظر به‌دست می‌آید.

پاسخ : $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$ $(n\in Z)$.

۲. مشتق تابع $f(x)$ را محاسبه می کنیم:

$$f'(x)=(A\sin\pi x+B)'=A\pi\cos\pi x$$

با توجه به شرط $f'(1)=2$ به‌دست می آید: $A\pi\cos\pi=2$ و از آن‌جا $A=-\frac{2}{\pi}$. با استفاده از رابطهٔ نیوتون-لایب‌نیتس داریم:

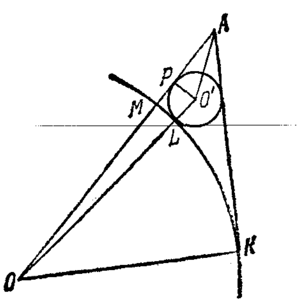
$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(A\sin\pi x+B)dx=$$

$$=A\int_0^2\sin\pi x\,dx+B\int_0^2 dx=A\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right)\Big|_0^2+Bx\Big|_0^2=2B$$

بنابراین $2B=4$ و از آن‌جا $B=2$.

پاسخ : $A=-\frac{2}{\pi}$ ، $B=2$.

۳. شکل محدود به پاره‌خط‌های AM و AK و کمان MK را، مثلث‌منحنی‌الخط می‌نامیم (شکل ۹۲). P را نقطهٔ تماس پاره خط OA با دایرهٔ محاطی مثلث منحنی‌الخط ، L را نقطهٔ تماس کمان MK با این دایره و O' را مرکز آن می گیریم . طبق فرض ، این دایره بر خط‌های راست OA و AK مماس است، بنابراین، مرکز آن، نقطهٔ O' ، روی نیمساز زاویهٔ OAK قرار دارد؛ یعنی $OAO'=\frac{\pi}{6}$. مرکزهای این دو



شکل ۹۲

دایره ــ O و O' ــ و نقطهٔ L بریک خط راست واقع اند . بنابراین $OO'=2+r$. (r راشعاع دایرهٔ محاطی مثلث‌منحنی‌الخط AKM گرفته‌ایم).
مثلث‌های APO' و OKA قائم‌الزاویه‌اند، بنابراین

$$|AP|=\frac{|PO'|}{tg\widehat{PAO'}}=\frac{r}{tg\frac{\pi}{6}}=r\sqrt{3}\ ,$$

$$|OA|\frac{|OK|}{\sin\widehat{OAK}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OPO به‌دست می‌آید:

$$|OP| = \sqrt{|OO'|^۲ - |PO'|^۲} = \sqrt{(۲+r)^۲ - r^۲} = ۲\sqrt{۱+r} \quad (۳$$

از برابری $|OA| = |OP| + |AP|$ و با استفاده از برابری‌های (۲) و (۳)، به‌معادله‌ای نسبت به‌مجهول r می‌رسیم:

$$\frac{۴}{\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۱+r} + r\sqrt{۳}$$

یا

$$۴ - ۳r = ۲\sqrt{۳} \cdot \sqrt{۱+r} \qquad (۴)$$

که با مجذور کردن دو طرف آن، منجر به‌معادلهٔ زیر می‌شود:

$$۹r^۲ - ۳۶r + ۴ = ۰$$

معادلهٔ اخیر، دو ریشه دارد:

$$r_۱ = ۲ - \frac{۴\sqrt{۲}}{۳} \quad و \quad r_۲ = ۲ + \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

چون، ضمن مجذور کردن، ممکن است ریشه‌های خارجی وارد معادله شده باشد، باید ریشه‌ها را مورد آزمایش قرار داد. آزمایش نشان می‌دهد که $r_۱ = ۲ - \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$، تنها ریشهٔ معادلهٔ (۴) است.

پاسخ: $۲ - \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$.

۴. $۳^{\sqrt{x^۲-۲}} = z$ می‌گیریم، به‌این نامعادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$z^۲ - \frac{۲۸}{۳}z + ۳ < ۰$$

که مجموعهٔ جواب‌های آن عبارت است از $\frac{۱}{۳} < z < ۹$. بنابراین، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ دو طرفهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\frac{۱}{۳} < ۳^{\sqrt{x^۲-۳}} < ۹ \Longrightarrow -۱ < \sqrt{x^۲-۳} < ۲$$

که، در واقع، با دستگاه نامعادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} -۱<\sqrt{x^۲-۳} \\ \sqrt{x^۲-۳}<۲ \end{cases} \qquad (۵)$$

حوزهٔ تعریف این دستگاه شامل دو بازه است:

$$\sqrt{۳}\leqslant x<+\infty \quad \text{و} \quad -\infty<x\leqslant\sqrt{۳}$$

روشن است که نامعادلهٔ اول، به‌ازای همهٔ مقدارهای x ، از حوزهٔ تعریف دستگاه، برقراراست. چون هردوطرف نامعادلهٔ دوم، درحوزهٔ تعریف‌دستگاه، غیرمنفی‌است، با نامعادلهٔ $x^۲-۳<۴$ هم‌ارز می‌شود؛ و جواب‌های نامعادلهٔ اخیر عبارت است از $-\sqrt{۷}<x<\sqrt{۷}$ ، که با توجه به حوزهٔ تعریف، جواب‌های دستگاه (۵) و، درنتیجه، جواب‌های نامعادلهٔ اصلی به‌دست‌می‌آید:

$$\text{پاسخ}: \; -\sqrt{۷}<x\leqslant-\sqrt{۳} \quad \text{و} \quad \sqrt{۳}\leqslant x<\sqrt{۷}.$$

۵. ابتدا، به‌ازای هرمقدار a ، همهٔ جواب‌ها را پیدا می‌کنیم، سپس، ازبین آن‌ها جواب‌هایی را انتخاب می‌کنیم‌که پاسخ مساله باشند. برای هرمقدار ثابت a ، جواب‌های معادله را، ابتدا درحوزهٔ $x<-۲a$ و، سپس، در حوزهٔ $x\geqslant-۲a$ جست‌وجو می‌کنیم.

۱) $x<-۲a$ می‌گیریم. دراین حالت داریم:

$$|x+۲a|=-(x+۲a)$$

و، بنابراین، معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x^۲+۲ax+a-۱=۰ \qquad (۶)$$

مبین این معادلهٔ درجه دوم را $\Delta_۱$ می‌نامیم و محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta_۱=۴a^۲-۴a+۴=۴\left(a-\frac{۱}{۲}\right)^۲+۳>۰$$

یعنی معادلهٔ درجه دوم (۶)، برای هرمقدار ثابت a ، دارای دو ریشه است:

$$x_۱=-a+\sqrt{a^۲-a+۱} \quad \text{و} \quad x_۲=-a-\sqrt{a^۲-a+۱}$$

باید ببینیم که آیا این ریشه‌ها، درحوزهٔ $x<-۲a$ قرار دارند یا نه؛ برای این‌که $x_۱$ دراین حوزه باشد، باید داشته باشیم:

$$-a+\sqrt{a^۲-a+۱}<-۲a \Rightarrow \sqrt{a^۲-a+۱}<-a \qquad (۷)$$

نامعادلهٔ (۷) با دستگاه نامعادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} -a>0 \\ a^2-a+1<a^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a<0 \\ a>1 \end{cases}$$

و روشن است که دستگاه اخیر جواب ندارد؛ یعنی به‌ازای هیچ مقداری از پارامتر a ، عدد x_1 درحوزهٔ $x<-2a$ قرار نمی‌گیرد. ریشهٔ x_2 ، وقتی و تنها وقتی دراین حوزه قرار داردکه داشته باشیم:

$$-a-\sqrt{a^2-a+1}<-2a \Longrightarrow a<\sqrt{a^2-a+1} \qquad (8)$$

روشن است که نامعادلهٔ (۸)، به ازای همهٔ مقدارهای $a<0$ برقرار است. در حوزهٔ $a\geqslant 0$ ، نابرابری (۸)، با نابرابری $a^2<a^2-a+1$ هم‌ارز است که به جواب $0\leqslant a<1$ می‌رسد. به این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۸) به‌صورت $a<1$ درمی‌آید. بنابراین معادلهٔ مفروض مساله، در حوزهٔ $x<-2a$ ، به‌ازای $a\geqslant 1$ جواب ندارد و به‌ازی $a<1$، تنها یك جواب دارد:

$$x_2=-a-\sqrt{a^2-a+1}$$

۲) فرض کنیم $x\geqslant -2a$. دراین مجموعه داریم :

$$|x+2a|=x+2a$$

و، بنابراین، معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$x^2+2ax+1-a=0 \qquad (9)$$

مبین این معادلهٔ درجه دوم را Δ_2 می‌نامیم و محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta_2=4a^2+4a-4=4(a^2+a-1)$$

روشن است، درحالتی‌که $\Delta_2<0$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

معادلهٔ (۹) جواب ندارد. وقتی a به‌این بازه تعلق نداشته باشد ، معادلهٔ (۹) دو جواب دارد:

$$x_3=-a+\sqrt{a^2+a-1}\ ,\quad x_4=-a-\sqrt{a^2+a-1}$$

ضمناً به‌ازای $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ داریم: $x_3=x_4$.

حالا معلوم کنیم که به ازای چه مقدارهایی از پارامتر a این ریشه‌ها درحوزهٔ

$-۲a \leqslant x$ قرار دارند. برای این منظور باید نامعادله‌های $x_۳ \geqslant -۲a$ و $x_۴ \geqslant -۲a$ را حل کرد. نامعادلهٔ

$$-a+\sqrt{a^۲+a-۱} \geqslant -۲a \qquad (۱۰)$$

با این نامعادله هم‌ارز است:

$$\sqrt{a^۲+a-۱} \geqslant -a$$

که به نوبهٔ خود، با مجموعهٔ دو دستگاه زیر، هم‌ارز است:

$$\begin{cases} a^۲+a-۱ \geqslant ۰ \\ -a < ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} -a \geqslant ۰ \\ a^۲+a-۱ \geqslant a^۲ \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های دستگاه اول عبارت است از $a \geqslant \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$؛ و دستگاه دوم جواب ندارد. یعنی، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱۰) عبارت است از $a \geqslant \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$، و تنها به‌ازای این مقدارهای پارامتر a ریشهٔ $x_۳$ درحوزهٔ $x \geqslant -۲a$ قرار می‌گیرد.

نامعادلهٔ

$$-a-\sqrt{a^۲+a-۱} \geqslant -۲a \Longrightarrow \sqrt{a^۲+a-۱} \leqslant a$$

با دستگاه نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} a^۲+a-۱ \geqslant ۰ \\ a \geqslant ۰ \\ a^۲+a-۱ \leqslant a^۲ \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های این دستگاه عبارت است از: $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \leqslant a \leqslant ۱$. تنها به‌ازای این‌مقدارهای پارامتر a، ریشهٔ $x_۴$ به‌حوزهٔ $x \geqslant -۲a$ تعلق دارد.

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، به‌ازای $a < \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ درحوزهٔ $x \geqslant -۲a$ جواب ندارد. در حالت $a = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$، معادلهٔ مفروض، دراین حوزه، دارای جواب منحصر به فرد می‌شود: $x_۳ = x_۴ = -\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$. به ازای

مقدارهایی از a که در بازهٔ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a\leqslant 1$ باشند، معادلهٔ مفروض در حوزهٔ مورد نظر، دارای دوجواب متمایز x_3 و x_4 است. و سرانجام، به‌ازای $a>1$، معادلهٔ مفروض، دارای جواب منحصر x_3 است. نتیجه‌های حاصل را، می‌توان به‌صورت جدولی، جمع‌بندی کرد:

جواب‌های معادله	مقدار پارامتر a
x_2	$a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$x_2 , x_3=x_4 (x_2<x_3)$	$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$x_2 , x_3 , x_4 (x_3\neq x_4)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1$
$x_3=0 , x_4=-2$	$a=1$
x_3	$a>1$

پاسخ: $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ و $a>1$.

۶. سرعت «جریان‌آب» را v کیلومتر در ساعت و فاصلهٔ از محل ورود «جریان آب» به‌رودخانه تا نقطهٔ B را ــ در مسیر رودخانه ــ y می‌گیریم. کشتی، در مسیر «جریان آب» $\frac{80}{v+18}$ ساعت و در جهت حرکت آب رودخانه تا B به اندازهٔ $\frac{y}{15}$ ساعت وقت صرف می‌کند. و چون کشتی، در این مسیر، روی هم ۱۸ ساعت وقت صرف کرده است، پس

$$\frac{80}{18+v}+\frac{y}{15}=18 \qquad (11)$$

در مسیر معکوس، کشتی در روی رودخانه $\frac{y}{21}$ ساعت و در «جـریان آب»

$\frac{۸۰}{۱۸-v}$ ساعت وقت صرف کرده است ، که روی هم ۱۵ ساعت شده‌است.

بنابراین

$$\frac{y}{۲۱}+\frac{۸۰}{۱۸-v}=۱۵ \qquad (۱۲)$$

از برابری (۱۱) به‌دست می‌آید: $y=۳۰\times\frac{۹v+۱۲۲}{v+۱۸}$ ، که اگر به جای y در برابری (۱۲) قرار دهیم، به‌معادلهٔ زیر برای محاسبهٔ v می‌رسیم:

$$\frac{۱۰}{۷}\cdot\frac{۹v+۱۲۲}{v+۱۸}+\frac{۸۰}{-v+۱۸}=۱۵$$

چون ، بنابر فرض داریم $۰<v<۱۸$ ، این معادله ، هم‌ارز معادلهٔ درجه دوم زیر می‌شود:

$$v^۲+۶۴v-۱۳۲=۰$$

که دارای دو ریشه است: $v_۱=۲$ ، $v_۲=-۶۶$ ؛ و روشن است که تنها $v_۱=۲$ قابل‌قبول است. به‌این ترتیب، سرعت «جریان آب» برابر ۲ کیلومتر درساعت می‌شود. از آن‌جا که فاصلهٔ بین A و B برابر است با $s=۸۰+y$، یعنی $s=۸۰+۳۰\times\frac{۹v+۱۲۲}{v+۱۸}$ ، با قرار دادن $v=۲$ ، به‌دست می‌آید $s=۲۹۰$ (کیلومتر).

پاسخ: فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B برابر ۲۹۰ کیلومتر و سرعت «جریان آب» برابر ۲ کیلومتر درساعت است.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $n\pi\pm\arccos\sqrt{\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۸}}$ $(n\in Z)$ ؛

۲. $A=\frac{۲}{\ln ۳}$ ، $B=۱۲-\frac{۱۲}{\ln^۲ ۳}$ ؛

۳. $tg^۲\frac{\alpha}{۲}\cdot\left(\frac{\sqrt{r^۲+\arcsin\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{۲}}-a\,cotg\frac{\alpha}{۲}-۲\right)$ ؛

۴. $0 \leqslant x \leqslant 1$ ؛ ۵. $a < -\frac{7}{3}$ ، $a > -2$ ؛

۶. ۲/۵ کیلومتر درساعت ، ۱/۵ کیلومتر درساعت.

گروه سوم. ۱. $k\pi - \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$ ؛ ۲. $A = 2$ ، $B = \frac{3}{2\pi}$ ؛

۳. $\frac{a\sqrt{3} + r - \sqrt{4r^2 + 2ar\sqrt{3}}}{3}$ ؛

۴. $-3 \leqslant x < -2\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{2} < x \leqslant 3$ ؛

۵. $-1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ؛ ۶. ۱۴ کیلومتر در ساعت.

گروه چهارم. ۱. $k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ ؛

۲. $A = \frac{1}{\ln 2}$ ، $B = \frac{7}{3}\left(1 - \frac{1}{\ln 2}\right)$ ؛

۳. $2\, r\, tg\frac{\alpha}{2}\left(1 - tg\frac{\alpha}{2}\right)$ ؛ ۴. $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ ؛

۵. $a < 2$ ، $a > \frac{7}{3}$ ؛

۶. ۲/۵ کیلومتر در ساعت ، ۱/۵ کیلومتر در ساعت.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. می‌دانیم ، ضریب زاویهٔ مماس برنمودار تابع $y(x)$ ، در نقطهٔ x_0 ، برابر است با $y'(x_0)$. بنابراین ، همهٔ مقدارهای مورد نظر x ، از معادلهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$(3\cos 5x)' = (5\cos 3x + 2)' \qquad (1)$$

و یا

$$-15\sin 5x = -15\sin 3x$$

این معادله ، ابتدا به معادلهٔ $\sin 5x - \sin 3x = 0$ و ، سپس به معادلهٔ

$2\sin x \cos 4x = 0$ تبدیل می‌شود. به این ترتیب، معادلهٔ (۱)، هم‌ارز مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر است:

$$\sin x = 0 \quad \text{و} \quad \cos 4x = 0$$

که جواب‌های آن‌ها، به‌سادگی، به‌دست می‌آید.

پاسخ: $x = n\pi$ ، $x = \frac{1}{4}k\pi + \frac{\pi}{8}$ $(n \text{ ، } k \in Z)$.

۲. سرعت قطار مسافری را v_1 کیلومتر در ساعت و سرعت قطار سریع‌السیر را v_2 کیلومتر در ساعت می‌گیریم. بنابراین، از لحظهٔ حرکت دو قطار تا لحظهٔ ملاقات آن‌ها، $\frac{2400}{v_1 + v_2}$ ساعت طول می‌کشد. اگر هم، هردو قطار با سرعت v_2 حرکت می‌کردند، زمان لازم برابر $\frac{2400}{2v_2}$ ساعت می‌شد. به این ترتیب، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{2400}{v_1 + v_2} - \frac{2400}{2v_2} = 3 \qquad (2)$$

به‌همین ترتیب، معادلهٔ دوم هم تشکیل می‌شود:

$$\frac{2400}{2v_1} - \frac{2400}{v_1 + v_2} = 5 \qquad (3)$$

که بعداز تبدیل‌های ساده‌ای، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{v_2 - v_1}{v_2(v_1 + v_2)} = \dfrac{1}{400} \\[2ex] \dfrac{v_2 - v_1}{v_1(v_1 + v_2)} = \dfrac{1}{240} \end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم دستگاه را، برمعادلهٔ اول تقسیم کنیم، به دست می‌آید: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{3}$ یا $v_2 = \frac{5}{3}v_1$. اگر $\frac{5}{3}v_1$ را به جای v_2 در معادلهٔ دوم دستگاه قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $v_1 = 60$؛ ولی دراین صورت: $v_2 = 100$.

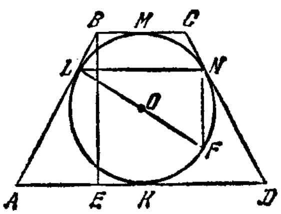
پاسخ: سرعت قطار مسافری برابر ۶۰ کیلومتر در ساعت و سرعت قطار سریع‌السیر، برابر ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است.

۳. رأس‌های ذوزنقه را A ، B ، C و D می گیریم ، به‌نحوی که پاره‌خط AD قاعدهٔ بزرگتر و پاره‌خط‌های AB و CD ، ساق‌هـای آن باشند. نقطه‌های تماس دایره‌را با ضلع‌های ذوزنقه، به‌ترتیب ، K ، L ، M و N می گیریم. بنا بـر فرض $LN \| AD$ (شکل ۹۳). مساحت S ذوزنقه ، چنین است : $S = \frac{|AD|+|BC|}{۲} h$ ، کـه منظور از h ، ارتفاع ذوزنقه است. چون ABCD یك چهارضلعی محیطی است ، بنابراین

$$|AD|+|BC| = |AB|+|CD|$$

و در نتیجه

$$S = \frac{|AB|+CD|}{۲} h \qquad (۴)$$



شکل ۹۳

اگر O مرکز دایره باشد: $OM \perp BC$ و $OK \perp AD$ (شعاع وارد به نقطـهٔ تماس ، بـرخط مماس عمود است). چـون $AD \| BC$ ، پس $OK \perp BC$. ولی از نقطهٔ O تنها یك عمود برBC می‌توان رسم کرد. بنابراین، نقطه‌های O، M و K بریك خط‌راست واقع‌اند و داریم: $|MK| = ۲R$. به‌جز این، MK ارتفاع ذوزنقه است ؛ یعنی $h = ۲R$. از نقطـهٔ B عمود BE را بر AD و ازنقطهٔ L قطر LF را رسم می کنیم. دراین صورت، خواهیم‌داشت: $LF \perp AB$ و $LN \perp BE$. از این جـا نتیجـه‌می‌شود: $\widehat{ABE} = \widehat{FLN}$ (ضلع‌هـای دو زاویه برهم عمودند) ، یعنی ، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABE و FLN متشابه‌اند: از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|LF|}{|LN|} \Longrightarrow \frac{|AB|}{۲R} = \frac{۲R}{b} \Longrightarrow |AB| = \frac{۴R^۲}{b}$$

به‌همین ترتیب ، ثابت می‌شود: $|CD| = \frac{۴R^۲}{b}$. اگـر از آن چه بـه دست آورده‌ایم ، در رابطهٔ (۴) استفاده کنیم ، مساحت S ذوزنقه به‌دست می آید.

پاسخ: $S = \frac{۸R^۳}{b}$.

۴. نامعادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دو دستگاه نامعادلهٔ زیرهم‌ارز است.

$$\begin{cases} x+1>1 \\ (x^2+x-6)^2 \geqslant (x+1)^4 \end{cases} \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} 0<x+1<1 \\ 0<(x^2+x-6)^2 \leqslant (x+1)^4 \end{cases}$$

ابتدا، دستگاه اول را حل می‌کنیم معادلهٔ دوم دستگاه اول را، می‌توان، به‌ترتیب زیر، به‌نامعادله‌های هم‌ارز خود، تبدیل کرد:

$$(x^2+x-6)^2-(x+1)^4 \geqslant 0,$$

$$[x^2+x-6-(x+1)^2][x^2+x-6+(x+1)^2] \geqslant 0,$$

$$(-x-7)(2x^2+3x-5) \geqslant 0,$$

$$(x+7)(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \leqslant 0$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اخیر، از دوبازه تشکیل شده است:

$$-\infty<x\leqslant -7 \quad \text{و} \quad -\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 1$$

ولی ازمعادلهٔ اول این‌دستگاه‌نتیجه می‌شود $0<x<+\infty$. به‌این‌ترتیب، جواب‌های دستگاه اول، به‌صورت $0<x\leqslant 1$ درمی‌آید.

اکنون، دستگاه دوم را حل می‌کنیم. نامعادلهٔ

$$(x^2+x-6)^2 \leqslant (x+1)^4$$

هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$(x+7)(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \geqslant 0$$

که مجموعهٔ جواب‌های آن، شامل دوبازه است: $-7\leqslant x\leqslant -\frac{5}{2}$ و $1\leqslant x<+\infty$. معادلهٔ اول این دستگاه به‌جواب $-1<x<0$ می‌رسد. نامعادلهٔ $(x^2+x-6)^2>0$ هم، به‌ازای همهٔ مقدارهای x به جز $x=2$ و $x=-3$ برقرار است. از تلفیق این نتیجه‌گیری‌ها، روشن می‌شود که دستگاه دوم جواب ندارد.

پاسخ: $0 < x \leqslant 1$.

۵. xy را t می‌گیریم. در این صورت، معادلهٔ اول دستگاه، این‌طور نوشته می‌شود:

$$(\sqrt{3}+1)(1+\cos t\sin t)=(\sqrt{3}+1)\sin^2 t+\cos 2t \qquad (5)$$

و یا هم‌ارز آن

$$(\sqrt{3}+1)(\sin^2 t+\cos^2 t+\cos t\sin t)=$$
$$=(\sqrt{3}+1)\sin^2 t+\cos^2 t-\sin^2 t$$

روشن است که جواب معادله درشرط $\cos t\neq 0$ صدق می‌کند، بنابراین، اگر دوطرف این معادله را بر $\cos^2 t$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt{3}+1)(1+tg\,t)=1-tg^2 t \qquad (6)$$

که بازهم با معادلهٔ (۵) هم‌ارز است. $tg\,t=z$ می‌گیریم و معادلهٔ (۶) را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$z^2+(\sqrt{3}+1)z+\sqrt{3}=0$$

این معادله، دو ریشه دارد: $z_1=-1$، $z_2=-\sqrt{3}$؛ بنابراین، معادلهٔ(۵) با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$tg\,t=-1,\quad tg\,t=-\sqrt{3}$$

وازآن‌جا

$$t=n\pi-\frac{\pi}{4},\ t=k\pi-\frac{\pi}{3} \qquad (n,k\in Z) \qquad (7)$$

t_0 را یکی‌ازاین‌جواب‌ها می‌گیریم. این‌دستگاه معادله‌ها رادرنظرمی‌گیریم:

$$\begin{cases} xy=t_0 \\ x^2y^2-y^2+1=0 \end{cases}$$

اگر درمعادلهٔ دوم، به‌جای xy، مقدار t_0 را قراردهیم، به‌دست می‌آید: $y=\pm\sqrt{1+t_0^2}$ و، سپس، از معادلهٔ اول دستگاه

$$x=\pm\frac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}}$$

به‌این ترتیب، همهٔ عددهای x و y، که در دومعادلهٔ مفروض درشرط مساله صدق می‌کنند، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{t_0}{\sqrt{1+t_0^2}} \\ y=\pm\sqrt{1+t_0^2} \end{cases} \qquad (8)$$

که در آن، t_0 عبارت است ازیکی از عددهای (۷)، ضمناً، دراین رابطه‌ها یا در هردومورد علامت + و یا در هردومورد علامت − را باید در نظر گرفت. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد، همهٔ عددهایی که ازرابطه‌های (۷) به‌دست می‌آیند (t_0، یکی از عددهای (۷))، در دومعادلهٔ اول دستگاه صدق می‌کنند.

درنتیجه، این می‌ماند که از عددهای (۷)، عددهایی از t_0 را انتخاب کنیم که برای هر x و y، که از روی رابطه‌های (۸) به‌دست می‌آیند، در نامعادلهٔ دستگاه‌مفروض صدق کنند، یا به‌زبان دیگر، درمجموعهٔ عددهای(۷)، عددهایی را پیدا کنیم که درمیان جواب‌های نامعادلهٔ زیر باشند:

$$\frac{1+t^2}{t^2}+1+t^2\leqslant 6 \qquad (9)$$

این نامعادله را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{t^4-4t^2+1}{t^2}\leqslant 0$$

چون ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم z^2-4z+1 برابراست با $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$2-\sqrt{3}\leqslant t^2\leqslant 2+\sqrt{3}$$

ویا

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\leqslant |t|\leqslant\sqrt{2+\sqrt{3}} \qquad (10)$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که عددهای $t_1=-\frac{\pi}{4}$ و $t_2=-\frac{\pi}{3}$ [(۷) را ببینید]، در (۱۰) صدق می‌کنند. در حالت $n\neq 0$ یا $k\neq 0$ هم، خواهیم داشت:

$$\left|n\pi-\frac{\pi}{4}\right|\geqslant |n|\pi-\frac{\pi}{4}\geqslant\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}>\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\left|k\pi-\frac{\pi}{3}\right|\geqslant|k|\pi-\frac{\pi}{3}\geqslant\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}>2>\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

به‌این ترتیب، ازهمهٔ عددهای (۷)، تنها دو عدد $t_1=-\frac{\pi}{4}$ و $t_2=-\frac{\pi}{3}$ درنامساوی‌هـای (۱۰)، یعنی در نامعادلهٔ (۹) صدق می‌کنند. مقدارهـای متناظر x و y، از رابطه‌های (۸) به‌دست می‌آیند.

پاسخ: $x_1=-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$ و $y_1=\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$، $x_2=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$ و $y_2=-\frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$، $x_3=-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$ و $y_3=\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$، $x_4=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$ و $y_4=-\frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$.

۶. معادلهٔ مفروض را، به‌صورت زیر که هم‌ارزآن است، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x=\frac{1}{2}\Longrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

ازآن‌جا

$$3x+\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{\pi}{6} \text{ و } 3x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(n,\ k\in z)$$

پاسخ: $x=\frac{2}{3}n\pi$، $x=\frac{2}{3}k\pi+\frac{2\pi}{9}(n,k\in Z)$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=\frac{1}{4}n\pi$، $x=\frac{1}{3}k\pi+\frac{\pi}{6}(n,\ k\in Z)$؛

۲. ۱۶ ساعت، $\frac{16}{3}$ ساعت؛

۳. طول هریك از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع، برابراست با $\frac{4R^3}{S}$؛

۴. $0<x<\frac{1}{3}$، $2\leqslant x<1+\sqrt{7}$، $-\frac{1}{3}<x<0$، $1-\sqrt{7}<x\leqslant-1$؛

۵. $x_1=\frac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}$ و $y_1=-\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4-\pi}}$، $x_2=-\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}$ و

$y_2 = -\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}$؛

۶. $x = \frac{1}{2}n\pi + \frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{n\pi}{8}$ $(n \in Z)$.

گروه سوم. ۱. $x = \frac{1}{5}k\pi + \frac{\pi}{10}$، $x = \frac{1}{2}l\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k, l \in Z)$؛

۲. ۱۶۰ قطعه؛ ۳. $aR\left(1 + \dfrac{R^2}{b(a-b)}\right)$؛

۴. $3 < x \leqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$، $4 < x < \frac{9}{2}$؛ ۵. $x_1 = \dfrac{\sqrt{\pi^2+36}}{6}$ و

$y_1 = \dfrac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+36}}$، $x_2 = -\dfrac{\sqrt{\pi^2+36}}{6}$ و $y_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+36}}$

$x_3 = \dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$ و $y_3 = \dfrac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$، $x_4 = -\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$ و

$y_4 = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$؛ ۶. $x = \frac{2}{5}k\pi + \frac{\pi}{20}$ $(k \in Z)$.

گروه چهارم. ۱. $x = \frac{1}{5}k\pi + \frac{\pi}{10}$، $x = \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$؛

۲. ۶ ساعت، ۴ ساعت؛ ۳. $S = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{R^2(a+R)^3}{(a-R)(a^2+R^2)}$؛

۴. $x \leqslant 1$، $3 \leqslant x < 5$، $x > 7$؛

۵. $x_1 = -\dfrac{\pi}{2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4-\pi}}$ و $y_1 = -\dfrac{\sqrt[3]{4-\pi}}{\sqrt[3]{4}}$، $x_2 = -\dfrac{\operatorname{arctg} 2}{\sqrt[3]{\operatorname{arc\,tg} 2 - 1}}$

و $y_2 = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2 - 1}$؛

۶. $x = \frac{1}{3}n\pi + \frac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9}$ $(n \in Z)$.

گروه اول

۰۱ با استفاده از رابطهٔ $۲\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$، معادلهٔ مفروض را این‌طور می‌نویسیم:

$$۱+\cos ۴x=۰ \implies x=\frac{۱}{۲}n\pi+\frac{\pi}{۴} \qquad (n\in Z)$$

۰۲ برای این‌که حداکثر و حداقل تابع را دربازهٔ $[-۵ , ۴]$ پیداکنیم، کافی است مقدارتابع را درنقطه‌های بحرانی واقع‌دربازهٔ $(-۵ , ۴)$ و،همچنین، در دوانتهای این بازه پیداکنیم و، آن‌وقت، ازبین آن‌ها، بیشترین وکمترین مقدار را برگزینیم. تابع

$$y(x)=۲x^۳-۳x^۲-۳۶x+۱۰$$

در تمام نقطه‌های خود مشتق‌پذیر است و، بنابراین، نقطه‌های بحرانی آن از حل معادلهٔ $y'(x)=۰$ به‌دست می‌آید، یعنی

$$۶x^۲-۶x-۳۶=۰$$

این معادلهٔ درجه دوم، دوریشه دارد: $x_۱=-۲$، $x_۲=۳$؛که هردوی‌آن‌ها به‌بازهٔ $(-۵ , ۴)$ تعلق‌دارند. مقدارتابع را درنقطه‌های -۵، -۲، ۳ و۴ محاسبه می‌کنیم:

$$y(-۵)=-۱۳۵, \qquad y(-۲)=۵۴, \qquad y(۳)=-۷۱,$$
$$y(۴)=-۵۴$$

بنابراین، حداکثرمقدارتابع، دربازهٔ مفروض، برابر ۵۴ و حداقل‌آن برابر -۱۳۵ است.

۰۳ ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم $-x^۲+۶x-۵$ عبارت است از: $x_۱=۱$ و $x_۲=۵$، بنابراین، حوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول نامعادلهٔ مفروض $۱\leqslant x\leqslant ۵$ می‌باشد.

۱) برای x ازمجموعهٔ $۱\leqslant x\leqslant ۴$، هردوطرف نامعادلهٔ مفروض، معین وغیرمنفی است. بنابراین، در این مجموعه، نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارز نامعادلهٔ زیراست.

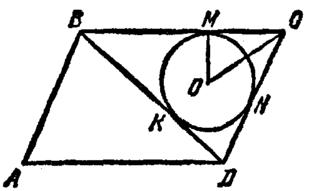
$$-x^۲+۶x-۵>(۸-۲x)^۲ \Longrightarrow ۵x^۲-۳۸x+۶۹<۰$$

که مجموعهٔ جواب‌های آن عبارت است از $۳<x<۴\frac{۳}{۵}$، از این مقدارهای x، مجموعهٔ $۳<x\leqslant ۴$ با شرط این حالت سازگار است و، بنابراین، جواب نامعادلهٔ مفروض‌اند.

۲) درمجموعهٔ $۴<x\leqslant ۵$، سمت‌چپ نامعادلهٔ مفروض غیرمنفی و سمت راست آن منفی است. بنابراین، تمامی این مجموعه، جواب نامعادلهٔ مفروض است.

پاسخ: $۳<x\leqslant ۵$.

۴. ABCD را متوازی‌الاضلاع مفروض مسأله درنظر می‌گیریم (شکل ۹۴). نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث BCD را با ضلع‌های BC، CD و BD، به ترتیب، M، N و K می‌گیریم و فرض می‌کنیم که، نقطهٔ O، مرکز این دایره باشد. چون، مرکز دایره‌ای که برضلع‌های یک زاویه مماس باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد، خط راست OC نیمساز زاویهٔ MCN می‌شود. مثلث MOC قائم‌الزاویه است (شعاع OM برمماس BC عمود است).



شکل ۹۴

چون $\widehat{ABC}=۱۲۰^\circ$، پس $\widehat{BCD}=۶۰^\circ$ و، بنابراین، $\widehat{OCM}=۳۰^\circ$.

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$|MC|=|OM|\cdot cotg ۳۰^\circ=۳$$

و ازآنجا: $|CN|=|CM|=۳$، همچنین داریم: $|BK|=|BM|$ و $|KD|=|DN|$. طول ضلع CD را y وطوله ضلع BC را x می‌گیریم. ازفرض مسأله، نتیجه می‌شود: $x+y=۱۳$.

حالا $|BD|$ را پیدا می‌کنیم:

$$|BD|=|BK|+|KD|=|BM|+|ND|=$$
$$=(x-۳)+(y-۳)=x+y-۶=۷$$

بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها، درمثلث BCD داریم:

$$49 = |BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC| \cdot |CD| \cdot \cos\widehat{BCD} =$$
$$= x^2 + y^2 - xy$$

به‌این ترتیب، به‌این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 - xy = 49 \end{cases} \qquad (1)$$

ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $x = 13 - y$، که اگر آن را به‌جای x در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به‌معادلهٔ درجه دوم $y^2 - 13y + 40 = 0$ می‌رسیم که دارای دو ریشه است: $y_1 = 5$ و $y_2 = 8$. در نتیجه، دستگاه (۱) دو جواب دارد:

$$x_1 = 8,\ y_1 = 5;\ \ x_2 = 5,\ y_2 = 8$$

چون، بنا برفرض، $x > y$ است، بنا براین تنها $x = 8$، $y = 5$ جواب مسأله است.

پاسخ: ۸متر و ۵متر.

۵. درمسأله خواسته شده‌است که همهٔ ریشه‌های مشترک این دومعادله را پیدا کنیم:

$$3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0$$
$$\cos^2 x + 3\cos x \cdot \sin 2x - 8\sin x = 0$$

با استفاده از رابطه‌های $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$، $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$، این معادله‌ها را می‌توان چنین نوشت:

$$6\sin^3 x + 10\sin^2 x + 14\sin x - 6 = 0$$
$$6\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \qquad (2)$$

هر ریشهٔ مشترك این دومعادله، ریشه تفاضل آن هم هست، یعنی ریشهٔ معادلهٔ

$$9\sin^2 x + 12\sin x - 5 = 0 \qquad (3)$$

معادلـهٔ درجـهٔ دوم $9t^2 + 12t - 5 = 0$، دو ریشه دارد: $t_1 = -\frac{5}{3}$ و $t_2 = \frac{1}{3}$. بنا براین، معادلهٔ (۳)، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\sin x = -\frac{5}{3},\ \sin x = \frac{1}{3}$$

معادلهٔ اول جواب ندارد، یعنی همهٔ ریشه‌های مشترك معادله‌های (۲)، بین ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$\sin x = \frac{1}{3}$$

یعنی بین عددهای $(n\in Z)x = n\pi + (-1)^n \arcsin\frac{1}{3}$. ثابت می کنیم که همهٔ این عددها، با شرط مسأله، سازگارند. درواقع، برای این xها داریم:

$$\sin x = \frac{1}{3},\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \frac{8}{9},\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{7}{9},$$

$$\cos x \cdot \sin 2x = 2\cos^2 x \cdot \sin x = \frac{16}{27}$$

در این صورت $3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 =$

$$= 3\times\frac{1}{27} - 3\times\frac{8}{9} + 7\times\frac{1}{3} - \frac{7}{9} + 1 = 0,$$

$$\cos^2 x + 3\cos x \cdot \sin 2x - 8\sin x = \frac{8}{9} + 3\times\frac{16}{27} - 8\times\frac{1}{3} = 0$$

پاسخ: $(n\in Z)\ \ n\pi + (-1)^n \arcsin\frac{1}{3}$.

۶. معادلهٔ مفروض، با این معادله هم‌ارز است:

$$2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 5 = 0$$

معادلهٔ درجه‌دوم $2y^2 - 3y - 5 = 0$ دوریشه دارد: $y_1 = \frac{5}{2}$ و $y_2 = -1$.

بنابراین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\log_2 x = \frac{5}{2},\ \log_2 x = -1$$

که به‌ترتیب، منجر به جواب‌های $x_1 = 2^{\frac{5}{2}}$ ، $x_2 = \frac{1}{2}$ می‌شوند.

پاسخ: $x_1 = 4\sqrt{2}$ ، $x_2 = \frac{1}{2}$.

گروه دوم. ۱. $x=\frac{۲}{۳}n\pi+\frac{\pi}{۶}$ ؛ $(n\in Z)$

۲. $y_{max}=۸$ ، $y_{min}=-۷۳$ ؛ ۳. $-۶\leqslant x<-۴+\sqrt{۲}$ ؛

۴. $\sqrt{۹۱}$ ؛ ۵. $x=۲n\pi+\arccos\frac{۲}{۵}$ ؛ $(n\in Z)$

۶. $x_۱=۵$ ، $x_۲=\frac{۱}{۵\sqrt{۵}}$.

گروه سوم. ۱. $x=\frac{۲}{۵}n\pi$ ؛ $(n\in Z)$

۲. $y_{max}=۸۶$ ، $y_{min}=۵$ ؛ ۳. $۱<x\leqslant ۴$ ؛

۴. $۴\sqrt{۳}$ ؛ ۵. $x=n\pi+(-۱)^{n+۱}\arcsin\frac{۲}{۳}$ ؛ $(n\in Z)$

۶. $x_۱=۸۱$ ، $x_۲=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$.

گروه چهارم. ۱. $x=n\pi-\frac{\pi}{۴}$ ؛ $(n\in Z)$

۲. $y_{max}=۱۳$ ، $y_{min}=-۶۸$ ؛ ۳. $-۲\leqslant x<-\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴\sqrt{۵}}$ ؛

۴. ۱۰ ؛ ۵. $x=۲n\pi+\arccos\left(-\frac{۲}{۳}\right)$ ؛ $(n\in Z)$

۶. $x_۱=۸$ ، $x_۲=\frac{۱}{۱۶}$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول معادلهٔ مفروض، شامل مقدارهایی از x است که، به‌طور هم‌زمان، در شرط‌های $x-۲>۰$ و $۲x-۱>۰$ صدق کنند، یعنی $x>۲$. دراین حوزه داریم:

$$3\log_8(x-2)=\log_2(x-2)=\frac{1}{2}\log_2(x-2)^2,$$

$$\log_2\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\log_2(2x-1)$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، در مجموعهٔ $x>2$، هم‌ارز است بامعادلهٔ

$$\log_2(x-2)^2=\log_2(2x-1)$$

از آن جا

$$(x-2)^2=2x-1 \Longrightarrow x^2-6x+5=0$$

که دارای دو ریشه است: $x_1=1$ ، $x_2=5$. از این دو ریشه، تنها $x_2=5$ در مجموعهٔ $x>2$ قرار دارد که جواب معادلهٔ اصلی است.

پاسخ: $x=5$.

۲. چون $\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=-\sin 2x$ و $\sin(4x+3\pi)=-\sin 4x$ ،

معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin 2x=\sin 4x$$

که اگر $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$ قرار دهیم، به مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

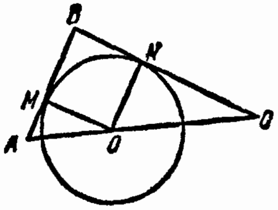
$$\sin 2x=0 ,\quad \cos 2x=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

جواب‌های معادلهٔ اول $x=-\frac{1}{2}$ $(k\in Z)$ و جواب‌های معادلهٔ دوم

$x=m\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(m\in Z)$ است. جواب‌های معادلهٔ مفروض، عبارت است از اجتماع جواب‌هایی که از مجموعهٔ معادله‌های (۱) به‌دست آمده است.

پاسخ: $\frac{1}{2}k\pi$ ، $m\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(k , m\in Z)$.

۳. ABC را مثلث مفروض می‌گیریم (شکل ۹۵). نقطه‌های تماس دایره را با ضلع‌های AB و BC ، به‌ترتیب، M و N می‌گیریم. اگر مرکز دایره را به‌این نقطه‌های تماس‌وصل کنیم،مربع MBNO به‌دست می‌آید و،بنابراین،



شکل ۹۵

داریم: $|BN|=|OM|=۳$. مثلث ONC قـائم‌الزاویه است و در آن داریم: $|OC|=۵$ و $|ON|=۳$.
بنابراین:

$|NC|=\sqrt{|OC|^۲-|ON|^۲}=۴$.

ولی، دراین صورت:

$|BC|=|NC|+|NB|=۷$.

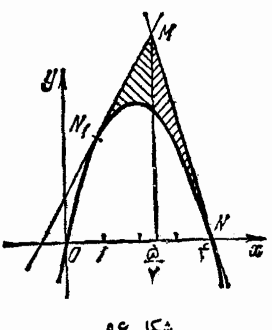
مثلث‌های ONC و ACB متشابه‌اند، بنابراین $\frac{|AB|}{|ON|}=\frac{|BC|}{|NC|}$، کـه از آن جا به‌دست می‌آید: $|AB|=\frac{۲۱}{۴}$. اکنون دیگـر مساحت S از مثلث ABC محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}|AB|\cdot|BC|=\frac{۱۴۷}{۸}$$

۴. چون نقطهٔ $M\left(\frac{۵}{۲}, ۶\right)$ روی سهمی $y=۴x-x^۲$ نیست، پس مماسی که ازاین نقطه برسهمی رسم شود، در نقطه‌ای مثل $(x_\circ, y_\circ)$ برسهمی مماس است. معادلهٔ خط راست مماس برسهمی در نقطهٔ $N(x_\circ, y_\circ)N$، به این صورت نوشته می‌شود.

$$y-y_\circ=k(x-x_\circ)$$

که‌درآن: $k=y'(x_\circ)=۴-۲x_\circ$؛



شکل ۹۶

در نتیجه، معادلهٔ مماس به این‌صورت درمی‌آید:

$$y-(۴x_\circ-x_\circ^۲)= \qquad (۲)$$
$$=(۴-۲x_\circ)(x-x_\circ)$$

چـون نقطهٔ M روی این مماس قرار دارد، مختصات آن، در معادلهٔ مماس صدق می‌کند؛ $x=\frac{۵}{۲}$، $y=۶$ را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم:

$$۶-۴x_\circ+x_\circ^۲=(۴-۲x_\circ)\left(\frac{۵}{۲}-x_\circ\right)$$

این رابطه، به‌ازای دومقدار برای x_0 ، برقرار است: $x'_0=1$ ، $x''_0=4$.
به‌این ترتیب ، دو مماس برسهمی وجود داردکه ازنقطهٔ M می‌گذرند؛ این دو مماس در نقطه‌هـای $(3 ، 1)$ و $N_2(4 ، 0)$ برسهمی مماس‌اند. برای محاسبهٔمساحت موردنظر، باید معادله‌های این دومماس را بدانیم. مقدارهایی راکه برای x_0 به‌دست آورده‌ایم ، درمعادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم ، معادله‌های دو خط مماس ، به‌ترتیب ، درنقطه‌های N_1 و N_2 ، به‌دست می‌آید.

$$y=2x+1 \quad \text{و} \quad y=-4x+16$$

مساحت شکلی راکه باید محاسبه‌کنیم ، ازدو بخش تشکیل شده است (شکل ۹۶):

a) شکلی کـه زیـر خط راست $y=2x+1$ و بـالای سهمی $y=4x-x^2$، درفاصلهٔ ۱ تا $\frac{5}{2}$ واقع است ؛

b) شکلی کـه زیر خط راست $y=-4x+16$ و بالای سهمی $y=4x-x^2$ در فاصلهٔ $\frac{5}{2}$ تا ۴ واقع است.

مساحت شکل اول چنین است:

$$S_1=\int_1^{\frac{5}{2}}[(2x+1)-(4x-x^2]dx=$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx=\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^{\frac{5}{2}}=\frac{9}{8}$$

و مساحت شکل دوم:

$$S_2=\int_{\frac{5}{2}}^{4}[(16-4x)-(4x-x^2)]dx=$$

$$=\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx=\frac{(x-4)^3}{3}\Big|_{\frac{5}{2}}^{4}=\frac{9}{8}$$

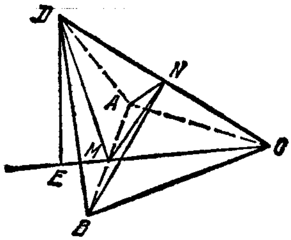
و بنابراین ، مساحت شکل موردنظر مسأله ، چنین می‌شود:

$$S=S_1+S_2=\frac{9}{4}$$

پاسخ: $2\frac{1}{4}$ واحد مربع.

۵. رأس‌های هرم را A ، B ، C و D می‌نامیم ، به نحوی که داشته باشیم: $|AB| = 4$ ، $|CD| = 12$. آن وقت ، بنا برفرض ، خواهیم داشت: $|AC| = |AD| = |BC| = |BD| = 7$.

وسط یال AB را M و وسط یال CD را N می‌نامیم (شکل ۹۷). ثابت می‌کنیم که نقطهٔ O ، مرکز کرهٔ محاط در هرم ، روی پاره‌خط MN واقع است. چون مثلث‌های ABD و ABC متساوی‌الساقین‌اند ، بنا براین ، CM و DM ، ارتفاع‌های این مثلث‌ها خواهند بود و بنا برقضیهٔ فیثاغورث ، داریم:



شکل ۹۷

$$|DM| = \sqrt{|BD|^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$|CM| = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

و به‌همین ترتیب ، به‌دست می‌آید:

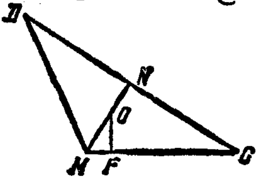
$$|AN| = \sqrt{|AD|^2 - \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$$

$$|BN| = \sqrt{|BD|^2 - \left(\frac{|CD|}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$$

درمثلث متساوی‌الساقین CMD ، میانهٔ MN ، ضمناً، نیمساز زاویهٔ CMD است. چون $CM \perp AB$ و $DM \perp AB$ بنابراین ، DMC ، زاویهٔ دو وجهی به یال AB می‌شود ؛ یعنی ، صفحهٔ ANB ، عبارت است از صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دووجهی به‌یال AB. همهٔ نقطه‌هایی ازاین‌زاویهٔ دووجهی، که از صفحه‌های ABD و ABC به یك فاصله باشند ، روی صفحهٔ نیمساز، یعنی روی صفحهٔ ABN قرار دارند ؛ به این ترتیب ، مرکز کرهٔ O هم روی صفحهٔ ABN واقع است. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که صفحهٔ CMD،

صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دو وجهی به‌یال CD است ، یعنی ، نقطهٔ O در صفحهٔ CMD واقع است. بنابراین ، نقطهٔ O در فصل مشترك صفحه‌های ABN و CMD ، یعنی روی خــط راست MN قرار دارد. مرکز کرهٔ‌محاطی ، در داخل هرم و در نتیجه ، روی پاره‌خط MN است.

اکنون ثابت می‌کنیم که نقطه‌هــای تماس کره با وجه‌های هرم ، روی پاره خط‌های CM ، MD ، BN و AN واقع می‌شوند: این حقیقت را ، مثلاً ، برای‌وجه ABC ثابت‌می‌کنیم. اثبات ، در مورد بقیهٔ موردها هم ، به همین ترتیب ، انجام می‌گیرد. تصویر قــائم نقطهٔ D بـرصفحهٔ ABC را E می‌نامیم. چون $|AD|=|BD|$، پس $|AE|=|BE|$. مجموعهٔ‌همهٔ‌نقطه‌هایی از صفحهٔ ABC کــه از دو نقطهٔ A و B به یك فاصله باشند ، عبارت از عمود منصف پاره‌خط AB ، یعنی، خط راست CM. بنابراین، نقطهٔ Eروی خط‌راست CM قرار دارد. صفحهٔ CMD، ازخط راست DE،که برصفحهٔ ABC عمود است ، می گذرد ، یعنی ، صفحهٔ CMD برصفحهٔ ABC عمود است. چون شعاعی ازکره‌کــه از F ، نقطهٔ تماس‌کره بــا صفحهٔ ABC ، می‌گذرد، برصفحهٔ ABC عمود است، بنابراین، این شعاع باصفحهٔ CMD موازی می‌شود. ولی ، مرکزکره در صفحهٔ CMD قرار دارد ، در نتیجه ، تمامی شعاع OF ، یعنی ضمناً نقطهٔ F ــ نقطـهٔ تماس با صفحهٔ ABC ــ در صفحهٔ CMD قرار می گیرد. و ازاین جا نتیجه می‌شودکه نقطهٔ تماس،روی خط راست CM واقع است.



شکل ۹۸

ازآن جاکه $MN \perp CD$ ونقطهٔ O روی پاره‌خط MN واقع‌است، فاصلهٔ از مرکزکره تا یال CD ، برابر است با طول پـاره‌خط ON. طول این پاره‌خط را x می گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ O ازخط‌های راست CM وBN را ، برحسب x ، محاسبه می کنیم. از مثلث MNC ، بنابرقضیهٔ فیثاغورث، داریم (شکل ۹۸):

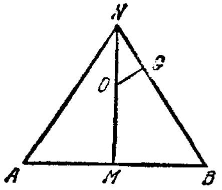
$$|MN|=\sqrt{|CM|^{۲}-|CN|^{۲}}=\sqrt{۴۵-۳۶}=۳$$

دراین صورت $|OM|=|MN|-|ON|=۳-x$ وازتشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OMF و MNG ،که یك‌زاویهٔ مشترك دارند ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{|OF|}{|CN|}=\frac{|OM|}{|CM|}$$ و

$$|OF|=\frac{|CN|}{|CM|}\cdot|OM|=\frac{۶}{۳\sqrt{۵}}(۳-x)=\frac{۲}{\sqrt{۵}}(۳-x)$$

نقطهٔ تماس کره را با صفحهٔ BCD با G نشان می‌دهیم. از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ONG و MNB ، که یك زاویهٔ مشترك دارند (شکل ۹۹) ، به‌دست می‌آید: $\frac{|OG|}{|BM|}=\frac{|ON|}{|BN|}$ ؛ از آن جا



شکل ۹۹

$$|OG|=\frac{|BM|}{|BN|}\cdot|ON|=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}x$$

چون OF و OG ، شعاع‌های یك کره‌اند ، داریم: $|OF|=|OG|$ ویا

$$\frac{۲}{\sqrt{۵}}(۳-x)=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}x$$

با حل این معادله ، به‌دست می‌آید: $x=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}+\sqrt{۵}}$.

پاسخ: $\frac{۳\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}+\sqrt{۵}}$.

۶. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول نامعادله ، عبارت است از مجموعهٔ $x>۰$. به‌سادگی دیده می‌شود که ، در این حوزه ، دوطرف نامعادله مثبت است ؛ بنابراین، ازدو طرف نامعادله ، درمبنایی بزرگتر از ۱ ، و مثلاً درمبنای ۲، لگاریتم می‌گیریم. به‌این نامعادله می‌رسیم:

$$[۲\log_۲ x-\log_۲(x+۶)]\cdot\log_۲(۲^x+۳\times۲^{-x})>۰ \qquad (۳)$$

که در حوزهٔ $x>۰$ ، با نامعادلهٔ مفروض ، هم‌ارز است. چون ، درحوزهٔ $x>۰$ ، داریم:

$$۲^x+۳\times۲^{-x}>۲^x>۱$$

بنابراین $\log_۲(۳^x+۳\times۲^{-x})>۰$ و نامعادلهٔ (۳) ، در حوزهٔ $x>۰$ ، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$۲\log_۲ x-\log_۲(x+۶)>۰$$

و یا

$$x^۲>x+۶ \qquad (۴)$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲-x-۶$ دوجواب دارد: $x_۱=-۲$، $x_۲=۳$.
بنابراین، جواب نامعادلهٔ (۴)، شامل دو فاصله است: $-\infty<x<-۲$ و $۳<x<+\infty$؛ که از آن‌ها، تنها مجموعهٔ $x>۳$، درحوزهٔ $x>۰$ قرار دارد.

پاسخ: $x>۳$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=-۱$؛

۲. $x=\frac{۱}{۳}n\pi+\frac{\pi}{۶}$، $x=\frac{۱}{۳}k\pi+(-۱)^k\cdot\frac{\pi}{۱۸}$ $(n, k\in Z)$؛

۳. ۱۲؛ ۴. $\frac{۱۶}{۳}$؛ ۵. $\frac{۲۴}{۶+\sqrt{۱۵}}$؛ ۶. $x>۴$.

گروه سوم. ۱. $x=۱$؛

۲. $x=\frac{۱}{۲}n\pi$، $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۱۲}$ $(n, k\in Z)$؛ ۳. $\frac{۹۸}{۳}$؛ ۴. $\frac{۹}{۳۲}$؛

۵. $\frac{۴\sqrt{۶+\sqrt{۱۵}}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}$؛ ۶. $-۳<x<۰$.

گروه چهارم. ۱. $x=۸$؛

۲. $x=\frac{۱}{۳}n\pi+\frac{\pi}{۶}$، $x=\frac{۱}{۹}k\pi+(-۱)^{n+۱}\cdot\frac{\pi}{۹}$ $(n, k\in Z)$؛

۳. $\frac{۴۰}{۱۳}$؛ ۴. $\frac{۲}{۳}$؛ ۵. $\frac{۷\sqrt{۷}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۷}}$؛ ۶. $۰<x<۳$.

§۶. دانشکدهٔ ارتباط‌ها

۱۹۷۷

۱. اگر دوطرف معادله را مجذور کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$۴(x+۵)=x^۲+۴x+۴ \qquad (۱)$$

همهٔ ریشه‌های معادلهٔ‌مفروض در بین ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند، ولی‌هر ریشهٔ معادلهٔ (۱) ممکن است ریشهٔ معادلهٔ مفروض نباشد. معادلهٔ درجه دوم (۱) دوریشه دارد: $x_۱=۴$ و $x_۲=-۴$. تحقیق نشان می‌دهد که تنها $x_۱=۴$، درمعادلهٔ مفروض صدق می کند.

پاسخ: $x=۴$.

۲. چون تابع‌های $y(x)=x$ و $y(x)=e^{-۳x}$ در هر نقطهٔ x از بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ مشتق‌پذیرند، بنابراین، تابع مفروض هم، در هرنقطه‌ای مشتق‌پذیراست وداریم:

$$f'(x)=(x\cdot e^{-۳x})'=(x)'\cdot e^{-۳x}+x\cdot(e^{-۳x})'=$$
$$=e^{-۳x}-۳xe^{-۳x}=e^{-۳x}(۱-۳x)$$

چون $e^{-۳x}>۰$، بنابراین $f'(x)$، به ازای $x<\frac{۱}{۳}$ مثبت، به ازای $x>\frac{۱}{۳}$ منفی وبه‌ازای $x=\frac{۱}{۳}$ برابر صفر است. در نتیجه، تابع $f(x)$ دربازهٔ $\left(-\infty, \frac{۱}{۳}\right)$ صعودی، دربازهٔ $\left(\frac{۱}{۳}, +\infty\right)$ نزولی و، چون در نقطهٔ $\frac{۱}{۳}$ پیوسته است، به ازای $x=\frac{۱}{۳}$ ماکزیمم‌است.

پاسخ: $x=\frac{۱}{۳}$، نقطهٔ ماکزیمم است. تابع دربازهٔ $\left(-\infty, \frac{۱}{۳}\right)$ صعودی و دربازهٔ $\left(\frac{۱}{۳}, +\infty\right)$ نزولی است.

۳. راه‌حل اول. برای این‌که از علامت قدر مطلق آزاد شویم، محور عددی را به‌دو بخش تقسیم می کنیم: بخش اول، شامل حوزه‌ای‌که در آن $\sin x\geqslant ۰$ و بخش دوم، حوزه‌ای که در آن $\sin x<۰$ باشد. درحوزهٔ اول داریم: $|\sin x|=\sin x$ ومعادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sin x=\sin x+۲\cos x \implies \cos x=۰$$

که از حل آن به‌دست می‌آید: $(m\in Z)x=m\pi+\frac{\pi}{2}$. از بین این مقدارهای x، باید آن‌هایی را انتخاب کرد، که به‌ازای آن‌ها، داشته باشیم: $\sin x\geqslant 0$. به‌سادگی دیده می‌شود که این‌ها عبارتند از $(n\in Z)x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

درحوزهٔ دوم داریم: $|\sin x|=-\sin x$، و معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$-\sin x=\sin x+2\cos x \implies \sin x+\cos x=0$$

این معادله را می‌توان به‌صورت $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ نوشت، که به‌جواب $(l\in Z)x=l\pi-\frac{\pi}{4}$ می‌رسد. از این مقدارهای x، تنها

$$(k\in Z)x=2h\pi-\frac{\pi}{4}$$

با شرط $\sin x<0$ سازگارند. به این ترتیب، جواب‌های معادلهٔ مفروض، چنین‌اند:

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{4},\ x=2n\pi+\frac{\pi}{4}(k,\ n\in Z)$$

راه‌حل دوم. دوطرف معادله را مجذورمی کنیم، به‌این معادله‌می‌رسیم:

$$\sin^2 x=\sin^2 x+4\sin x\cos x+4\cos^2 x$$

یا

$$\cos x(\sin x+\cos x)=0$$

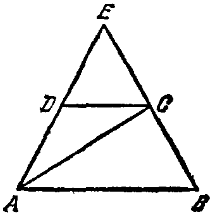
این معادله، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر، هم‌ارز است:

$$\cos x=0,\ \sin x+\cos x=0$$

جواب‌های معادلهٔ اول به‌صورت $(m\in Z)x=m\pi+\frac{\pi}{2}$ و جواب‌های معادلهٔ دوم به‌صورت $(l\in Z)x=l\pi-\frac{\pi}{4}$ درمی‌آید. چون، با مجذور کردن دوطرف معادله، ممکن است جواب اضافی وارد آن شده باشد، بایدجواب‌ها را درمعادلهٔ مفروض آزمایش کنیم؛ و به‌سادگی معلوم می‌شود که جواب‌های معادلهٔ مفروض چنین‌اند:

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{2},\ x=2k\pi-\frac{\pi}{4}(n,\ k\in Z)$$

۴. ساق‌های BC و AD از ذوزنقه را ادامه می‌دهیم تا درنقطهٔ E به‌هم برسند (شکل ۱۰۰). مثلث BAE به‌دست می‌آید. چون $|CD|=\frac{1}{2}|AB|$، از تشابه دومثلث CED و BEA به‌دست می‌آید:



شکل ۱۰۰

$$|CE|=\frac{1}{2}|BE|=|BC|=b$$

و
$$|DE|=\frac{1}{2}|AE|=|AD|=\frac{1}{2}|AB|$$

وازآن‌جا $|AB|=|AE|$. بنابراین، مثلث BAE متساوی‌الساقین و AC میانهٔ آن است. امـا، در مثلث متساوی‌الساقین، میانه برارتفاع منطبق است، درنتیجه، مساحت مثلث BAE را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{BAE}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BE|=\frac{1}{2}a\cdot 2b=ab$$

چون CD میانهٔ مثلث ACE است و چون طول ارتفاع‌های دومثلث ECD و DCA برابرند، دارای مساحت‌های برابر می‌شوند. سپس، چون دومثلث ECA و ABE مساحت‌هایی برابر دارند، مساحت مثلث CDE برابر $\frac{1}{4}ab$ خواهد شد. مساحت ذوزنقهٔ ABCD، براراست با تفاضل مساحت‌های دومثلث ABE و DCE، یعنی $ab-\frac{1}{2}ab$ یا $\frac{3}{4}ab$.

یادداشت. مساحت مثلث CDE را می‌تـوان به کمك قضیهٔ مربـوط به‌نسبت مساحت‌های دوچندضلعی متشابه، محاسبه کـرد. چـون ضرب تشابه مثلث‌های CDE و BAE براراست با $\frac{1}{2}$، بنابراین

$$S_{CDE}=\frac{1}{4}S_{BAE}=\frac{ab}{4}$$

پاسخ: $\frac{3}{4}ab$.

۵. تعداد ردیف‌های گروهان را، در موقع رژه، x می‌گیریم. تعداد سربازهای گروهان برابر $24x$ می‌شود. بعد از تجدید سازمان، $(x-2)$ ردیف‌داریم وتعداد سربازهای هرردیف $(x-2)+26$ می‌شود. درنتیجه، بـرای رژه $(x-2)(24+x)$ سرباز شرکت کرده‌اند. تعداد سربازهایی کـه در رژه شرکت نکرده‌اند، برابراست با

$$24x-(x-2)(24+x)=-x^2+2x+48 \qquad (2)$$

این سه‌جمله‌ای درجهٔ‌دوم، دوریشه دارد: $x_1=-6$، $x_2=8$. یعنی‌عبارت (۲) وقتی مثبت است که داشته باشیم: $-6<x<8$. x، تعداد ردیف‌ها است و، بنابراین، عددی است طبیعی وباید داشته باشیم: $1\leqslant x\leqslant 7$. باید ازاین مقدارهای ممکن x، عددی را انتخاب‌کنیم که $A=24x$ را مجذور کامل کند. به‌ترتیب داریم:

$$x=1,\ A=24;\ \ x=5,\ A=120;$$
$$x=2,\ A=48;\ \ x=6,\ A=144;$$
$$x=3,\ A=72;\ \ x=7,\ A=168$$
$$x=4,\ A=96;$$

ازبین این عددها، که برای A به‌دست می‌آید، تنها ۱۴۴ مجذورکامل است: $12^2=144$. بنابراین $x=6$ وتعداد سربازان برابر۱۴۴ می‌باشد.

۶. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x، برای معادله، با این شرطها معین می‌شود:

$$x+\frac{1}{2}>0,\ x-1>0,\ x+\frac{5}{2}>0$$

بنابراین، حوزهٔ تعریف معادله، عبارت است از $1<x<+\infty$. در ایـن حوزه، معادلهٔ مفروض، با معادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\lg\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right]=\lg\left[2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)\right]$$

و یا

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$$

معادلهٔ‌اخیردوجواب‌دارد: $x_1=\frac{3}{2}$ و $x_2=-\frac{7}{2}$؛ که ازآن‌ها، تنها $x_1=\frac{3}{2}$ درحوزه $1<x<+\infty$ قراردارد.

پاسخ: $x=\frac{3}{2}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=10$؛

۲. $x=-\frac{3}{2}$ نقطهٔ می‌نیمم، تابع درفاصلهٔ $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ نزولی ودرفاصلهٔ $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ صعودی است؛ ۳. $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\ (k\in Z)$؛

۴. $\sqrt{4p^2-q^2}$؛ ۵. ۴۴؛ ۶. $x=2$.

گروه سوم. ۱. $x=19$؛

۲. $x=\frac{1}{5}$ نقطهٔ ماکزیمم، تابع درفاصلهٔ $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ صعودی و در فاصلهٔ $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ نزولی است؛

۳. $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$، $x=2m\pi\ (k, m\in Z)$؛ ۴. $\sqrt{4k^2-l^2}$؛

۵. ۶۰؛ ۶. $x=\frac{1}{2}$.

گروه چهارم. ۱. $x=2$؛

۲. $x=\frac{2}{3}$ نقطهٔ می‌نیمم، تابع در فاصلهٔ $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ نزولی و در فاصلهٔ $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ صعودی است؛

۳. $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\ (k\in Z)$؛ $\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2}$؛ ۵. ۲۲؛ ۶. $x=1$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ معادله می‌بریم و تفاضل کسینوس‌ها را به‌ضرب تبدیل می‌کنیم؛ معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$2\sin 2x \sin x - 2\sin 2x = 0$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\sin 2x = 0 \quad \text{و} \quad \sin x = 1$$

که جواب‌های معادلهٔ اول به‌صورت $x = \frac{1}{2}n\pi$ وجواب‌های معادلهٔ دوم به‌صورت $x = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ $(n, m \in Z)$ درمی آیند. ولی، چون همهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم، در بین جواب‌های معادلهٔ اول وجود دارد، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ مفروض، عبارت است از $x = \frac{1}{2}n\pi$ $(n \in Z)$.

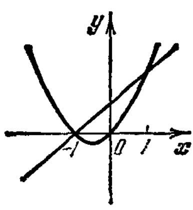
۲. $\log_2 x$ را y می‌گیریم. نامعادلهٔ مفروض به‌صورت $y^2 - 3y + 2 \geqslant 0$ درمی‌آید. جواب‌های این نامعادله، شامل دو فاصله است. $-\infty < y \leqslant 1$ و $2 \leqslant y < +\infty$. بنابراین، معادلهٔ مفروض، به‌صورت مجموعهٔ دونامعادله درمی‌آید:

$$\log_2 x \leqslant 1 \quad \text{و} \quad \log_2 x \geqslant 2$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول $0 < x \leqslant 2$ ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم $4 \leqslant x < +\infty$ است.

پاسخ: $0 < x \leqslant 2$، $4 \leqslant x < +\infty$.

۳. با حل معادلهٔ $x^2 + x = x + 1$، طول‌های نقطه‌های برخورد سهمی $y = x^2 + x$ وخط‌راست $y = x + 1$ به دست می‌آید. $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$ (شکل ۱۰۱).



شکل ۱۰۱

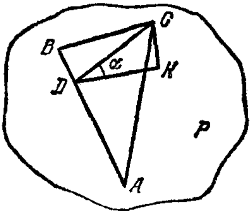
شکل موردنظر، که بایدمساحت آن را محاسبه کنیم، زیرخط راست $y = x + 1$ وبالای سهمی $y = x^2 + x$، درفاصلهٔ از -1 تا 1 قراردارد. بنابراین

$$S = \int_{-1}^{1} [(x+1) - (x^2 + x)]\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

پاسخ: $\frac{۴}{۳}$ واحد مربع.

۴. راس‌های مثلث را با حرف‌های A، B و C نشان می‌دهیم، به‌نحوی که C راس زاویهٔ قائمه و CB ضلع کوچکتر مجاور به‌زاویهٔ قائمه باشد (شکل ۱۰۲). از نقطهٔ C، صفحه‌ای عمود برخط راست AB رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این صفحه را با خط راست AB با حرف B و پای عمودی راکه ازنقطهٔ C برصفحهٔ P فرودآید، با حرف K نشان می‌دهیم، مثلث CKD قائم‌الزاویه است، زیرا پاره‌خط CK برصفحهٔ P عمود و DK برصفحهٔ P



شکل ۱۰۲

واقع است. چون CD و DK برخط راست AB عمودند، بنابراین، زاویهٔ CDK همان زاویهٔ بین صفحهٔ P و صفحهٔ ABC است و، در نتیجه، $\widehat{CDK}=\alpha$. زاویهٔ CBK را محاسبه‌می کنیم. چون CD برAB عموداست، از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ CDA و ABC به دست می‌آید:

$\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{|CD|}{|CA|}$ و، از آن‌جا: $|CD|=\frac{|CA|\cdot|BC|}{|AB|}=\frac{۱۲}{۵}$. ازمثلث قائم‌الزاویهٔ CDK به‌دست می‌آید: $|CK|=|CD|\,.\,sin\alpha=\frac{۱۲}{۵}sin\alpha$، و

از مثلث قائم‌الزاویهٔ CBK داریم: $\frac{|CK|}{۳}=sin\widehat{CBK}$ و از آن‌جا:

$sin\widehat{CBK}=\frac{۴}{۵}sin\alpha$ ودر نتیجه: $\widehat{CBK}=\arcsin\left(\frac{۴}{۵}sin\alpha\right)$.

پاسخ: $\arcsin\left(\frac{۴}{۵}sin\alpha\right)$.

۵. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادله، عبارت است از همهٔ مقدارهای x که در شرط‌های $x^۲-۳\geqslant ۰$ و $x\geqslant ۰$ صدق کنند، یعنی $\sqrt{۳}\leqslant x<+\infty$. معادلهٔ مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt{x}\left(۹^{\sqrt{x^۲-۳}}-۳^{\sqrt{x^۲-۳}}\right)=۳\left(۹^{\sqrt{x^۲-۳}}-۳^{\sqrt{x^۲-۳}}\right)+.$$

$$+6(\sqrt{x}-3)$$

ویا

$$(\sqrt{x}-3)\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6\right)=0$$

واین معادله، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر، هم‌ارز است:

$$\sqrt{x}-3=0 \quad و \quad 9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}-6=0 \qquad (1)$$

جواب معادلهٔ اول، عبارت است از $x=9$، که درحوزهٔ تعریف معادلهٔ مفروض قراردارد، بنابراین، جوابی از آن است. معادلهٔ $y^2-y-6=0$ دو جواب دارد: $y_1=-2$ و $y_2=3$. بنابراین، معادلهٔ دوم (۱)، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر، هم‌ارز است.

$$3^{\sqrt{x^2-3}}=-2 \quad و \quad 3^{\sqrt{x^2-3}}=3$$

از این دو معادله، معادلهٔ اول، جواب ندارد؛ و معادلهٔ دوم، منجر به معادلهٔ $\sqrt{x^2-3}=1$ می‌شود، که دارای دو جواب است: $x_2=2$، $x_3=-2$. از این دوجواب، تنها $x_2=2$ درحوزهٔ تعریف معادله قراردارد و، بنابراین، تنها جواب معادلهٔ دوم مجموعهٔ (۱) است.

پاسخ: $x_1=9$ و $x_2=2$.

۶. فرض می کنیم، درهر گرم ازآلیاژدوم، x گرم طلا باشد، بنابراین، درهر گرم آلیاژ اول $2/5x$ گرم طلا وجود خواهد داشت. اگر از هرآلیاژ یک گرم انتخاب کنیم، در آلیاژ حاصل، که وزنی برابر ۲ گرم دارد، $3/5x$ گرم طلا خواهد بود. بنابرفرض، دراین آلیاژ، ۳۵٪ طلا داریم. بنابراین:

$$3/5x=\frac{35}{100}\times 2$$

وازآن‌جا: $x=0/2$ به‌این ترتیب، درهرگرم آلیاژ دوم ۰/۲ گرم طلا ودر یک گرم آلیاژ اول ۰/۵ گرم طلا وجود دارد.

وزن آلیاژ اول را y گرم ووزن آلیاژ دوم را z گرم می گیریم؛دراین صورت، درآلیاژ اول $0/5y$ گرم طلا، و درآلیاژ دوم $0/2z$ گرم طلا پیدا می‌شود. اگر از دوآلیاژ، آلیاژسومی درست کنیم، وزن آلیاژ سوم $y+z$ گرم خواهد بود که شامل $0/5y+0/2z$ گرم طلا است. طبق فرض‌مسأله،

آلیاژ سوم ۴۰٪ طلا دارد، بنابراین

$$0/5y+0/2z=\frac{40}{100}(y+z)$$

ازاین معادله، به‌دست می‌آید: $y=2z$ و این، به‌معنای آن است که آلیاژ اول دوبرابر آلیاژ دوم، وزن دارد.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=(6k\pm1)\cdot\frac{\pi}{12}$ $(k\in Z)$؛

۲. $-\infty<x<1$؛ ۳. $\frac{1}{6}$؛ ۴. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}\sin\alpha}{2}\right)$؛

۵. $x_1=-\frac{13}{5}$، $x_2=-2$، $x_3=3$؛ ۶. ۱۵ کیلوگرم.

گروه سوم. ۱. $x=(6k\pm1)\cdot\frac{\pi}{18}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $-\infty<x<2$؛

۳. $\frac{1}{6}$؛ ۴. $\arcsin\left(\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}\right)$؛ ۵. $x_1=1$، $x_2=2$؛

۶. ۱۰ کیلوگرم، ۶۹٪.

گروه چهارم. ۱. $x=(6k\pm1)\cdot\frac{\pi}{9}$، $x=\frac{1}{2}n\pi$ $(k, n\in Z)$؛

۲. $0<x\leqslant\frac{1}{9}$، $3\leqslant x<+\infty$؛ ۳. $\frac{23}{3}$؛

۴. $\arcsin\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)$؛ ۵. $x_1=1$، $x_2=4$؛

۶. ۱/۶۴ کیلوگرم، ۱/۸۶ کیلوگرم.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. $2^{\sqrt{x}}$ را t می‌گیریم. دراین صورت، معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$t-۲t^{-۱}=۱ \implies \frac{t^{۲}-t-۲}{t}=۰$$

که دارای دوریشه است. $t_۱=۲$، $t_۲=-۱$. به‌این ترتیب، معادلهٔ‌مفروض، هم‌ارز دومعادلهٔ زیراست.

$$۲^{۱/x}=۲ \quad و \quad ۲^{۱/x}=-۱$$

معادلهٔ اول، دارای جواب منحصر به فرد $x=۱$ است و معادلهٔ دوم جواب ندارد.

پاسخ : $x=۱$.

۴. تابع مفروض، برای‌همهٔ مقدارهای x به‌جز $x=۲$، مشتق‌پذیراست و، برای این مقدارها، داریم:

$$y'(x)=۱-\frac{۸}{(x-۲)^{۳}}$$

ازعبارت مشتق معلوم‌می‌شود که، برای $x<۲$ داریم $y'(x)>۰$. بنابراین، تابع مفروض، درمجموعهٔ $x<۲$، به‌طور یکنــوا صعودی است؛ در نتیجه، حداقل مقدار آن درمجموعهٔ $[۰, ۲]$ برابراست با $y(۰)=۱$.

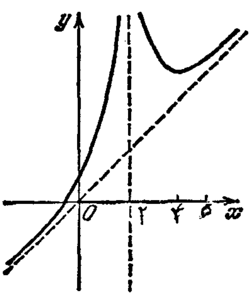
معادلهٔ $y'(x)=۰$ یا $۱-\frac{۸}{(x-۲)}=۰$، یك ریشه دارد: $x=۴$.

درحوزهٔ $۲<x<۴$، نابرابری $y'(x)<۰$ ودرحوزهٔ $x>۴$، نابرابری $y'(x)>۰$ برقراراست؛ وچون‌تابع $y(x)$ در نقطهٔ $x=۴$ پیوسته است، نتیجه می‌شود که تابع $y(x)$:

۱) در حــوزهٔ $۲<x\leqslant۴$، به‌طور یکنوا، نزولی است؛

۲) درحــوزهٔ $x\geqslant۴$ به‌طــور یکنوا صعودی است؛

۳) و در نقطهٔ $x=۴$ می‌نیمم است.



شکل ۱۰۳

از آن‌چه گفتیم، نتیجه‌می‌شود که حداقل‌مقدار $y(x)$، درحوزهٔ $x>۲$ برابر است با $y(۴)=۵$. به‌این ترتیب، $y(۴)$، حداقل مقدار تابع $y(x)$ درحوزه $[۲, ۵]$ می‌شود.

حداقل مقدار تابع $y(x)$ را، دربازهٔ $[۰, ۵]$، باید از بین $y(۰)$ و $y(۴)$ انتخاب کرد، یعنی برابراست با $y(۰)=۱$.

نمودار تابع $y(x)$ را رسم کرده‌ایم (شکل ۱۰۳)، اگرچه برای حل مسأله، نیازی به‌آن وجود ندارد.

پاسخ: $y_{Min}=y(۰)=۱$.

۳. معادلهٔ مفروض را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(۱+\sqrt{۳})\sin x\cos x=(\sqrt{۳}-۱)\cos^۲ x+\sin^۲ x+\cos^۲ x$$

روشن است که جواب‌های این معادله، با شرط $\cos x\neq ۰$ سازگاراست، بنابراین، می‌توانیم دوطرف آن را بر $\cos^۲ x$ تقسیم کنیم:

$$(۱+\sqrt{۳})tg\,x=\sqrt{۳}+tg^۲ x$$

ویا
$$tg^۲ x-(۱+\sqrt{۳})tg\,x+\sqrt{۳}=۰$$

که با معادلهٔ مفروض، هم‌ارزاست. این‌معادله، نسبت به $tg\,x$ دوجواب‌دارد:

$$tg\,x=۱ \quad \text{و} \quad tg\,x=\sqrt{۳}$$

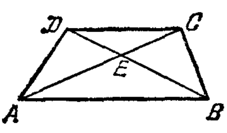
مجموعهٔ این دومعادله، با معادلهٔ مفروض مسأله، هم‌ارز است و، بنابراین، با حل آن‌ها، جواب‌های معادلهٔ مفروض، به‌دست می‌آید.

پاسخ: $x=n\pi+\frac{\pi}{۴}$، $x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$ $(n، k\in Z)$.

۴. طول ارتفاع وارد ازرأس B درمثلث ABC را، h می‌گیریم (شکل۱۰۴). ازآن‌جاکه، همین پاره‌خط، ضمناً، ارتفاع مثلث BCE هم می‌باشد، داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|AC|\cdot h,$$

$$S_{BCE}=\frac{۱}{۲}|CE|\cdot h$$



شکل ۱۰۴

ازاین برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCE}}=\frac{|AC|}{|CE|}=۱+\frac{|AE|}{|CE|} \qquad (۱)$$

در مثلث‌های ABE و CED، زاویه‌های متناظر برابرند ($\widehat{AEB}=\widehat{CED}$، $\widehat{ABE}=\widehat{CDE}$). یعنی این دومثلث متشابه‌اند و

$$\frac{|AE|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{۳۰}{۲۴}=\frac{۵}{۴} \qquad (۲)$$

اکنون، از (۱) و (۲) به‌دست می‌آید:

$$S_{BCE}=\frac{4}{9}S_{ABC}$$

مثلث‌های ABC و ABD در قاعدهٔ AB مشترک‌اند. چون ارتفاع‌های وارد برهمین ضلع مشترک، در دومثلث، یکی است، بنابراین

$$S_{ABC}=S_{ABD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AD|\cdot \sin\widehat{DAB}=$$

$$=\frac{1}{2}\times 30\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{45\sqrt{3}}{2}$$

و

$$S_{BCE}=\frac{4}{9}\cdot\frac{45\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

پاسخ: $10\sqrt{3}$ مترمربع.

۵. راه‌حل اول. معادلهٔ اول دستگاه را، این‌طور می‌نویسیم:

$$10x^2-(2y+38)x+5y^2-6y+41=0$$

اگر (x_0, y_0) جوابی از دستگاه مفروض معادله‌ها باشد، آن وقت، معادلهٔ درجه دوم

$$10x^2-(2y_0+38)x+5y_0^2-6y_0+41=0$$

دارای ریشهٔ $x=x_0$ است. یعنی مبین Δ ازاین معادله باید غیر منفی باشد. چون

$$\Delta=(2y_0+38)^2-40(5y_0^2-6y_0+41)=-4\times 49(y_0-1)^2$$

بنابراین، از نابرابری $-4\times 49(y_0-1)^2\geqslant 0$ نتیجه می‌شود: $y_0=1$. واین، به‌معنای آن است که x_0، ریشهٔ معادلهٔ

$$10x^2-40x+40=0$$

یعنی $x_0=2$ است. بنابراین، اگردستگاه معادله‌های مفروض جواب داشته باشد، این جواب عبارت است از $x_0=2$ و $y_0=1$؛ که اگر آن‌ها را،در معادله‌های دستگاه قراردهیم، قانع می‌شویم که، در واقع هم، درآن‌ها صدق می‌کند.

راه‌حل دوم. چندجمله‌ای سمت‌چپ معادلهٔ‌اول‌دستگاه را، به‌این‌ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=$$
$$=10\left[x^2-2\times\frac{y+19}{10}x+\left(\frac{y+19}{10}\right)^2\right]+5y^2-6y+$$
$$+41-10\left(\frac{y+19}{10}\right)^2=10\left(x-\frac{y+19}{10}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{10}(49y^2-98y+49)=10\left(x-\frac{y+19}{10}\right)^2+$$
$$+\frac{49}{10}(y-1)^2$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه، هرجواب دستگاه مفروض، باید جواب دستگاه زیر باشد:

$$\begin{cases} x-\dfrac{y+19}{10}=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

این دستگاه، یک جواب دارد: $x=2$ ، $y=1$. اگر این مقدارها را در معادله‌های دستگاه مفروض قراردهیم، معلوم می‌شودکه درهردو معادلهٔ آن صدق می‌کنند.

راه‌حل سوم. چندجمله‌ای سمت‌چپ معادلهٔ دوم دستگاه را، تبدیل می‌کنیم:

$$3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=$$
$$=3\left[x^2+2\times\frac{5y-17}{6}x+\left(\frac{5y-17}{6}\right)^2\right]-$$
$$-2y^2-6y+20-3\left(\frac{5y-17}{6}\right)^2=$$
$$=3\left(x+\frac{5y-17}{6}\right)^2-\frac{49}{12}(y^2-2y+1)=$$
$$=\frac{1}{12}[(6x+5y-17)^2-(7x-)^2]=$$
$$=\frac{1}{12}(6x+12y-24)(6x-2y-10)=$$

$$=(x+2y-4)(3x-y-5)$$

اکنون روشن است که دستگاه معادله‌های مفروض، هم‌ارز مجموعهٔ دودستگاه زیراست:

$$\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0\\ x+2y-4=0\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0\\ 3x-y-5=0\end{cases}$$

که هریك از آن‌ها، جوابی منحصردارند: $x=2$، $y=1$.

یادآوری می کنیم که، این دستگاه را باروش‌های دیگری هم‌می‌توان حل کرد.

پاسخ: $x=2$، $y=1$.

۶. جمله‌ها را ازسمت‌چپ به‌سمت راست نامعادله می‌بریم، به‌یك مخرج تبدیل می‌کنیم وصورت کسررا تبدیل می کنیم، به‌این نامعادله می‌رسیم:

$$\frac{\log_3\dfrac{x^2-7x+12}{20}}{\log_3(x^2-7x+12)\cdot\log_3 20}>0$$

که با نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارز است. چون $\log_3 20>0$، بنابراین، این نامعادله را می‌توان به‌مجموعهٔ دستگاه زیر، تبدیل کرد:

$$\begin{cases}\log_3\dfrac{x^2-7x+12}{20}>0\\ \log_3(x^2-7x+12)>0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}\log_3\dfrac{x^2-7x+12}{20}<0\\ \log_3(x^2-7x+12)<0\end{cases}$$

دستگاه اول، با دستگاه زیرهم‌ارز است:

$$\begin{cases}x^2-7x+12>20\\ x^2-7x+12>1\end{cases}$$

روشن است که اگر نامعادلهٔ اول این دستگاه برقرار باشد، نامعادلهٔ دوم آن هم ، به خودی خود، برقرار خواهد بود. از حل نامعادلهٔ اول به دست می آید:

$$8<x<+\infty \quad \text{و} \quad -\infty<x<-1$$

دستگاه دوم نامعادله‌ها، با این دستگاه هم‌ارز است:

$$\begin{cases} 0<\dfrac{x^2-7x+12}{20}<1 \\ 0<x^2-7x+12<1 \end{cases}$$

ویا دستگاه

$$\begin{cases} x^2-7x+12>0 \\ x^2-7x+12<1 \end{cases}$$

جواب‌های نامعادلهٔ اول این دستگاه عبارت است از: $-\infty<x<3$ و $4<x<+\infty$؛ وجواب‌های نامعادلهٔ دوم: $\frac{7-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}$.
یعنی مجموعهٔ جواب‌های دستگاه چنین می‌شود: $\frac{7-\sqrt{5}}{2}<x<3$ و $4<x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}$.

پاسخ: $x<-1$، $\frac{7-\sqrt{5}}{2}<x<3$، $4<x<\frac{7+\sqrt{5}}{2}$؛ $x>8$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=\frac{1}{100}$؛

۲. تابع، درفاصله‌های $-\infty<x<0$ و $2<x<+\infty$ صعودی، ودرفاصله‌های $0<x<1$ و $1<x<2$ نزولی است؛

۳. $x=\frac{1}{2}n\pi+\frac{\pi}{8}$، $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(n, k\in Z)$؛ ۴. ۴۰ سانتیمترمربع؛

۵. $x=1$، $y=1$؛ ۶. $0\leqslant x<1$، $x>3$.

گروه سوم. ۱. $x=1$؛ ۲. $y_{Max}=y(3)=-\frac{1}{64}$؛

۳. $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$، $x=m\pi+\frac{\pi}{6}$ $(n, m\in Z)$؛

۴. $\frac{54\sqrt{2}}{5}$ سانتیمترمربع؛ ۵. $x=2$، $y=3$؛

۶. $-1/1<x<4$، $x>5$.

گروه چهارم. ۱. $x=2$؛

۲. تابع در فاصله‌های $-\infty<x<-1$ و $0<x<1$ صعودی و در فاصله‌های $-1<x<0$ و $1<x<+\infty$ نزولی است؛

۳. $x=\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}$، $x=\frac{1}{2}m\pi+\frac{\pi}{12}$ $(n, m\in Z)$،

۴. ۱۱۸۰ سانتیمترمربع؛ ۵. $x=1$، $y=2$؛

۶. $-4\leqslant x<-2$، $x>0$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. از معادلهٔ اول به دست می‌آید: $y=x-6$، اگر $x-6$ را به‌جای y در معادلهٔ دوم قراردهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$x^3-(x-6)^3=126 \Rightarrow x^2-6x+5=0$$

این معادله، دوریشه دارد: $x_1=1$ و $x_2=5$. درنتیجه، دستگاه، دوجواب دارد: $x_1=1$، $y_1=-5$ و $x_2=5$، $y_2=-1$.

پاسخ: $(1, -5)$، $(5, -1)$.

۲. مشتق تابع مفروض را پیدا می‌کنیم:

$$y'(x)=(4x-\sin 2x+4\sqrt{2}\cos x)'=$$
$$=4-2\cos 2x-4\sqrt{2}\sin x=2(2-\cos 2x-2\sqrt{2}\sin x)$$

برای‌حل مساله، باید همهٔ جواب‌های معادلهٔ زیررا پیدا کرد:

$$2-\cos 2x-2\sqrt{2}\sin x=0 \qquad (1)$$

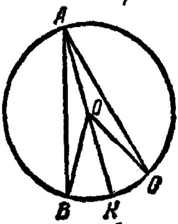
که اگراز رابطهٔ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ استفاده کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0$$

و بنابراین، معادلهٔ (۱) هم‌ارز معادلهٔ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است که جواب‌های آن و، درنتیجه، جواب مسأله، به‌دست می‌آید:

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}$$

۴. مرکز دایره را O وشعاع آن را r می‌گیریم. نقطه‌های B و C را به O وصل وقطر AK را رسم می‌کنیم (شکل ۱۰۵). چون زاویهٔ $\widehat{BAC}$، زاویه‌ای محاطی و روبه‌روی به‌کمان BKC واندازهٔ آن برابر $\frac{\pi}{6}$ است، بنابراین، زاویهٔ مرکزی BOC، که روبه‌روی به‌همان کمان است، اندازه‌ای برابر $\frac{\pi}{3}$ دارد. چون وترهای AB و AC، طول‌هایی برابردارند، پس $\widehat{BOA} = \widehat{AOC}$. چون



شکل ۱۰۵

$$\widehat{BOA} + \widehat{AOC} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$\widehat{BOA} = \widehat{AOC} = \frac{5\pi}{6}$ به دست می‌آید. حالا، مساحت قسمتی ازدایره را که به وسیلهٔ زاویهٔ BAC محدود شده است، محاسبه می‌کنیم. این مساحت، برابراست با مجموع مساحت‌های قطاع OBKC و مثلث‌های AOB و AOC،

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times r \times r\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{r^2}{4},$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} r \times r\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{r^2}{4}$$

$$S_{OBKC} = \frac{r^2}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi r^2}{6}$$

بنابراین، $S_{ABKC} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{6}$، یعنی $\frac{r^2(\pi+3)}{6}$. وچون مساحت

دایره برابراست با $S=\pi r^2$، پس نسبت مطلوب، چنین می‌شود:

$$\frac{S_{ABKC}}{S}=\frac{r^2(\pi+3)}{6\pi r^2}=\frac{\pi+3}{6\pi}$$

پاسخ: $\frac{\pi+3}{6\pi}$.

۴. نامعادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دو دستگاه نامعادله‌های زیرهم‌ارزاست:

$$\begin{cases} 4x^2-16x+7>0 \\ \log_2(x-3)>0 \end{cases} \qquad (2)$$

و

$$\begin{cases} 4x^2-16x+7<0 \\ \log_2(x-3)<0 \end{cases} \qquad (3)$$

دستگاه نامعادله‌های (۲)، هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)>0 \\ x-3>1 \end{cases} \qquad (4)$$

جواب نامعادلهٔاول این‌دستگاه، ازدوبازه‌تشکیل‌شده است: $-\infty<x<\frac{1}{2}$ و $\frac{7}{2}<x<+\infty$؛ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادله دوم از بازهٔ $4<x<+\infty$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه (۴)، و در نتیجه دستگاه (۲) ، عبارت است از فصل مشترك جواب‌های نامعادله‌های اول و دوم آن، یعنی مجموعهٔ $4<x<+\infty$. دستگاه‌نامعادله‌های (۳) رامی‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)<0 \\ 0<x-3<1 \end{cases} \qquad (5)$$

جواب‌های نامعادلهٔ اول دستگاه (۵) عبارت است از $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$ ونامعادلهٔ

دوم آن $۴ > x > ۳$؛ بنابراین، جواب‌های دستگاه (۵) از مجموعهٔ $۳ < x < \frac{۷}{۲}$ تشکیل شده است.

به‌این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، از دو بازه تشکیل می‌شود:

$$۳ < x < \frac{۷}{۲} \quad \text{و} \quad ۴ < x < +\infty$$

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $(۱, ۶)$، $(۶, ۱)$؛ ۲. $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ $(k \in Z)$؛

۳. $\frac{a^۲}{۲۴}(۳\sqrt{۳} - \pi)$؛ ۴. $-۱ < x < ۲$، $x > ۳$.

گروه سوم. ۱. $(-۱, ۶)$، $(۶, -۱)$؛

۲. $x = n\pi + (-۱)^n \cdot \frac{\pi}{۳}$ $(n \in Z)$؛ ۳. $\frac{\pi - ۳}{۱۱\pi + ۳}$؛

۴. $-۱ < x < -\frac{۱}{۲}$، $۰ < x < \frac{۵}{۲}$؛

گروه چهارم. ۱. $(۲, ۵)$، $(-۵, -۲)$؛

۲. $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ $(k \in Z)$؛ ۳. $\frac{a^۲}{۱۲}(۲\pi - ۳\sqrt{۳})$؛

۴. $x < ۱$، $۲ < x < ۳$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. طول راهی راکه گروه‌های اول، دوم وسوم، درمدت یك ماه، آماده‌می‌کنند، برحسب کیلومتر، به‌ترتیب، x، y و z می‌گیریم. چون، دو گروه اول وسوم، وقتی که با هم‌کار می‌کنند، درمدت یك ماه، ۱۵ کیلومتر از راه را آماده

می‌سازند، پس

$$x+z=۱۵$$

وچون‌کار ماهیانهٔ سه گروه با هم، دوبرابرکار ماهیانهٔ‌گروه‌های اول و دوم است، پس

$$x+y+z=۲(x+y)$$

ضمناً می‌دانیم که گروه‌های دوم و سوم با هم، یک قطعه راه را، در زمانی انجام می‌دهند که گروه دوم به‌تنهائی آن را در۴ برابر آن زمان به‌پایان می‌رساند، پس

$$y+z=۴y$$

به‌این ترتیب، به‌دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} x+z = ۱۵ \\ x+y+z=۲(x+y) \\ y+z=۴y \end{cases} \qquad (۱)$$

ازمعادلهٔ اول داریم: $x=۱۵-z$ وازمعادلهٔ سوم: $y=\frac{۱}{۳}z$. اگر $۱۵-z$ و $\frac{۱}{۳}z$ را، به‌ترتیب، به‌جای x و y در معادلهٔ دوم دستگاه (۱) قرار دهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

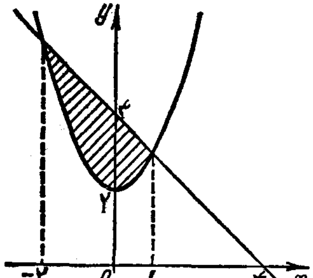
$$۱۵-z+\frac{۱}{۳}z+z=۲\left(۱۵-z+\frac{۱}{۳}z\right)$$

وازآن‌جا: $z=۹$.

پاسخ : گروه سوم ، هر ماه ۹ کیلومتر از راه راآماده می‌کند.

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادلهٔ مفروض،شامل xهایی است که با شرط $x>۰$ سازگار باشند. دراین حوزه، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با معادلهٔ

$$۲\lg^۲x+۲(۱-\sqrt{۲})\lg x-۲\sqrt{۲}=۰$$



شکل ۱۰۶

که هم‌ارز با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیراست:

$\lg x = -1$ و $\lg x = \sqrt{2}$ که جواب معادلهٔ اول $x_1 = 10^{\sqrt{2}}$ و جواب معادلهٔ دوم $x_2 = \frac{1}{10}$ است و هردوی آن‌ها، با شرط $x > 0$، سازگارند و، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ مفروض‌اند.

پاسخ: $x_1 = 10^{\sqrt{2}}$ ، $x_2 = \frac{1}{10}$.

۳. طول نقطه‌های برخورد سهمی $y = x^2 + 2$ و خط راست $y = 4 - x$ را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + 2 = 4 - x \implies x_1 = -2 , x_2 = 1$$

مساحت S، که باید آن را پیدا کنیم، زیرخط راست $y = 4 - x$ و روی سهمی $y = x^2 + 2$، در فاصلهٔ از ۲ــ تا ۱ قرار دارد (شکل ۱۰۶)؛ بنابراین

$$S = \int_{-2}^{1} [(4 - x) - (x^2 + 2)] dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

پاسخ: $\frac{9}{2}$ واحد مربع.

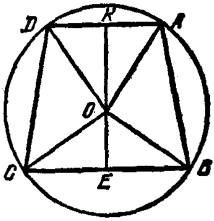
۴. ABCD را چهارضلعی مفروض می‌گیریم (شکل ۱۰۷). چون $\widehat{COD} = \widehat{BOA} = \frac{\pi}{2}$، بنابراین؛ کمان‌های AB و CD برابرند. ولی در این صورت داریم:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود: $\widehat{ADC} = \widehat{BAD}$، زیرا زاویه‌هایی محاطی و روبه‌روی به کمان‌های برابرند.

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $\widehat{BCD} = \widehat{CBA}$. چون مجموع کمان‌های BC، CD، DA و AB برابراست با 2π، پس

$\cdot \widehat{BCD}+\widehat{BAD}=\pi$



شکل ۱۰۷

وچون $\widehat{BAD}=\widehat{CDA}$، نتیجه می‌شود:

$$\widehat{BCD}+\widehat{CDA}=\pi$$

که به‌معنای موازی‌بودن خط‌های راست BC و AD است. به این ترتیب، چهارضلعی ABCD، یك‌ذوزنقه است. این ذوزنقه، ضمناً، متساوی‌الساقین‌است، زیرا زاویه‌های مجاور به‌قاعده‌با هم برابرند: $\widehat{BAD}=\widehat{ADC}\cdot$

KE را ارتفاعی ازذوزنقه می‌گیریم که ازنقطهٔ O، مرکزدایره، گذشته باشد. چون خط‌های راست BC و AD با هم موازی‌اند، طول پاره خط KE برابراست باطول عمودی که از هرنقطهٔ دلخواه خطراست AD، برخط راست BC رسم شود، یعنی $|KE|=۹$. چون $|AO|=|OD|=R$ (R شعاع دایره است)، پس‌مثلث AOD متساوی‌الساقین است. بنابراین،ارتفاع OK درآن، ضمناً میانهٔ آن، یعنی نقطهٔ K وسط پاره‌خط AD است. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شودکه نقطهٔ E وسط پاره‌خط BC است.

زاویهٔ OAK را α می گیریم، بنابراین $\widehat{AOK}=۹۰^\circ-\alpha$ و چون زاویهٔ AOB برابر ۹۰ درجه‌است، بنابراین، زاویهٔ BOE برابرαمی‌شود. از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BOE و AOK داریم:

$$|EO|=R\cos\alpha=|AK|=\frac{۱}{۲}|AD|,$$

$$|OK|=R\sin\alpha=|BE|=\frac{۱}{۲}|BC|$$

ازآن‌جا

$$۹=|EK|=|EO|+|OK|=\frac{۱}{۲}|AD|+\frac{۱}{۲}|BC|=\frac{۳}{۲}|BC|$$

یعنی $|BC|=۶$. ولی، در این صورت، از مثلث قائم‌الزاویهٔ BOE داریم:

$$R=|BO|=\sqrt{|BE|^۲+|OE|^۲}=\sqrt{۴۵}$$

سرانجام، S، مساحت مثلث AOB چنین می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}R^{۲}=\frac{۴۵}{۲}$$

۵. $(x_\circ , y_\circ)$ را زوج عددی می‌گیریم که با شرط مسأله سازگار باشد، یعنی، برای آن‌ها، برابری زیر برقرار شود:

$$\frac{۳+۲\cos(x_\circ-y_\circ)}{۲}=\sqrt{۳+۲x_\circ-x_\circ^{۲}}\cdot \cos^{۲}\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)+$$
$$+\frac{\sin^{۲}(x_\circ-y_\circ)}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos\alpha=۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱$ و $\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$، این برابری را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۳}{۲}+۲\cos^{۲}\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)-۱=\sqrt{۳+۲x_\circ-x_\circ^{۲}}\cdot \cos^{۲}\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)+$$
$$+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos^{۲}(x_\circ-y_\circ)$$

ویا به‌صورت

$$\cos^{۲}\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)\left[\sqrt{۴-(x_\circ-۱)^{۲}}-۲\right]=\frac{۱}{۲}\cos^{۲}(x_\circ-y_\circ) \quad (۲)$$

اگر $\cos\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)$ برابرصفرباشد، آن وقت $\cos(x_\circ-y_\circ)$ برابر -۱ می‌شودکه با (۲) متناقض است، یعنی

$$\cos\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)\neq ۰ \quad و \quad \left[\cos\left(\frac{x_\circ-y_\circ}{۲}\right)\right]^{۲}>۰$$

اگر $x_\circ\neq ۱$، آن‌وقت $۴-(x_\circ-۱)^{۲}<۴$ و $\sqrt{۴-(x_\circ-۱)^{۲}}-۲<۰$. ولی در این صورت، سمت‌چپ برابری (۲) مقداری منفی می‌شود، درحالی که سمت راست‌آن غیرمنفی است. بنابراین $x_\circ=۱$ واز (۲) نتیجه‌می‌شود: $\cos(x_\circ-y_\circ)=۰$، یعنی

$$y_\circ-۱=n\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow y_\circ=n\pi+۱+\frac{\pi}{۲}(n\in Z)$$

و آزمایش نشان می‌دهد که عددهای $x=1$ و $y=n\pi+1+\frac{\pi}{2}$ (به‌ازای هرمقدار درست n)، درشرط مسأله، صدق می کند.

پاسخ: $x=1$، $y=n\pi+1+\frac{\pi}{2}$.

۶. حوزه مقدارهای قابل قبول نامعادله، از همهٔ xهایی تشکیل شده است که با شرط $4x-8\geqslant 0$ سازگارباشند، یعنی حوزهٔ تعریف نامعادله، عبارت‌است از بازهٔ $2\leqslant x<+\infty$. ایـن فاصلـه را به دو مجموعـهٔ $2\leqslant x<5$ و $5\leqslant x<+\infty$ تقسیم، و معادله را در هر یك از این دو مجموعه، به طور جداگانه، حل می کنیم.

a) فرض کنیم: $2\leqslant x<5$. دراین بازه، سمت‌چپ نامعادلهٔ مفروض غیرمنفی وسمت راست آن منفی است. یعنی همـهٔ xهای ایـن بازه، جواب نامعادله مفروض‌اند.

b) فـرض کنیم : $x\geqslant 5$. در این حالت ، دو طـرف نـامعادلـه غیرمنفی می‌شوند و نامعادلهٔ مفروض، در این بازه، بـا نامعادلهٔ زیر هم‌ارز می‌شود:

$$4x-8\geqslant(x-5)^2 \Rightarrow x^2-14x+33\leqslant 0$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اخیر، عبارت است ازبـازهٔ $3\leqslant x\leqslant 11$، از این جواب‌هـا، درمجموعهٔ $5\leqslant x<+\infty$، تنها بازهٔ $5\leqslant x\leqslant 11$ قرار دارد، که در واقع جواب نامعادلهٔ مفروض‌اند.

از اجتماع مجموعه‌های $2\leqslant x<5$ و $5\leqslant x<+\infty$ ، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، به‌دست می‌آید.

پاسخ: $2\leqslant x\leqslant 11$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. ۳ تن؛ ۲. $x_1=2$، $x_2=2^{\sqrt{3}}$؛

۳. $\frac{9}{4}$؛ ۴. $\frac{63\sqrt{3}}{4}$؛

۵. (x, y)، که درآن $x=2$ و $y=2k\pi-2\pm\frac{2\pi}{3}$ $(k\in Z)$؛

۶. $-1 \leqslant x \leqslant 7$.

گروه سوم. ۱. ۹ متر مربع؛ ۲. $x_1 = 9$، $x_2 = 3^{-\sqrt{5}}$؛ ۳. $13/5$؛
۴. $2\sqrt{3}$؛

۵. (x, y)، که در آن $x = 3$ و $y = k\pi + \frac{3}{2} \pm \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$؛

۶. $-\frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 3$.

گروه چهارم. ۱. ۴ تن؛ ۲. $x_1 = 25$، $x_2 = 5^{\sqrt{2}}$؛ ۳. ۹؛
۴. $80\sqrt{3}$؛

۵. (x, y)، که در آن $x = 1$ و $y = k\pi - 2 \pm \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$؛

۶. $1 \leqslant x \leqslant 17$.

§۷. دانشکدهٔ جغرافیا

۱۹۷۷

گروه اول

۱. راه‌حل اول. برای آزاد شدن از علامت قدرمطلق، محور عددی را به‌دوحوزه تقسیم می‌کنیم: $x+1 \geqslant 0$ و $x+1 < 0$، یعنی $x \geqslant -1$ و $x < -1$ ونامعادلهٔ مفروض را درهریك از این دوحوزه، به‌طورجدا گانه، حل‌می‌کنیم.
درحوزهٔ $x \geqslant -1$ داریم: $|x+1| = x+1$ و، بنابراین، نامعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$2(x+1) > x+4 \implies x > 2$$

که‌درحوزهٔ $x \geqslant -1$ قراردارد‌و، بنابراین، هر x ازبازهٔ $2 < x < +\infty$، جوابی از نامعادلهٔ مفروض است.
درحوزهٔ $x < -1$ داریم: $|x+1| = -(x+1)$ ونامعادلهٔ مفروض

به‌این صورت درمی‌آید:

$$-۲(x+۱)>x+۴ \implies x<-۲$$

که در حوزهٔ $x<-۱$ قرار دارد و، بنابراین، هر x از بازهٔ $-\infty<x<-۲$، جوابی از نامعادلهٔ مفروض است.

راه حل دوم. همهٔ xها از حوزهٔ $x<-۴$ درنامعادلهٔ مفروض صدق می‌کنند، زیرا، دراین حوزه، سمت چپ نامعادله غیرمنفی وسمت راست آن منفی است. درمجموعهٔ $x\geqslant -۴$، دوطرف نامعادله غیرمنفی است، یعنی در این حالت با نامعادلهٔ زیرهم‌ارز می‌شود:

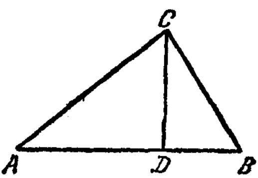
$$۴(x+۱)^۲>(x+۴)^۲ \implies x^۲>۴$$

که با توجه به‌شرط $x\geqslant -۴$، دو مجموعه برای جواب به‌دست می‌آید: $-۴\leqslant x<-۲$ و $۲<x<+\infty$.

پاسخ: $-\infty<x<-۲$، $۲<x<+\infty$.

۲. طول پاره‌خط AD را x می‌نامیم (شکل ۱۰۸)؛ دراین صورت، طول پاره‌خط DB برابر $۳-x$ می‌شود. از مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC داریم:

$$|BC|^۲=|BD|^۲+|DC|^۲$$



شکل ۱۰۸

و چون $|BC|=|AD|=x$، بنابراین

$$x^۲=(۳-x)^۲+۳$$

ازآن‌جا $x=۲$، یعنی $|AD|=۲$. ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ADC داریم:

$$|AC|^۲=|AD|^۲+|DC|^۲ \implies |AC|=\sqrt{۷}$$

۳. حوزهٔ تعریف تابع $y(x)=\dfrac{x}{\ln x}$، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای مثبت مخالف ۱؛ به‌زبان دیگر، حوزه تعریف، از دوبازه تشکیل شده است. $۰<x<۱$ و $۱<x<+\infty$. تابع، درهرنقطه از حوزهٔ تعریف خود، مشتق‌پذیراست. ابتدا رفتار تابع را دربازهٔ $۰<x<۱$ بررسی می‌کنیم. مشتق تابع $y(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، این مشتق، درهر نقطه ازبازهٔ $0<x<1$ منفی است و، بنابراین، تابع دراین بازه نزولی است. چون، در این بازه، مشتق برابر صفرنمی‌شود، بنابراین، دراین‌بازه، ماکزیمم یا می‌نیمم نداریم.

حالا، رفتار تابع‌را دربازهٔ $1<x<+\infty$ مورد بررسی قرارمی‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که مشتق

$$y'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

درنقطهٔ $x=e$ برابرصفر، دربازهٔ $1<x<e$ منفی‌ودربازهٔ $e<x<+\infty$ مثبت است. وچون تابع درنقطهٔ $x=e$ پیوسته است، بنابراین، دراین نقطه، دارای می‌نیمم است.

پاسخ: تابع دربازه‌های $0<x<1$ و $1<x<e$ نزولی، دربازهٔ $e<x<+\infty$ صعودی است؛ تابع درنقطه $x=e$ می‌نیمم دارد و دارای نقطهٔ ماکزیمم نیست.

۴. سرعت اتومبیل باری را x کیلومتر درساعت می گیریم؛ آن‌وقت، سرعت اتومبیل کورسی درمسیر AB برابر $2x$ کیلومتر درساعت ودرمسیر BC برابر $(2x+40)$ کیلومتردرساعت می‌شود. اتومبیل کورسی، فاصلهٔ از A تا C را در $\left(\frac{120}{2x}+\frac{1000}{2x+40}\right)$ ساعت‌و اتومبیل باری مسیرخود را در $\frac{360}{x}$ ساعت طی می کنند. چون اتومبیل باری $\frac{5}{4}$ ساعت کمتر از اتومبیل کورسی درحرکت بوده است، بنابراین

$$\frac{120}{2x}+\frac{1000}{2x+40}-\frac{360}{x}=\frac{5}{4}$$

اگراتومبیل کورسی، تمامی‌مسیراز A تا C رابا سرعت $(2x+40)$ کیلومتر درساعت می پیمود، برای این مسیر به $\frac{1120}{2x+40}$ ساعت وقت‌نیازداشت، که دراین‌صورت، طبق فرض مساله، یک‌ساعت بیشتر از زمان حرکت اتومبیل باری است. درنتیجه

$$\frac{1120}{2x+40}-\frac{360}{x}=1$$

به‌این ترتیب، برای پیدا کردن x، به‌دستگاهی شامل دو معادلهٔ یک‌مجهولی می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{120}{2x}+\dfrac{1000}{2x+40}-\dfrac{360}{x}=\dfrac{5}{4} \\[2ex] \dfrac{1120}{2x+40}-\dfrac{360}{x}=1 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه می‌توان مثلاً معادلهٔ اول را حل کرد و از بین جواب‌هایی که به دست می‌آید، آن را انتخاب کرد که در معادلهٔ دوم هم صدق می‌کند. معادلهٔ اول، با این معادله هم‌ارز است:

$$x^2-140x+4800=0$$

که دارای دو ریشه است: $x_1=80$ و $x_2=60$. اگر این دومقدار را در معادلهٔ دوم دستگاه قراردهیم، معلوم می‌شود که تنها x_2 در آن صدق می‌کند.

پاسخ: ۶۰ کیلومتر درساعت.

۵. اگردوطرف معادله را مجذور کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x \qquad (1)$$

هر ریشه‌ای ازمعادلهٔ مفروض، حتماً ریشه‌ای از معادلهٔ (۱) است، ولی معادلهٔ (۱) ممکن‌است ریشه‌هایی داشته باشد که‌درمعادلهٔمفروض‌صدق‌نکنند. بنابراین، بعد از حل معادلهٔ (۱)، باید ریشه‌هایی از آن را انتخاب کرد که در معادلهٔ مفروض صدق کنند. با استفاده از رابطه‌های معلوم

$$\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}(1+\sin 6x)$$

$$8\sin 2x\cos^2 2x=4\cos 2x(\sin 4x)=2(\sin 6x+\sin 2x)$$

معادلهٔ (۱) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$2+2\sin 6x=1+2\sin 6x+2\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

معادلهٔ اخیر، دو رشته جواب دارد:

$$x=n\pi+\frac{\pi}{12}\ ،\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(n،k\in Z)$$

چون معادلهٔ (۲) هم‌ارز معادلهٔ (۱) است، باید تحقیق کرد که آیا این‌ها، جواب‌های معادلهٔ مفروض هستند یا نه!

اگر این مقدارهای x را در سمت راست معادلهٔ مفروض قرار دهیم، عدد۲ به‌دست می‌آید. برای $x=n\pi+\frac{\pi}{۱۲}$ $(n\in z)$، سمت چپ معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$۲sin\left(۳x+\frac{\pi}{۴}\right)=۲sin\left(۳n\pi+\frac{\pi}{۲}\right)=۲cos n\pi$$

و تنها وقتی برابر ۲ می‌شود که n عددی زوج باشد. بنابراین، از رشتهٔ اول جواب‌ها، عددهای

$$x=۲m\pi+\frac{\pi}{۱۲}(m\in Z)$$

درمعادلهٔ مفروض صدق می‌کنند برای $x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}$ $(k\in Z)$ ، سمت چپ معادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$۲sin\left(۳x+\frac{\pi}{۴}\right)=۲sin\left(۳k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\right)=-۲cos k\pi$$

که به ازای مقدارهای فرد k، برابر۲ می‌شود. به‌این ترتیب، از رشتهٔ دوم جواب‌ها هم، عددهای زیردرمعادلهٔ مفروض صدق می‌کنند:

$$x=(۲l+۱)\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}(l\in Z)$$

پاسخ: $x=۲m\pi+\frac{\pi}{۱۲}$ ، $x=(۲l+۱)\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}$ $(m,l\in Z)$.

۶. معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$(۲^x)^۲-۲\times ۲^x-۳=۰$$

چون معادلهٔ درجه دوم $y^۲-۲y-۳=۰$ دو ریشه دارد: $y_۱=۳$ و $y_۲=-۱$، بنابراین، معادلهٔ مفروض ، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$۲^x=۳ \quad و \quad ۲^x=-۱$$

معادلهٔ دوم جواب ندارد و جواب معادلهٔ اول $x=log_۲ ۳$ است.

پاسخ $x=log_2 3$.

گروههای دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $0 \leqslant x \leqslant 3$؛ ۲. $\sqrt{3}$ متر؛ ۳. تابع در بازه‌های $-\infty < x < 1$ و $e^2 < x < +\infty$ صعودی و در بازهٔ $1 < x < e^2$ نزولی است و در نقطهٔ $x=e^2$ می‌نیمم دارد؛ ۴. ۱۰ کیلومتر در ساعت؛

۵. $x=8k\pi \pm \frac{4\pi}{3}$ $(k\in Z)$؛ ۶. $x=2$

گروه سوم. ۱. $-3 < x < 1$؛ ۲. $3\sqrt{3}$ متر؛ ۳. تابع در بازهٔ $\sqrt{e} < x < +\infty$ صعودی و در بازه‌های $0 < x < 1$ و $1 < x < \sqrt{e}$ نزولی است و در نقطهٔ $x=\sqrt{e}$ می‌نیمم دارد؛ ۴. ۵ قطعه؛

۵. $x=k\pi$ $(k\in Z)$؛ ۶. $x=log_3 4$.

گروه چهارم. ۱. $x \geqslant 1$، $x \leqslant -2$؛ ۲. ۶متر؛ ۳. تابع در بازهٔ $0 < x < \frac{1}{e}$ صعودی و در بازه‌های $\frac{1}{e} < x < 1$ و $1 < x < \infty$ نزولی است در $x=\frac{1}{e}$ ماکزیمم دارد؛ ۴. ۲۰ متر مکعب؛ ۵. $x=4k\pi+\pi$ $(k\in Z)$؛ ۶. $x=2$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. سرعت اختصاصی کشتی را x کیلومتر درساعت می‌گیریم. بنابراین، کشتی در رودخانه با سرعت ساعتی $(x+1)$ کیلومتر ودرسیلاب با سرعت ساعتی $(x-1)$ کیلومتر ، حرکت می‌کند. کشتی، در رودخانه $\frac{60}{x+1}$ ساعت و درسیلاب $\frac{20}{x-1}$ ساعت وقت صرف می‌کند، چون تمام مسیر را در ۷ساعت می‌پیماید، داریم:

$$\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱)، منجر به معادلهٔ $7x^2 - 80x + 33 = 0$ مـی‌شود کـه دو ریشه دارد: $x_1 = 11$، $x_2 = \frac{3}{7}$. ولی، سرعت کشتی نمی‌تواند از ۱ کیلومتر در ساعت کمتر باشد، زیرا کشتی می‌تواند درخلاف‌جهت جریان آب، که‌سرعتی برابر ۱ کیلومتر درساعت دارد، حرکت کند؛ به‌این‌ترتیب، سرعت اختصاصی کشتی، برابراست با ۱۱ کیلومتردرساعت.

۲. مشتق تابع مفروض را محاسبه می‌کنیم:

$$y'(x) = (\sin x)' - \frac{2}{3}(\sin 3x)' + \frac{1}{5}(\sin 5x)' =$$
$$= \cos x - 2\cos 3x + \cos 5x$$

برای حل مساله، باید همهٔ جواب‌های این معادله را پیدا کنیم:

$$\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0 \qquad (2)$$

که اگر از رابطهٔ مربوط به مجموع دوکسینوس استفاده‌کنیم، می‌شود:

$$2\cos 3x \cos 2x - 2\cos 3x = 0$$

که با مجموعهٔ دومعادله زیرهم‌ارزاست:

$$\cos 3x = 0 \text{ و } \cos 2x = 1$$

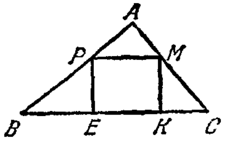
پاسخ: $x = \frac{1}{3}n\pi + \frac{\pi}{6}$ ، $x = k\pi$ $(n ، k \in Z)$.

۳. طول پاره‌خط KE را x می‌گیریم (شکل ۱۰۹). داریم:

$$S_{EKMP} = |KE|\cdot|MK| = \frac{5}{3} \Rightarrow |MK| = \frac{5}{3x}$$

ازتشابه مثلث‌های‌قائم‌الزاویهٔ MKC و BAC نتیجه می‌شود

$$\frac{|KC|}{|MK|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |KC| =$$
$$= \frac{|AC|\cdot|MK|}{|AB|} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3x} = \frac{5}{4x}$$



شکل ۱۰۹

ازتشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BEP و BAC، به‌دست می‌آید. (باتوجه به این‌که $|PE| = |MK|$)

$$\frac{|BE|}{|PE|} = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow |BE| = \frac{|AB|\cdot|PE|}{|AC|} = \frac{20}{9x}$$

چون $|BC|=۵$ و $|BC|=|BE|+|EK|+|KC|$، برای پیدا کردن x، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۲۰}{۹x}+x+\frac{۵}{۴x}=۵$$

که دارای دو ریشه است: $x_۱=\frac{۲۵}{۶}$ و $x_۲=\frac{۵}{۶}$، یعنی یا $|KE|=\frac{۲۵}{۶}$ و یا $|KE|=\frac{۵}{۶}$.

اگر $|KE|=\frac{۵}{۶}$ آن‌وقت $|MK|=۲$ و محیط مستطیل EKMP برابر $۵\frac{۲}{۳}$ می‌شود. اگر $|KE|=\frac{۲۵}{۶}$، آن‌وقت $|MK|=\frac{۲}{۵}$ و محیط مستطیل برابر $\frac{۱۳۷}{۱۵}$ می‌شود. چون، بنابرفرض مساله، محیط مستطیل باید از ۹ سانتیمتر کمتر باشد، بنابراین، ضلع‌های مستطیل به‌طول ۲ سانتیمتر و $\frac{۵}{۶}$ سانتیمتر هستند.

۴. چون $log_۳(۳x^۲-۴x+۲)=۲log_۹(۳x^۲-۴x+۲)$، اگر $log_۹(۳x^۲-۴x+۲)$ را y بگیریم، نامعادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت در می‌آید: $\sqrt{y}+۱>۲y$ و یا

$$\sqrt{y}>۲y-۱ \qquad (۳)$$

روشن است که جواب‌های منحنی، در این نامعادله صدق می‌کند. برای y از بازهٔ $۰\leqslant y<\frac{۱}{۲}$، بخش سمت راست نامعادلهٔ (۳)، منفی و بخش سمت راست آن غیرمنفی می‌شود؛ یعنی همهٔ این مقدارهای y، جواب نامعادله‌اند. وقتی داشته باشیم: $y\geqslant\frac{۱}{۲}$، دوطرف نامعادلهٔ (۳) غیرمنفی می‌شوند و با مجذور کردن آن، به‌این نامعادله می‌رسیم:

$$y>(۲y-۱)^۲ \qquad (۴)$$

که با نامعادلهٔ (۳)، درمجموعهٔ $y\geqslant\frac{۱}{۲}$، هم‌ارزاست. جواب‌های نامعادلهٔ درجه دوم (۴) عبارتند ازهمهٔ مقدارهای y، واقع دربازهٔ $\frac{۱}{۴}<y<۱$. و چون بنابرشرط $y\geqslant\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $\frac{۱}{۲}\leqslant y<۱$. اگرهمهٔ جواب‌های حاصل رادر

نظر بگیریم، معلوم می‌شود که جواب‌های نامعادلهٔ(۳)، عبارتند از همهٔ مقدارهای y واقع در فاصلهٔ $0 \leqslant y < 1$. به این ترتیب، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ دوطرفهٔ

$$0 \leqslant \log_9(3x^2-4x+2) < 1 \Rightarrow 1 \leqslant 3x^2-4x+2 < 9$$

و یا دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} 3x^2-4x+2 \geqslant 1 \\ 3x^2-4x+2 < 9 \end{cases}$$

هم‌ارز است، که درنتیجهٔ با نامعادلهٔ مفروض نیز، هم‌ارز می‌شود. نامعادلهٔ اول دستگاه، منجر به دو بازهٔ $-\infty < x \leqslant \frac{1}{3}$ و $1 \leqslant x < +\infty$ ، و نامعادلهٔ دوم دستگاه، منجر به بازهٔ $-1 < x < \frac{7}{3}$ می‌شود. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه، و درنتیجه، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$-1 < x \leqslant \frac{1}{3} \text{ و } 1 \leqslant x < \frac{7}{3}$$

۵. معادلهٔ اول دستگاه را حل می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا آن را از علامت قدرمطلق، آزاد می‌کنیم. چون x^2-5x+4، به‌ازای $x=1$ و $x=4$ برابر صفر می‌شود، محور عددی را به‌چهار بخش $x \leqslant 0$، $0 < x \leqslant 1$، $1 < x \leqslant 4$ و $x > 4$ تقسیم وجواب‌های معادلهٔ اول دستگاه را، در هر یك ازاین بخش‌ها، به‌طورجداگانه، محاسبه می‌کنیم

۱) $x \leqslant 0$. دراین‌حالت $|x^2-5x+4| = x^2-5x+4$ و $|x| = -x$، ومعادلهٔ اول دستگاه، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$-18x^2-10x+8=0$$

این معادله، دارای دو ریشهٔ $x_1=-1$ و $x_2=\frac{4}{9}$ است، که با توجه به شرط این‌حالت، تنها $x_1=-1$ قابل قبول است.

۲) $0 < x \leqslant 1$. دراین‌حالت $|x^2-5x+4| = x^2-5x+4$ و $|x| = x$ ومعادلهٔ اول دستگاه به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$2x^2-10x+8=0$$

که دارای دو ریشهٔ $x_3=1$ و $x_4=4$ است وازآن‌ها، تنها $x_3=1$ با

شرط این حالت، سازگار است.

۳) $۱<x\leqslant ۴$. $|x^۲-۵x+۴|=-(x^۲-۵x+۴)$ و $|x|=x$ ومعادلهٔ اول دستگاه، به‌اتحاد $۰=۰$ تبدیل می‌شود؛ یعنی هرمقدار x ازبازهٔ $۱<x\leqslant ۴$ درمعادلهٔ اول دستگاه صدق می کند.

۴) $۴<x<+\infty$. دراین‌حالت $|x^۲-۵x+۴|=x^۲-۵x+۴$ و $|x|=x$ ومعادلهٔ اول دستگاه چنین می‌شود:

$$۲x^۲-۱۰x+۸=۰$$

این معادله، دارای دوریشهٔ $x_۵=۱$ و $x_۶=۴$ است که هیچ کدام‌ازآن‌ها، باشرط مساله سازگارنیست. اگرهمهٔ جواب‌های حاصل را به‌حساب‌آوریم، معلوم می‌شودکه جواب‌های معادلهٔ اول دستگاه عبارتند از $x=-۱$ وهمهٔ مقدارهای x از بازهٔ $۱\leqslant x\leqslant ۴$.

معادلهٔ دوم دستگاه دو، جواب دارد: $x_۷=a$ و $x_۸=a-۲$.

جواب‌های معادلهٔ اول دستگاه را روی محور عددی علامت گذاری می کنیم (شکل ۱۱۰). روشن است که

شکل ۱۱۰

به‌ازای هرمقداردلخواه a، جواب‌های معادلهٔ دوم، با رابطهٔ $x_۸=x_۷-۲$ به‌هم مربوط‌اند. اکنون ببینیم، به‌ازای‌چه‌مقدارهایی از a، دومعادلهٔ دستگاه، متوافق‌اند. برای این منظور، مقدارهای مختلف aرا، روی محورعددی، در نظرمی گیریم.

برای $a<-۱$، هردو ریشهٔ معادلهٔ دوم، درسمت چپ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ اول قرارمی گیرند و، بنابراین، دستگاه نامتوافق است. درحالت $a=-۱$، چون $x_۸$ درسمت‌چپ نقطهٔ $x=-۱$ واقع است، دستگاه‌دارای جواب منحصربه‌فرد $x_۷=-۱$ خواهدبود. درحالت $-۱<a<۱$، ریشهٔ $x_۷$ درفاصلهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ اول و $x_۸$ درسمت چپ همهٔ ریشه‌های معادلهٔ اول قرارمی گیرد، یعنی‌دستگاه متوافق نیست. درحالت $a=۱$، روشن است که دستگاه دوجواب دارد: $x_۷=۱$ و $x_۸=-۱$. برای هرمقدار a از بازهٔ $۱<a<۳$، دستگاه متوافق وجواب‌آن، تنها $x_۷=a$ است، زیرا $x_۸$ بین عددهای -۱ و ۱ واقع می‌شود. درحالت $۳\leqslant a\leqslant ۴$، دستگاه دو جواب دارد: $x_۷=a$ و $x_۸=a-۲$، زیرا هر دوی این عددها، دربازهٔ $[۱،۴]$ قراردارند. درحالت $۴<a\leqslant ۶$، دستگاه متوافق و دارای جواب

منحصر به‌فرد $x_8=a-2$ است، زیرا x_7 درسمت راست بازهٔ $[1, 4]$ قرار می گیرد. درحالت $a>6$، دستگاه‌متوافق‌نیست: زیراخواهیم داشت $x_7>6$ و $x_8>4$. ازآن‌جا که ما، تنها به مقدارهایی از a توجه داریم که، به‌ازای هریك ازآن‌ها، دستگاه جوابی منحصر به‌فرد داشته باشد، ازآن چه گفتیم، روشن است که شرط مساله، با مقدارهای $a=-1$، $1<a<3$ و $4<a\leqslant 6$ سازگاراست.

پاسخ: $a=-1$ ، $1<a<3$ ، $4<a\leqslant 6$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. ۹ کیلومتر درساعت، ۷ کیلومتر درساعت؛

۲. $x=\frac{1}{2}k\pi$، $x=n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}$ $(k , n\in Z)$؛ ۳. $3\sqrt{13}$ سانتیمتر؛

۴. $-1\leqslant x<3$؛ ۵. $a=1$، $a=2$، $5\leqslant a\leqslant 6$

گروه سوم. ۱. ۱۴ کیلومتردرساعت؛ ۲. $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$ ، $x=n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}$ $(k , n\in Z)$؛ ۳. ۴ سانتیمتر، $\frac{10}{3}$ سانتیمتر؛

۴. $-1<x\leqslant\frac{1}{2}$ ، $1\leqslant x<\frac{5}{2}$؛ ۵. $a=1$، $-3<a<-1$، $-6\leqslant a<-4$.

گروه چهارم. ۱. ۸ کیلومتر درساعت؛ ۲. $x=\frac{2}{3}k\pi$، $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(k , n\in Z)$؛ ۳. ۳ سانتیمتر، ۸ سانتیمتر؛ ۴. $1\leqslant x<2$؛

۵. $a=-1$ ، $a=-2$ ، $-6\leqslant a\leqslant -5$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. برای این‌که حداکثر وحداقل مقدارممکن تابع را دربازهٔ $[-5 , 5]$ پیدا کنیم، کافی است‌مقدارتابع را در دو انتهای این‌بازه‌و، همچنین، درنقطه‌های بحرانی واقع دربازهٔ $(-5 , 5)$ به‌دست آوریم، وآن‌وقت، از بین آن‌ها،

بزرگترین وکوچکترین مقدار را انتخاب کنیم. نقطه‌های بحرانی را با حل معادلهٔ $y'(x)=۰$ یا $۳x^۲+۶x-۷۲=۰$ پیدا می‌کنیم. ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔدوم عبارتنداز: $x_۱=۴$ و $x_۲=-۶$، که ازآن‌ها، تنها ریشهٔ اول دربازهٔ $(-۵ ، ۵)$ قراردارد. داریم:

$$y(-۵)=۴۰۰ ، y(۵)=-۷۰ ، y(۴)=-۸۶$$

بنابراین دربازهٔ $[-۵ ، ۵]$ بیشترین مقدارتابع برابر ۴۰۰ وکمترین مقدار آن برابر -۸۶ است.

۲. اگردرسمت چپ، از رابطهٔ تفاضل دوسینوس استفاده‌کنیم، به ایــن معادله می‌رسیم:

$$۲\sin\left(-\frac{۵\pi}{۱۲}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$$

ویا

$$\left(۱+۲\sin\frac{۵\pi}{۱۲}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=۰$$

چون $\sin\frac{۵\pi}{۱۲}>۰$ ، بنابرایـن $۱+۲\sin\frac{۵\pi}{۱۲}\neq۰$ ومعادلهٔ مفروض، منجربـه معادلهٔ $\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=۰$ می‌شود.

پاسخ: $y=n\pi+\frac{\pi}{۴}$ $(n\in Z)$.

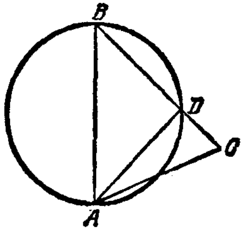
۳. ازشــرط مسالــه نتیجــه مــی‌شــود:

$|BC|=۶$ و $|CD|=۶-|BD|$

(شکل۱۱۱). بنابراین،به‌دست‌می‌آید:

$$\frac{|BD|}{۶-|BD|}=۲\Rightarrow|BD|=۴$$

و $|CD|=۲$



شکل ۱۱۱

روشن است که $AD\perp BC$ ازقضیهٔ فیثاغـورث درمثلث‌هــای قائم‌الزاویــهٔ ABD و ADC استفاده می‌کنیم:

$$|AC|^۲-|CD|^۲=|AD|^۲ \quad \text{و} \quad |AB|^۲-|BD|^۲=|AD|^۲$$

وازآن‌جا

$$|AB|^۲-|BD|^۲=|AC|^۲-|CD|^۲$$

ویا $۳۶-۱۶=|AC|^۲-۴ \Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$

۴. تعداد کل دانش‌آموزان کلاس را n و تعداد دانش‌آموزانی را که نمرهٔ عالی گرفته‌اند m می‌گیریم. دراین صورت، درصد دانش‌آموزان با نمرهٔ عالی، برابر $\frac{m}{n}\times ۱۰۰$ می‌شود؛ وبنابر فرض مساله باید داشته باشیم:

$$۲/۹ \leqslant \frac{m}{n}\times ۱۰۰ \leqslant ۳/۱ \qquad (۱)$$

ازاین نامعادله نتیجه می‌شود که $m\neq ۰$ ($m\geqslant ۱$) و $n\geqslant \frac{۱۰۰۰}{۳۱}m$، روشن است که

$$\frac{۱۰۰۰}{۳۱}m \geqslant \frac{۱۰۰۰}{۳۱} > ۳۲$$

بنابراین $n \geqslant ۳۳$. به‌این‌ترتیب، حداقل تعداد دانش‌آموزان این کلاس، ۳۳ نفراست. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که با فرض $n=۳۳$ و $m=۱$، یعنی وقتی‌که تعداد دانش‌آموزان ۳۳ نفرباشد ومشخصاً یك نفرنمرهٔ عالی گرفته باشد، شرط مساله برقراراست، زیرا داریم: $۳/۱ > \frac{۱۰۰}{۳۳} > ۲/۹$.

پاسخ: ۳۳ نفر.

۵. ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲-۴x-\cos\frac{۳}{۲}$ عبارتنداز:

$$x_۱=-۲+\sqrt{۴+\cos\frac{۳}{۲}} \quad و \quad x_۲=-۲-\sqrt{۴+\cos\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، بـه‌صورت زیـردرمی‌آیند: $x_۲\leqslant x\leqslant x_۱$. ازاین مجموعه، باید آن‌هایی را انتخاب کرد که به مجموعهٔ $-\frac{۲۱}{۵}<x<۰$ متعلق باشند. چون $۰<\frac{۳}{۲}<\frac{\pi}{۲}$، پس $\cos\frac{۳}{۲}>۰$ و در نتیجه: $x_۱>۰$. ثابت می‌کنیم، نقطهٔ $x_۲$ به فاصلهٔ $-\frac{۲۱}{۵}<x<۰$ تعلـق دارد. منفی بودن $x_۲$ روشن است. چون داریم: $\frac{\pi}{۳}<\frac{۳}{۲}<\frac{\pi}{۲}$، بنـابـرایـن

$\cos\frac{۳}{۲}<\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ ودرنتیجه

$$x_2 = -2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}} > -2 - \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

حالا دیگر کافی است درستی نابرابری $-\frac{21}{5} < -2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ یا $\sqrt{2} < \frac{22}{15}$ را تحقیق کنیم. ولی نابرابری اخیر درست است، زیرا $2 < \frac{484}{225} = \left(\frac{22}{15}\right)^2$.

به این ترتیب داریم: $-\frac{21}{5} < x_2 < 0$ وجواب‌های مورد نظر نامعادله، به‌صورت $x_2 \leqslant x < 0$ درمی‌آید.

پاسخ: $-2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}} \leqslant x < 0$.

۶. چون $\log_3 27 = 3$، پس معادلهٔ مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(2^{\log_9 x}\right)^2 - 6 \times 2^{\log_9 x} + 8 = 0$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $y^2 - 6y + 8 = 0$ دو ریشه دارد: $y_1 = 2$ و $y_2 = 4$.

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادله زیر هم‌ارز است:

$$2^{\log_9 x} = 2 \quad \text{و} \quad 2^{\log_9 x} = 4$$

معادلهٔ اول، با معادلهٔ $\log_9 x = 1$ هم‌ارز است که به جواب $x = 9$ می‌رسد.
معالهٔ دوم با معادلهٔ $\log_9 x = 2$ هم‌ارز است که‌دارای جواب $x = 81$ است.

پاسخ: $x_1 = 9$ ، $x_2 = 81$.

گروههای دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $y_{Max} = 350$ ، $y_{Min} = -497$؛

۲. $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$؛ ۳. $|BC| = 6$؛ ۴. ۱۴؛

۵. $-\frac{1}{3} \leqslant x < 1 - \sqrt{1 - \cos 5}$؛ ۶. $x_1 = 1$ ، $x_2 = 9$.

گروه سوم. ۱. $y_{Max} = 500$ ، $y_{Min} = -204$،

۲. $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ $(n \in Z)$، ۳. $|AC| = \frac{2}{3}$، ۴. $\frac{1}{4} \leqslant x < 3+\sqrt{9+tg\frac{5}{2}}$ ؛ ۵. 32 ؛

۶. $x_1 = 4$ ، $x_2 = \frac{1}{4}$.

گروه چهارم. ۱. $y_{Max} = 50$ ، $y_{Min} = -62$ ؛

۲. $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}\ (k \in Z)$ ؛ ۳. $h = 2\sqrt{5}$ ؛

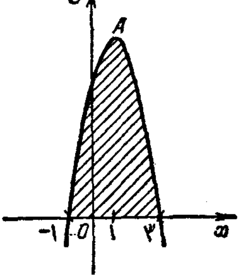
۴. 44 ؛ ۵. $1-\sqrt{1-sin\frac{7}{2}} \leqslant x < 2$ ؛

۶. $x_1 = 2$ ، $x_2 = 1$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. نمودارتابع $y = -2(x-1)^2+8$، یك سهمی است که شاخه‌های آن به‌طرف پایین امتداد دارد و راس آن درنقطهٔ $A(1 ، 8)$ است (شکل ۱۱۲).



شکل ۱۱۲

باحل معادلهٔ $-2(x-1)^2+8=0$ طول‌های $x_1 = -1$ و $x_2 = 3$، نقطه‌های برخورد سهمی با محورطول به دست می‌آید. شکلی که مساحت آن را لازم داریم، زیرسهمی وبالای محور Ox درفاصلهٔ از ۱ — تا ۳ قرار دارد.

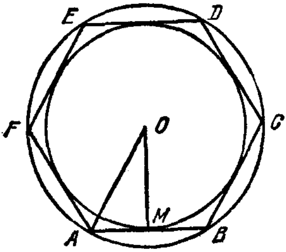
بنابراین

$$S = \int_{-1}^{3}[-2(x-1)^2+8]dx = \left[\frac{-2(x-1)^3}{3}+8x\right]\Bigg|_{-1}^{3} =$$
$$= 21\frac{1}{3}$$

۲. حوزهٔ تعریف معادله، با شرطهای $x-1>0$ و $x-1 \neq 1$ به‌دست می‌آید، یعنی، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x ازدوبازه تشکیل شده است:

$1<x<1$ و $1<x<+\infty$. درایـن حوزه، معادلهٔ مفروض، با معادلهٔ $x-1=\sqrt{3}$ هم‌ارز است که تنها یك جواب دارد: $x=1+\sqrt{3}$.

۳. راس‌های شش ضلعی قاعدهٔ هرم را، A، B، C، D، Eو F می‌نامیم. چون، هرم‌مفروض منتظم‌است، بنابراین، شش ضلعی ABCDEF منتظم ومرکزهای دو دایرهٔ محاطی ومحیطی آن، بـرهم منطبق می‌شوند. مرکزاین‌دایره‌ها راO ونقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی را با ضلع AB از این شش ضلعی، M می‌نامیم (شکـل ۱۱۳). روشــن اســت کـه $OM \perp AB$، بنابراین، مثلث AMO قائم‌الزاویه وضمناً، $\widehat{OAM}=\frac{\pi}{3}$ و بنابرفرض $|AO|=R$ است. در این صورت داریم:



شکل ۱۱۳

$$|OM|=R\cdot\sin\frac{\pi}{3}=R.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حجم V_1 مخروط محاطی، از رابطـهٔ $V_1=\frac{1}{3}\cdot H\cdot S_1$ به‌دست مـی‌آید، که درآن، S_1 عبارت‌است‌از مساحت دایرهٔ به‌شعاع $|OM|$، یعنی

$$V_1=\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}H=\frac{\pi R^2}{4}H$$

حجم V_2 دایرهٔ محیطی، از رابطهٔ $V_2=\frac{1}{3}\cdot H\cdot S_2$ به‌دست می‌آید، که در آن، S_2 عبارت است ازمساحت دایرهٔ به شعاع برابرR، یعنی

$$V_2=\pi R^2\cdot\frac{1}{3}H$$

وبه‌سادگی، اختلاف دوحجم محاسبه می‌شود:

$$V_2-V_1=\frac{1}{12}\pi HR^2$$

۴. عبارت $\sin^6x+\cos^6x$ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)=$

$$=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

وبنابراین، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز با معادلهٔ زیر است:

$$1-3\sin^2 x\cos^2 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2} \qquad (1)$$

با استفاده از رابطه‌های $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ و $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، معادلهٔ (۱) به این‌صورت درمی‌آید:

$$\cos^4 x-\frac{9}{4}\cos^2 x+\frac{9}{8}=0 \qquad (2)$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $y^2-\frac{9}{4}y+\frac{9}{8}=0$، دو ریشه دارد: $y_1=\frac{3}{4}$ و $y_2=\frac{3}{2}$؛

بنابراین، معادلهٔ (۲) با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر، هم‌ارزاست.

$$\cos^2 x=\frac{3}{4} \text{ و } \cos^2 x=\frac{3}{2}$$

معادلهٔ دوم‌جواب ندارد و معادلهٔ اول را می‌توان، به سادگی، به صورت

$\cos 2x=\frac{1}{2}$ نوشت وازآن‌جا

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\ (k\in Z)$$

۵. اگر (x_0, y_0) باشرط‌های مساله سازگارباشد،باید داشته باشیم:

$$\left|y_0+\frac{1}{x_0}\right|+\left|\frac{13}{6}+x_0-y_0\right|=\frac{13}{6}+x_0+\frac{1}{x_0},$$

$$x_0^2+y_0^2=\frac{97}{36},\ x_0<0,\ y_0>0$$

رض می‌کنیم: $a=y_0+\frac{1}{x_0}$ و $b=\frac{13}{6}+x_0-y_0$، دراین صورت، نخستین برابری، چنین می‌شود:

$$|a|+|b|=a+b$$

که با توجه به‌مقدارهای قدرمطلق نتیجه می‌شود که این برابری، وقتی وتنها وقتی برقراراست که داشته باشیم: $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$، یعنی در واقع

$$y_0+\frac{1}{x_0}\geqslant 0 \quad \text{و} \quad \frac{13}{6}+x_0-y_0\geqslant 0$$

این نابرابری‌ها را به‌صورت $y_0\geqslant -\frac{1}{x_0}$ و $y_0\leqslant\frac{13}{6}+x_0$ می‌نویسیم، که‌از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{x_0}\leqslant\frac{13}{6}+x_0$$

وچون $x_0<0$، نابرابری اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$x_0^2+\frac{13}{6}x_0+1\leqslant 0 \qquad (3)$$

سپس، چون $0<y_0\leqslant\frac{13}{6}+x_0$، پس $y_0^2\leqslant\left(\frac{13}{6}+x_0\right)^2$ وبنابراین

$$x_0^2+y_0^2\leqslant x_0^2+\left(\frac{13}{6}+x_0\right)^2$$

وچون، طبق فرض، $x_0^2+y_0^2=\frac{97}{36}$، خواهیم داشت:

$$\frac{97}{36}\leqslant x_0^2+\left(\frac{13}{6}+x_0\right)^2$$

ویا

$$x_0^2+\frac{13}{6}x_0+1\geqslant 0 \qquad (4)$$

ازمقایسهٔ (۳) و (۴)، نتیجه می‌شود: $x_0^2+\frac{13}{6}x_0+1=0$، یعنی x_0 برابر است با یکی ازدوعدد $x_0=-\frac{3}{2}$ و $x_0''=-\frac{2}{3}$، ولی دراین صورت، با توجه‌به‌شرط‌های $x_0^2+y_0^2=\frac{97}{36}$ و $y_0>0$ به‌دست مـی‌آید: $y_0'=\frac{2}{3}$ و $y_0''=\frac{3}{2}$. وآزمایش نشان می‌دهد که جواب‌های حاصل، با شرط‌های مساله سازگارند.

پاسخ: $\left(\frac{۲}{۳} ، -\frac{۳}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۳}{۲} ، -\frac{۲}{۳}\right)$.

۶. معادلهٔ درجه دوم مفروض، وقتی دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد که مبیّن آن مثبت باشد:

$$\Delta = ۴k^۲ - ۴(k^۲ + ۲k - ۱) > ۰ \Rightarrow k < \frac{۱}{۲}$$

پاسخ: $k < \frac{۱}{۲}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $\frac{۲}{۳}$؛ ۲. $\sqrt{۲} - ۱$؛

۳. $\frac{۱}{۴}\pi HR^۲$؛ ۴. $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ ، $x = (۲m+۱)\frac{\pi}{۲}$ $(k، m \in Z)$؛

۵. $\left(-۳ ، \frac{۱}{۳}\right)$ و $\left(-\frac{۱}{۳} ، ۳\right)$؛ ۶. $k > -\frac{۱}{۳}$.

گروه سوم. ۱. ۴؛ ۲. $۲ + \sqrt{۲}$؛

۳. $\frac{۱}{۶}\pi R^۲H$؛ ۴. $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ ، $x = m\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ $(k ، m \in Z)$؛

۵. $\left(-\frac{۱}{۲} ، -۶\right)$ و $\left(-۶ ، -\frac{۱}{۲}\right)$؛ ۶. $k < ۲$.

گروه چهارم. ۱. ۴؛ ۲. $\sqrt{۳} - ۲$؛

۳. $\frac{HR^۲}{۴}\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}\right)$؛ ۴. $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۴}$ $(k \in Z)$؛

۵. $\left(\frac{۱}{۲} ، ۲\right)$ و $\left(۲ ، \frac{۱}{۲}\right)$؛ ۶. $k > -۳$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x، باشرطهای $۲x + ۱ > ۰$ و $۲x + ۱ \neq ۱$

به دست می‌آید، یعنی حوزهٔ تعریف معادله ازدوبازه تشکیل شده است: $-\frac{1}{2}<x<0$ و $x>0$. چون، دراین حوزه داریم:

$$log_3(2x+1)\neq 0 \text{ ، } log_{2x+1}3=\frac{1}{log_3(2x+1)}$$

بنا براین معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارزاست با معادلهٔ

$$log_3^2(2x+1)-log_3(2x+1)-2=0$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $y^2-y-2=0$، دو ریشه‌دارد: $y_1=-1$ و $y_2=2$؛ بنا براین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم ارزاست:

$$log_3(2x+1)=-1 \text{ و } log_3(2x+1)=2$$

که حل آن‌ها مشکل نیست.

پاسخ: $x_1=-\frac{1}{3}$ ، $x_2=4$.

۲. برای این‌که حداکثر تابع $y(x)=\frac{x}{2}+sin^2x$ رادربازهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ پیداکنیم، کافی است مقدارتابع را درنقطه‌های بحرانی متعلق به بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ و، همچنین، در دوانتهای این بازه پیدا کنیم؛ وازمیان آن‌ها، بزرگترین مقدار را در نظر بگیریم. نقطه‌های بحرانی تابع با حل معادلهٔ $y'(x)=0$ یا $\frac{1}{2}+2sin x cos x=0$ به‌دست‌می‌آید. این‌معادله به‌صورت $sin 2x=-\frac{1}{2}$ درمی‌آید، که جواب‌های آن چنین است:

$$x=\frac{1}{2}n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}\ (n\in Z)$$

که ازآن‌ها، جواب‌های $x_1=-\frac{\pi}{12}$ و $x_2=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}$ دربازهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ قراردارند. سپس داریم:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\pi}{4} \text{ ، } y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{4};$$

$$y\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{24}+\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=$$

$$=-\frac{\pi}{24}+\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}+\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=-\frac{5\pi}{24}+\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{5\pi}{24}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

که بزرگترین آن‌ها، همان $1+\frac{\pi}{4}$ است.

پاسخ: $1+\frac{\pi}{4}$.

۳۰. مقدار محلول ۴۰٪ را x کیلو گرم ومقدار محلول ۶۰٪ را y کیلو گرم می گیریم، اگر x کیلو گرم ازمحلول چهل درصدو y کیلو گرم ازمحلول شصت درصدرا با ۵ کیلو گرم آب خالص بیامیزیم، $(x+y+5)$ کیلو گرم محلول به دست می آید، که بنا برفرض مساله، محلولی ۲۰٪ است. ازطرف دیگر در x کیلو گرم محلول اول $0/4x$ کیلو گرم اسید خالص و در y کیلو گرم محلول دوم $0/6y$ کیلو گرم اسید خالص وجود دارد، بنابراین، در $(x+y+5)$ کیلو گرم محلول جدید، به‌اندازهٔ $(0/4x+0/6y)$ کیلو گرم اسید خالص پیدا می‌شود؛ و به این معادله می‌رسیم:

$$0/4x+0/6y=0/2(x+y+5)$$

اگر به‌جای ۵ کیلو گرم آب، ۵ کیلو گرم اسید ۸۰٪ اضافه کنیم، محلولی به وزن $(x+y+5)$ کیلو گرم به‌دست می آید، که به‌اندازهٔ $(0/4x+0/6y+0/8\times 5)$ کیلو گرم اسید خالص دارد، که باید با ۷۰٪ از $(x+y+5)$ کیلو گرم برابر باشد، یعنی

$$0/4x+0/6y+4=0/7(x+y+5)$$

دومعادلهٔ دومجهولی حاصل را، بعداز تبدیل‌های ساده، می‌توان به‌صورت دستگاه زیر نوشت:

$$\begin{cases}x+2y=5\\3x+y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$$

پاسخ: یك کیلو گرم ازمحلول ۴۰٪ و دو کیلو گرم ازمحلول ۶۰٪.

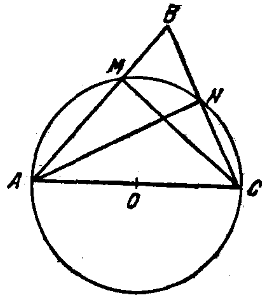
۴. ABC را مثلث مفروض می گیریم. ازشرط‌های $\frac{۲}{۳}=\frac{|AM|}{|MB|}$ و $|AB|=۳$ به‌دست می آید:

$$\frac{|AM|}{۳-|AM|}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow |AM|=\frac{۶}{۵}$$

بنابراین

$$|MB|=|AB|-|AM|=\frac{۹}{۵}$$

چون AC قطر دایره است، مثلث‌های AMC و ANC، و در نتیجه، مثلث BMC و ANB قائم‌الزاویه‌اند. از مثلث قائم‌الزاویهٔ AMC داریم:



شکل ۱۱۴

$$|CM|=\sqrt{|AC|^۲-|AM|^۲}=\sqrt{۴-\frac{۳۶}{۲۵}}=\frac{۸}{۵}$$

وازمثلث قائم‌الزاویهٔ MBC:

$$|BC|=\sqrt{|MC|^۲+|MB|^۲}=\sqrt{\frac{۶۴}{۲۵}+\frac{۸۱}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۱۴۵}}{۵}$$

ازتشابه‌دومثلث قائم‌الزاویهٔ ANB وBMC، که زاویهٔ‌حادهٔ مشترکی‌دارند، به دست می‌آید:

$$|AN|:|CM|=|AB|:|BC|$$

واز آن‌جا

$$|AN|=\frac{|AB|\cdot|CM|}{|BC|}=\frac{۳\times\frac{۸}{۵}}{\sqrt{۱۴۵}:۵}=\frac{۲۴}{\sqrt{۱۴۵}}$$

۵. اگر $(x_\circ , y_\circ)$ را جوابی از دستگاه بگیریم، باید برابری‌های عدد زیر برقرارباشد:

$$\begin{cases}x_\circ^۲y_\circ^۲-۳x_\circ+y_\circ^۲=\circ\\ ۲x_\circ^۲-۴x_\circ+۲+y_\circ^۳=\circ\end{cases} \qquad (۱)$$

برابری اول را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$y_\circ^۲=\frac{۲x_\circ}{۱+x_\circ^۲} \qquad (۲)$$

از نابرابری روشن $(۱-x_\circ)^۲\geqslant ۰$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲x_\circ}{۱+x_\circ^۲}\leqslant ۱$$

با توجه به‌این نابرابری، از برابری (۲) نتیجه‌می‌شود: $y_\circ^۲\leqslant ۱$، یعنی $|y_\circ|\leqslant ۱$.
برابری دوم دستگاه (۱)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۲(x_\circ-۱)^۲+۱+y_\circ^۳=۰ \qquad (۳)$$

چون $|y_\circ|\leqslant ۱$، پس $۱+y_\circ^۳\geqslant ۱-|y_\circ|^۳\geqslant ۰$. بنابراین، برابری (۳) تنها وقتی برقراراست که، به‌طورهم‌زمان، داشته باشیم:

$$(x_\circ-۱)^۲=۰ \text{ و } ۱+y_\circ^۳=۰$$

که ازآن‌جا، به‌دست می‌آید: $x_\circ=۱$، $y_\circ=-۱$.

به این ترتیب، ثابت شد که تنها جفت عددهای $(۱ ، -۱)$ می‌تواند جواب دستگاه مفروض‌باشد. به سادگی هم می‌توان تحقیق کرد که $x=۱$ و $y=-۱$ درمعادله‌های دستگاه مفروض، صدق می‌کنند.

پاسخ: $(۱، -۱)$.

۶. با استفاده ازرابطهٔ $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱$ ، معادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$۳\cos^۲x+\cos x-۳=۰$$

با حل این معادلهٔ درجهٔ دوم ، نسبت به‌مجهول $\cos x$ ، معادلهٔ مفروض ، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر هم‌ارز می‌شود:

$$\cos x=\frac{-۱+\sqrt{۳۷}}{۶} \text{ و } \cos x=\frac{-۱-\sqrt{۳۷}}{۶}$$

معادلهٔ دوم جواب ندارد و جواب معادلهٔ اول چنین است:

$$x=۲k\pi\pm\arccos\left(\frac{-۱+\sqrt{۳۷}}{۶}\right)\ (k\in Z)$$

گروه دوم. ۱. $x_1=6$ ، $x_2=\frac{4}{3}$ ؛ ۲. $-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ؛

۳. در اولی ۴۰٪ روی و در دومی ۶۰٪ ؛ ۴. $\sqrt{\frac{20-4\sqrt{6}}{3}}$ ؛

۵. $(-2, 1)$ ؛

۶. $x=n\pi+(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{17}}{4}\ (k, n\in Z)$

گروه سوم. ۱. $x_1=\frac{1}{6}$ ، $x_2=\frac{1}{8}$ ؛ ۲. π ؛

۳. در اولی ۲۴٪ و در دومی ۶۰٪ ؛

۴. $\arccos(0/52-0/4\sqrt{0/76})$ ؛ ۵. $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ ؛

۶. $x=4k\pi\pm 2\arccos\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\ (k\in Z)$.

گروه چهارم. ۱. $x_1=511$ ، $x_2=-\frac{1}{2}$ ؛ ۲. $1-\pi$ ؛

۳. ۵۰٪ ، ۲۵ کیلوگرم ؛ ۴. $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ؛ ۵. $(3, 2)$ ؛

۶. $x=2n\pi+(-1)^n 2\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

§ ۸. دانشکدهٔ زمین‌شناسی
(بخش ژئوفیزیک)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. حجم مخزن را x مترمکعب می‌گیریم. فرض می‌کنیم، در هرساعت، y

مترمکعب آب از لولهٔ اول و z مترمکعب آب ازلولهٔ دوم عبورکند. فرض مسأله می‌گوید که مخزن را می‌توان به‌کمك لولهٔ اول، یك ساعت زودتر پرکرد تا به‌کمك لولهٔ دوم. بنابراین، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{x}{z}-\frac{x}{y}=١ \qquad (١)$$

اگر قدرت عبور آب ازلولهٔ دوم $\left(z+\frac{۴}{٣}\right)$ مترمکعب درساعت باشد، آن وقت، لولهٔ دوم، مخزن، به‌حجم $(x+٢)$ مترمکعب را در $\dfrac{x+٢}{z+\frac{۴}{٣}}$ ساعت پر می‌کند، که بنابرفرض، برابر است با $\frac{٢}{y}$ ساعت. بنابراین، معادلهٔ زیررا داریم:

$$\frac{x+٢}{z+\frac{۴}{٣}}=\frac{٢}{y} \qquad (٢)$$

و بالاخره، لولهٔ دوم، مخزن را در $\frac{x}{z}$ ساعت پر می‌کند؛ درهمین‌حال از لولهٔ‌اول ٣ مترمکعب آن عبور می‌کند که، برای‌آن، $\frac{٣}{y}$ ساعت وقت‌لازم‌است، یعنی:

$$\frac{xy}{z}=٣ \qquad (٣)$$

از معادلهٔ (١) داریم: $\frac{xy}{z}=x+y$ و از معادلهٔ (٣): $\frac{xy}{z}=٣$؛ بنابراین: $x-٣=y$. ازمعادلهٔ (٣) داریم: $z=\frac{xy}{٣}$ که، با استفاده از رابطهٔ $y=٣-x$، به‌دست می‌آید. $z=\frac{x(٣-x)}{٣}$. در معادلهٔ (٢)، $٣-x$ را به‌جای y و $\frac{x(٣-x)}{٣}$ را به‌جای z می‌گذاریم، به‌معادلهٔ زیر، برای

مجهول x ، می‌رسیم:

$$\frac{x+۲}{\frac{x(۳-x)}{۳}+\frac{۴}{۳}}=\frac{۲}{۳-x} \qquad (۴)$$

که بعداز ساده کردن ، چنین می‌شود:

$$x^۲+۳x-۱۰=۰$$

ریشه‌های این معادله ، چنین‌اند: $x_۱=۲$ ، $x_۲=-۵$ ؛ که هردو درمعادلهٔ (۴) صدق می‌کنند. ولی ، چون حجم مخزن ، عددی است مثبت ، جواب مسأله ، همان $x_۱=۲$ است.

پاسخ: ۲ مترمکعب.

۴. برای آزاد شدن از علامت قدر مطلق ، محور عددی را به دو بخش تقسیم می‌کنیم ، به‌نحوی که دربخش اول داشته باشیم: $۵x-۳\geqslant ۰$ و در بخش دوم: $۵x-۳<۰$ ؛ ونامعادلهٔ مفروض را درهریك ازاین دوحوزه، به‌طور جداگانه ، حل می‌کنیم.

در حوزهٔ نخست داریم: $|۵x-۳|=۵x-۳$ و نامعادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$x^۲-۵x+۳-x<۲ \Longrightarrow ۳-\sqrt{۸}<x<۳+\sqrt{۸}$$

ازاین مجموعه ، باید آن‌هایی را انتخاب کنیم که با شرط $x\geqslant\frac{۳}{۵}$ سازگار باشند که ، درنتیجه ، به‌بازهٔ $\frac{۳}{۵}\leqslant x<۳+\sqrt{۸}$ می‌رسیم.

درحوزهٔ دوم داریم: $|۵x-۳|=-(۵x-۳)$ ونامعادلهٔمفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x^۲+۴x-۵<۰ \Longrightarrow -۵<x<۱$$

که باتوجه به‌حوزهٔ موردنظر، به‌بازهٔ $-۵<x<\frac{۳}{۵}$ برای جواب‌ها در حوزهٔ دوم می‌رسیم. اجتماع دومجموعهٔ جواب ، جواب‌های نامعادلهٔ اصلی را به ما می‌دهد.

پاسخ: $-5<x<3+\sqrt{8}$ ۰

۳۰. a را عدد مثبت ثابتی در نظر می‌گیریم. به‌ازای این a، مختصات نقطه‌های سهمی و خط راست، در دستگاه معادله‌های زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4} \\[2ex] y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^4} \end{cases}$$

با برابر قراردادن سمت‌راست معادله‌ها، به‌برابری $x^2+3ax+2a^2=0$ می‌رسیم و از آن جا: $x_1=-a$ و $x_2=-2a$. آن وقت: $y_1=\dfrac{2a^2}{1+a^4}$، $y_2=\dfrac{3a^2}{1+a^4}$. بنابراین، خط راست مفروض، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند:

$$B\left(-a\,,\ \frac{2a^2}{1+a^4}\right) \text{ و } C\left(-2a\,,\ \frac{3a^2}{1+a^4}\right)$$

به این ترتیب، شکل Cm Bn به دست می‌آید که بالای سهمی و زیر خط راست در فاصلهٔ $-2a \leqslant x \leqslant -a$ قرار دارد (شکل ۱۱۵). مساحت S(a) این شکل را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$S(a)=\int_{-2a}^{-a}\left(\frac{a^2-ax}{1+a^4}-\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^4}\right)dx=$$

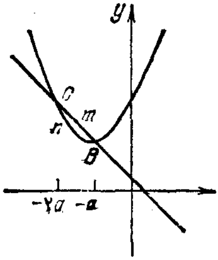
$$=\frac{-1}{1+a^4}\int_{-2a}^{-a}(x^2+3ax+2a^2)dx=$$

$$=\frac{-1}{1+a^4}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3ax^2}{2}+2a^2x\right)\Bigg|_{-2a}^{-a}=\frac{a^3}{6(1+a^4)}$$

باید مقدارهایی از a را پیدا کرد که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، تابع S(a) در مجموعهٔ $a>0$، به حداکثر مقدار خود برسد. تابع S(a)، در همهٔ نقطه‌های خود، مشتق‌پذیر است و داریم:

$$S'(a)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3a^2(1+a^4)-4a^3\cdot a^3}{(1+a^4)^2}=\frac{a^2(3-a^4)}{(1+a^4)^2}$$

معادلهٔ $S'(a)=0$ ، درحوزهٔ $a>0$،



شکل ۱۱۵

تنها یك جواب دارد: $a=\sqrt[4]{3}$. مشتق $S'(a)$ ، درفاصلهٔ $0<a<\sqrt[4]{3}$ مثبت و در فاصلهٔ $\sqrt[4]{3}<a<+\infty$ منفی است. بنابراین ، تابع $S(a)$ درفاصلهٔ اول صعودی و در فاصلهٔ دوم نزولی است. چون تابع در نقطهٔ $x=\sqrt[4]{3}$ پیوسته است ، دراین نقطه به حداکثر مقدار خود می‌رسد. به این ترتیب ، به‌ازای $a=\sqrt[4]{3}$، شکل مفروض ، دارای حداکثر مساحت خود خواهدبود.

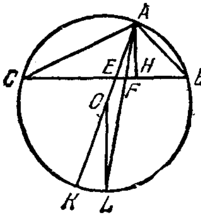
۴. ABC را مثلث مفروض می گیریم (شکل۱۱۶). بنابرفرض ، نقطه‌های E و F برهم منطبق نیستند، بنابراین $|AC|\neq|AB|$. برای مشخص بودن‌وضع، فرض می‌کنیم: $|AC|>|AB|$ دراین صورت، داریم:

$$\widehat{AOB}<\widehat{COA} \text{ و } \widehat{CAO}=\frac{\pi-\widehat{COA}}{2}<\frac{\pi-\widehat{AOB}}{2}=\widehat{OAB}$$

چون $cos\widehat{HAB}=\frac{|AH|}{|AB|}<\frac{|AH|}{|CA|}=cos\widehat{CAH}$، پس $\widehat{HAB}<CAH$.

از آن‌چه ثابت کردیم ، نتیجه می‌شود:

$$\widehat{OAB}>\frac{1}{2}\widehat{CAB}>\widehat{HAB} \qquad (5)$$



شکل ۱۱۶

چون $\widehat{FAB}=\frac{1}{2}\widehat{CAB}$ ، بنابراین نابرابری(۵) به‌معنای این‌است که نقطهٔ F، بین دونقطهٔ E وH قراردارد. نقطهٔ دیگر برخورد خطراست‌AO بامحیط دایره‌را K می‌نامیم. زاویه‌های AKC و ABC ، محاطی و رو به‌روی به‌یك کمان‌اند و ، بنابراین، با هم برابرند. زاویهٔ ACK رو بـه‌روی به قطر و، بنابراین ، قائمه است. به‌این ترتیب:

$$\widehat{CAK}=\frac{\pi}{۲}-\widehat{AKC}=\frac{\pi}{۲}-\widehat{ABC}=\widehat{BAH}$$

بنا به فرض، خط راست AF، نیمساز زاویهٔ BAC است، یعنی

$$\widehat{EAF}=\widehat{FAH}=\frac{۱}{۲}\widehat{EAH}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲}-\widehat{AEH}\right)=\frac{\pi}{۱۲}$$

چون مثلث OAL متساوی‌الساقین است، طول ارتفاعی که از O برضلع AL فرود آید، برابر است با $\frac{۱}{۲}|AL|\cdot tg\frac{\pi}{۱۲}$ و در نتیجه:

$$S_{OAL}=\frac{۱}{۲}|AL|\cdot\frac{۱}{۲}|AL|\cdot tg\frac{\pi}{۱۲}=۸tg\frac{\pi}{۱۲}$$

از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ EAH و FAH به‌دست می‌آید:

$$|EA|=\frac{|AH|}{sin\,\widehat{AEH}}=\frac{|AH|}{sin\frac{\pi}{۳}}=\frac{۲|AH|}{\sqrt{۳}},$$

$$|AF|=\frac{|AH|}{sin\,\widehat{AFH}}=\frac{|AH|}{cos\,\widehat{FAH}}=\frac{|AH|}{cos\frac{\pi}{۱۲}}$$

به‌نحوی که

$$S_{EAF}=\frac{۱}{۲}|EA|\cdot|AF|\cdot sin\,\widehat{EAF}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cdot|AH|\cdot\frac{|AH|}{cos\frac{\pi}{۱۲}}sin\frac{\pi}{۱۲}=۲tg\frac{\pi}{۱۲}$$

و چون $S_{OEFL}=S_{OAL}-S_{EAF}$، بنابراین $S_{OEFL}=۶tg\frac{\pi}{۱۲}$. اکنون دیگر، نسبت مجهول به‌دست می‌آید:

$$\frac{S_{OAL}}{S_{OEFL}}=\frac{۸tg\frac{\pi}{۱۲}}{۶tg\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{۴}{۳}$$

۵. صورت مسأله را، می‌توان به این صورت بیان کرد: مطلوب است همهٔ مقدارهای پارامتر k، به‌نحوی که به‌ازای هر کدام از آن‌ها، دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} x^2+4kx+3k^2-2k-1>0 \\ x^2+2kx-3k^2+8k-4\leqslant 0 \end{cases} \qquad (6)$$

دست‌کم یك جواب داشته باشد. اگر k را ثابت فرض کنیم، آن وقت، سه جمله‌ای $x^2+2kx-3k^2+8k-4$، دو ریشه دارد: $x_1=-k+2|k-1|$ و $x_2=-k-2|k-1|$؛ بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم از دستگاه (۶)، چنین است:

$$-k-2|k-1|\leqslant x\leqslant -k+2|k-1| \qquad (7)$$

همهٔ مقدارهایی از k را پیدا می‌کنیم که، به ازای آن‌ها، دستگاه (۶) جواب نداشته باشد. سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^2+4kx+3k^2-2k-1$ را $f(x)$ می‌نامیم. اگر دستگاه (۶) جواب نداشته‌باشد، باید هردو نابرابری زیر، به‌طور هم‌زمان، برقرار باشند.

$$f(x_1)\leqslant 0 \text{ و } f(x_2)\leqslant 0 \qquad (8)$$

زیرا، با برقراری نابرابری‌های (۸)، هردو عدد x_1 و x_2، و در نتیجه تمامی مجموعهٔ (۷)، بین دوریشهٔ سه‌جمله‌ای درجه دوم $f(x)$ قرارمی‌گیرند (و یا احتمالاً، برابر ریشه‌های آن می‌شوند)؛ و این به‌معنای آن است که برای هرجواب x_0 از نامعادلهٔ دوم دستگاه (۶)، نابرابری $f(x_0)\leqslant 0$ برقرار است و، بنابراین، دستگاه (۶)، جواب ندارد.

به این ترتیب، دستگاه (۶)، وقتی و تنها وقتی جواب ندارد که نابرابرهای (۸) برقرار باشند. به‌سادگی دیده می‌شود که

$$f(x_1)=4k^2-4k|k-1|-10k+3,$$
$$f(x_2)=4k^2+4k|k-1|-10k+3$$

دو حالت $k\geqslant 1$ و $k<1$ را در نظر می‌گیریم. معلوم می‌شود که دستگاه نامعادله‌های (۸) با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} 4k^2-4k(k-1)-10k+3\leqslant 0 \\ 4k^2+4k(k-1)-10k+3\leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -6k+3\leqslant 0 \\ 8k^2-14k+3\leqslant 0 \end{cases} \qquad (9)$$

مجموعهٔ‌جواب‌های نامعادلهٔ‌اول دستگاه (۹) عبارت‌است از $\frac{1}{2}\leqslant k<+\infty$

و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم دستگاه (۹)، $\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه (۹) چنین می‌شود: $\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}$.

به‌ازای مقدارهایی از k که در بازهٔ $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ باشند، دستگاه (۶) جواب ندارد. یعنی، دستگاه (۶)، وقتی و تنها وقتی، دست‌کم یک جواب دارد، که داشته باشیم: $k < \frac{1}{2}$ یا $k > \frac{3}{2}$.

پاسخ: $k < \frac{1}{2}$ ، $k > \frac{3}{2}$.

۶. استفاده از رابطه‌های $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ، $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$، معادلهٔ مفروض را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{1 - \cos(4 + 6x)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}{2} =$$

$$= \frac{1 + \cos(4 - 10x)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 12x\right)}{2}$$

و یا، بعداز ساده کردن

$$\sin 12x - \sin 4x = \cos(4 - 10x) + \cos(4 + 6x) \qquad (10)$$

هردو طرف معادله را، بااستفاده ازرابطه‌های مربوط به‌تفاضل دو سینوس و مجموع دو کسینوس، به‌ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$2\sin 4x \cos 8x = 2\cos(4 - 2x)\cos 8x$$

یعنی، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos 8x = 0 \quad \text{و} \quad \sin 4x = \cos(4 - 2x) \qquad (11)$$

جواب‌های معادلهٔ اول عبارت است از: $x = \frac{1}{8}k\pi + \frac{\pi}{16}$ $(k \in Z)$. معادلهٔ دوم را می‌توان چنین نوشت:

$$\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(4-2x)=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -2\sin\left(x+2-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}-2\right)=0$$

که هم‌ارز با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر است:

$$\sin\left(x+2-\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{و} \quad \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}-2\right)=0$$

با حل معادلهٔ اول، به جواب‌های $x=n\pi+\frac{\pi}{2}-2$ $(n\in Z)$ و با حل معادلهٔ دوم، به جواب‌های $x=\frac{1}{3}m\pi+\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}$ $(m\in Z)$ می‌رسیم.

پاسخ: $x=\frac{1}{8}k\pi+\frac{\pi}{16}$، $x=n\pi+\frac{\pi}{4}-2$، $x=\frac{1}{3}m\pi+\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}$ $(k ، n ، m\in Z)$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. ۶ کیلومتر در ساعت؛

۲. $x<\frac{4-\sqrt{19}}{3}$، $x>\frac{4+\sqrt{19}}{3}$؛ ۳. $a=\sqrt[3]{4}$؛

۴. ۱۰؛ ۵. $k<\frac{9-\sqrt{17}}{32}$؛

۶. $x=\frac{1}{6}k\pi+\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}$، $x=\frac{1}{4}l\pi+\frac{3}{8}$، $x=\frac{1}{2}m\pi+\frac{\pi}{8}+\frac{3}{8}$ $(k ، l ، m\in Z)$.

گروه سوم. ۱. ۷۲ تن؛ ۲. $x\leqslant -5-\sqrt{13}$، $x\geqslant -2+\sqrt{2}$؛

۳. $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$؛ ۴. ۵؛ ۵. $k\leqslant 0$، $k=1$؛

۶. $x=\frac{1}{6}k\pi+\frac{\pi}{12}$، $x=\frac{2}{7}l\pi+\frac{3}{7}-\frac{\pi}{14}$، $x=2m\pi+3-\frac{3\pi}{2}$ $(k ، l ، m\in Z)$.

گروه چهارم. ۱. ۳۰ قطعه ؛ ۲. $x \geqslant \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ ؛ $x \leqslant \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ ؛

۳. $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ؛ ۴. ۲۲ ؛ ۵. $x \geqslant \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ ؛

۶. $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$ ، $x=\frac{1}{3}l\pi-\frac{1}{4}$ ، $x=\frac{1}{6}m\pi+\frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}$
$(k ، l ، m \in Z)$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. با استفاده از رابطه‌های $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ و $\cos 4\alpha=2\cos^2\alpha-1$،
معادلهٔ مفروض را چنین می‌نویسیم:

$$10\cos^2 2x+\cos 2x-3=0$$

معادلـهٔ درجـه دوم $10y^2+y-3=0$ دو جـواب دارد: $y_1=\frac{1}{2}$ و
$y_2=-\frac{3}{5}$. بنابراین، معادلهٔ مفروض، بامجموعهٔ دومعادلهٔ زیر هم‌ارزاست:

$$\cos 2x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \cos 2x=-\frac{3}{5}$$

معادلـهٔ اول ، دو رشته جـواب دارد : $x=p\pi+\frac{\pi}{6}$ و $x=q\pi-\frac{\pi}{6}$
$(p ، q \in Z)$ ؛ همچنین ، معادلهٔ دوم هم ، دورشته جواب دارد:

$$x=m\pi+\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right), \ x=l\pi-\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \ (m, l \in Z)$$

پاسخ: $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ، $x=n\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ $(k, n \in Z)$.

۲. ۴ پسر از ۷ پسر را ، می‌توان به C_7^4 طریق انتخاب کرد ؛ همچنین، ۳ دختر

را از ۸ دختر به C_8^3 طریق. بنابراین این پسر و دخترها را می‌توان به $C_7^4 \cdot C_8^3$ طریق به‌دو گروه تقسیم کرد. داریم:

$$C_7^4 \cdot C_8^3=\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{5\times 6\times 7}{1\times 2\times 3}\cdot\frac{6\times 7\times 8}{1\times 2\times 3}=35\times 56=1960$$

پاسخ: به ۱۹۶۰ طریق.

۳. نامعادلهٔ مفروض با نامعادلهٔ دوطرفهٔ زیر هم‌ارز است:

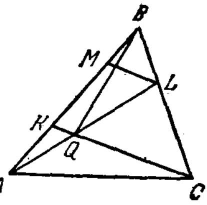
$$0<\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\leqslant 1 \Longrightarrow 1>x^2-4x+3\geqslant\frac{9}{16}$$

و نامعادلهٔ اخیر را می‌توان به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیر نوشت:

$$\begin{cases} x^2-4x+3<1 \\ x^2-4x+3\geqslant\frac{9}{16} \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول این دستگاه، عبارت است از $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$؛ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم، از دو بازه تشکیل‌شده‌است: $x\leqslant\frac{3}{4}$، $x\geqslant\frac{13}{4}$. چون $2-\sqrt{2}<\frac{3}{4}$ و $\frac{13}{4}<2+\sqrt{2}$، پس مجموعهٔ جواب‌های دستگاه نامعادله‌ها، یعنی مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اصلی چنین است:

$$2-\sqrt{2}<x\leqslant\frac{3}{4} \text{ و } \frac{13}{4}\leqslant x<2+\sqrt{2}$$



شکل ۱۱۷

۴. از نقطهٔ L، خط راست LM را موازی خط راست CK رسم می کنیم (شکل ۱۱۷). از تشابه مثلث‌های MBL و KBC نتیجه می‌شود: $\frac{|BM|}{|BK|}=\frac{|BL|}{|BC|}=\frac{1}{3}$، از آن جا

$$|BM|=\frac{1}{3}|BK|=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}|AB|=\frac{2}{9}|AB| \text{ و } |AM|=\frac{7}{9}|AB|$$

از تشابه مثلث‌های AKQ و AML به‌دست می‌آید:

$$\frac{|AQ|}{|AL|}=\frac{|AK|}{|AM|}=\frac{\frac{۱}{۳}|AB|}{\frac{۷}{۹}|AB|}=\frac{۳}{۷} \text{ و } |QL|=\frac{۴}{۷}|AL|$$

علاوه بر آن، برابری‌های زیر را هم داریم:

$$S_{BQC}=S_{BQL}+S_{QLC}=$$

$$=\frac{۱}{۲}|BL|\cdot|QL|\cdot \sin\widehat{BLQ}+\frac{۱}{۲}|LC|\cdot|QL|\cdot\sin\widehat{QLC}=$$

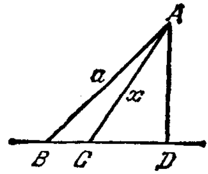
$$=\frac{۴}{۷}\left(\frac{۱}{۲}|BL|\cdot|AL|\cdot\sin\widehat{BLQ}+\frac{۱}{۲}|LC|\cdot|AL|\cdot\sin\widehat{QLC}\right)=$$

$$=\frac{۴}{۷}\left(S_{ABL}=S_{ALC}\right)=\frac{۴}{۷}S_{ABC}$$

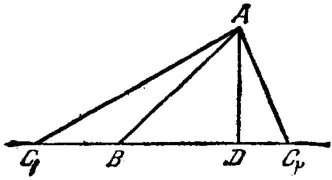
یعنی

$$S_{ABC}=\frac{۷}{۴}S_{BQC}=\frac{۷}{۴}$$

۵. فاصلهٔ بین دومرکز A و B را a کیلومتر (روشن است که $a \geqslant ۸$)، سرعت حرکت اتومبیل را روی دشت، برابر v کیلومتر در ساعت و نقطه‌ای از جاده که کمترین فاصله را تا A داشته باشد، D می‌گیریم (شکل ۱۱۸). دراین صورت: $AD \perp BD$ و $|AD| = ۸$ (کیلومتر). روشن‌است که اگر نقطه‌های B و D منطبق باشند، یعنی اگر $|AB|$ برابر ۸ کیلومتر بشود، آن وقت، شرط مسأله برقراراست. یعنی، حالتی‌که $|AB|$ برابر۸ کیلومتر باشد، یکی از جواب‌های مسأله است. از این به‌بعد B و D را متمایز می‌گیریم، یعنی $a > ۸$ و فرض می‌کنیم‌که، اگر از نقطهٔ D درجهت نقطهٔ A به‌دشت نگاه‌کنیم، نقطهٔ B در سمت چپ خط راست AD واقع باشد (شکل ۱۱۸). روشن است که فرض اخیر، ازکلی بودن مسأله نمی‌کاهد، زیرا اگر B را دردو نقطهٔ متقارن نسبت به‌خط راست AD در نظربگیریم، یاهردوی آن‌ها باشرط‌های مسأله سازگارند و یاهردوی آن‌ها باشرط‌های مسأله نمی‌سازند. C را روی پاره‌خط BD وغیراز B می‌گیریم. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و C را x می‌نامیم. در این صورت $۸ \leqslant x < a$ و زمانی که اتومبیل لازم دارد تا مسیر ACB را طی کند؛ برابر است با



شکل ۱۱۸



شکل ۱۱۹

$$\frac{|AC|}{v}+\frac{|BC|}{۲v}=\frac{x}{v}+\frac{\sqrt{a^{۲}-۶۴}-\sqrt{x^{۲}-۶۴}}{۲v}$$

و برای هرمقدار x از بازهٔ $۸\leqslant x<a$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{x}{v}+\frac{\sqrt{a^{۲}-۶۴}-\sqrt{x^{۲}-۶۴}}{۲v}\geqslant\frac{a}{v} \qquad (۱)$$

و یا نابرابری هم‌ارز آن

$$۲(x-a)+\sqrt{a^{۲}-۶۴}\geqslant\sqrt{x^{۲}-۶۴} \qquad (۲)$$

ثابت می کنیم که اگر، به‌ازای مقداری از a ($a>۸$) ، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) شامل بازهٔ $۸\leqslant x<a$ باشد. آن وقت ، نقطهٔ B ، وقتی که به‌فاصلهٔ a کیلومتر از A درروی جاده باشد ، باشرط مسأله سازگارمی‌شود. فرض کنیم $|AB|=a$ ، موافق با شرطی باشدکه در این جا تنظیم کردیم. اگرنقطهٔ C ، روی خط راست BD، درسمت چپ نقطهٔ B واقع‌باشد (نقطهٔ C_1 در شکل ۱۱۹) ، آن وقت داریم : $|AC|>|AB|$ ، یعنی حرکت روی مسیر ACB ، بیشتراز حرکت روی مسیر AB ، وقت می گیرد. اگر نقطهٔ C ، روی خط راست BD ، درسمت راست نقطهٔ D واقع باشد (نقطهٔ C_2 در شکل ۱۱۹) ، آن وقت $|AC|>|AD|$ و $|BC|>|BD|$. بنابراین ، حرکت در مسیر ACB ، دراین حالت ، نسبت به‌حرکت درمسیر AB ، به‌وقت بیشتری نیاز دارد ، به‌این ترتیب ، حکمی که دربالا تنظیم کردیم ، ثابت شد.

به‌این ترتیب، تنها نقطه‌هایی ازB (غیراز D) باشرط مسأله‌سازگارند که برای آن‌ها ، به‌ازای $a=|AB|$ ، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) شامل بازهٔ $۸\leqslant x<a$ باشد. $a>۸$ را عدد ثابتی می گیریم. جواب‌هایی از نامعادلهٔ (۲) را پیدا می کنیم که در حوزهٔ $۸\leqslant x<a$ واقع باشند؛ معادلهٔ (۲) ، دراین حوزه ، با دستگاه نامعادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} ۲(x-a)+\sqrt{a^۲-۶۴}\geqslant ۰ \\ [۲(x-a)+\sqrt{a^۲-۲۴}]^۲\geqslant x^۲-۶۴ \end{cases}$$

که بعداز تبدیل‌های مجاز ساده ، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} x\geqslant a-\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲-۶۴} \\ (x-a)(۳x-۵a+۴\sqrt{a^۲-۶۴})\geqslant ۰ \end{cases}$$

که در بازهٔ $۸\leqslant x<a$ ، هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} x\geqslant a-\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲-۶۴} \\ ۳x-۵a+۴\sqrt{a^۲-۶۴}\leqslant ۰ \end{cases}$$

و بالاخره

$$a-\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲-۶۴}\leqslant x\leqslant \frac{۵a}{۳}-\frac{۴}{۳}\sqrt{a^۲-۶۴} \qquad (۳)$$

برای پیدا کردن مقدارهای a ، تمامی فاصلهٔ $۸\leqslant x<a$ باید در مجموعهٔ (۳) قرار گیرد. بنابراین ، جواب‌های پارامتر a ، از دستگاه نامعادله‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} a-\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲-۶۴}\leqslant ۸ \\ a\leqslant \frac{۵a}{۳}-\frac{۴}{۳}\sqrt{a^۲-۶۴} \\ a>۸ \end{cases}$$

که بعداز تبدیل‌های لازم ، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} ۲a-۱۶\leqslant\sqrt{a^۲-۶۴} \\ ۲\sqrt{a^۲-۶۴}\leqslant a \\ a>۸ \end{cases} \qquad (۴)$$

سمت چپ وراست هردو معادلهٔ اول (۴) ، درمجموعهٔ $a>۸$ ، غیرمنفی‌اند و ، بنابراین ، دستگاه (۴) ، با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} (۲a-۱۶)^۲\leqslant a^۲-۶۴ \\ ۴(a^۲-۶۴)\leqslant a^۲ \\ a>۸ \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} ۳a^۲-۶۴a+۳۲۰\leqslant ۰ \\ ۳a^۲-۲۵۶\leqslant ۰ \\ a>۸ \end{cases} \qquad (۵)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول، بازهٔ $۸\leqslant a\leqslant \frac{۴۰}{۳}$ ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم، بازهٔ $-\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}\leqslant a\leqslant \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$ است. بنا براین، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه (۵) و، درنتیجه، مجموعهٔ جواب‌های مسأله، عبارت است از بازهٔ $۸<a\leqslant \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$، که باید به‌آن جواب قبلی $a=۸$ را اضافه‌کرد.

پاسخ: $۸\leqslant |AB|\leqslant \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$ (کیلومتر).

۶. برای آزادشدن از قید قدر مطلق‌ها، محور عددی را به‌سه حوزه تقسیم می‌کنیم: $x\geqslant \frac{۱۳}{۵}$، $\frac{۶}{۵}<x<\frac{۱۳}{۵}$ و $x\leqslant \frac{۶}{۵}$.

درحوزهٔ اول داریم:

$$|۵x-۱۳|=۵x-۱۳ \quad \text{و} \quad |۶-۵x|=-(۶-۵x)$$

ومعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۵x-۱۳+(۶-۵x)=۷$$

این معادله، درحوزهٔ $x\geqslant \frac{۱۳}{۵}$ جواب ندارد.

درحوزهٔ دوم داریم:

$$|۵x-۱۳|=-(۵x-۱۳) \quad \text{و} \quad |۶-۵x|=-(۶-۵x)$$

ودر نتیجه، معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$-۵x+۱۳+۶-۵x=۷$$

این معادله هم، درحوزهٔ $\frac{۶}{۵}<x<\frac{۱۳}{۵}$ جواب ندارد.

درحوزهٔ سوم داریم:

$$|6-5x|=6-5x \quad \text{و} \quad |5x-13|=-(5x-13)$$

ومعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$-5x+13-6+5x=7$$

این معادله، به‌اتحاد تبدیل می‌شود، یعنی به‌ازای همهٔ مقداری حوزهٔ $x\leqslant\frac{6}{5}$، برقرار است.

پاسخ: $x\leqslant\frac{6}{5}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $n\pi+\frac{\pi}{2}$، $(n, m\in Z)\, m\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}$؛

۲. C_{12}^{3}، $2C_{6}^{3}$؛ ۳. $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\leqslant x<-2$، $3<x<\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$؛

۴. $6/4$؛ ۵. $\frac{20\sqrt{2}}{3}\leqslant a\leqslant 10$؛ ۶. $x\leqslant\frac{2}{3}$.

گروه سوم. ۱. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$، $(n, k\in Z)\, k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$؛

۲. C_{8}^{4}، C_{6}^{3}؛ ۳. $-2\leqslant x<1-\sqrt{5}$، $1+\sqrt{5}\leqslant x<4$؛

۴. $\frac{3}{2}$؛ ۵. $\frac{15}{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{15}$؛ ۶. $x\leqslant\frac{5}{9}$.

گروه چهارم. ۱. $(n\in Z)\, n\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}$؛ ۲. C_{14}^{3}، C_{18}^{4}؛

۳. $\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}<x<\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$،

$$\frac{-3+\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$$

۴. $\frac{11}{16}$؛ ۵. $5\sqrt{15}\leqslant a\leqslant 20$؛ ۶. $x\leqslant\frac{11}{7}$

گروه اول

۱. به‌ازای $a=0$، هیچ مقداری از x در برابری صدق نمی‌کند. a را عددی ثابت ومخالف صفر می‌گیریم. در این صورت، مقدارهای موردنظر x، جواب‌های این معادله‌اند:

$$\frac{1}{2a-x}=\frac{3}{a}$$

این معادله، یك جواب منحصر به‌فرد دارد: $x=\frac{5a}{3}$.

پاسخ: درحالت $a=0$، مقداری برای x وجود ندارد و درحالت $a\neq 0$ داریم: $x=\frac{5a}{3}$.

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x برای این معادله، عبارت است از: $-\infty<x<1$. دراین حوزه، معادلهٔ مفروض، به‌معادلهٔ زیر، که هم ارز آن است، تبدیل می‌شود:

$$1+2\lg(1-x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x)$$

که به‌معادلهٔ $1+x^2=10$ منجرمی‌شود. معادلهٔ اخیر، دوجواب دارد: $x_1=-3$ و $x_2=3$؛ که ازآن‌ها، تنها $x_1=-3$ درحوزهٔ تعریف‌معادله قراردارد.

پاسخ: $x=-3$.

۳. چون $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$، بنابراین، می‌توان زاویهٔ φ را پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{29}}$ و $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{29}}$؛ مثلا $\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{29}}$. دراین صورت

$$5\sin x+2\cos x=\sqrt{29}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=\sqrt{29}\sin(x+\varphi)$$

ومعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{A}{\sqrt{29}} \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱)، وقتی و تنها وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $\left|\frac{A}{\sqrt{۲۹}}\right| \leqslant ۱$، یعنی $-\sqrt{۲۹} \leqslant A \leqslant \sqrt{۲۹}$.

۴. سرعت قطار باری را، x کیلومتر درساعت می‌گیریم. ازفرض معلوم می‌شود که سرعت‌های قطار مسافری وقطار سریع‌السیر، به‌ترتیب، برابرند با $\frac{۸}{۵}x$ کیلومتر درساعت و $(x+۵۰)$ کیلومتر در ساعت. اگر فاصلهٔ بین شهرها، برابر S کیلومتر باشد، زمان لازم برای پیمودن این فاصله، به‌ترتیب، برای قطارهای باری، مسافری وسریع‌السیر، برابراست با $\frac{S}{x}$ ساعت، $\frac{S}{\frac{۸}{۵}x}$ ساعت و $\frac{S}{x+۵۰}$ ساعت. اکنون، با توجه به‌شرطهای مسأله، داریم:

$$\begin{cases}\frac{S}{x}-\frac{S}{x+۵۰}=۴\\ \frac{۵S}{۸x}-\frac{S}{x+۵۰}=۱\end{cases}$$

این دستگاه معادله‌ها را، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۵۰S}{x(x+۵۰)}=۴$$

$$\frac{S(۲۵۰-۳x)}{۸x(x+۵۰)}=۱$$

که از تقسیم معادلهٔ اول دستگاه برمعادلهٔ دوم آن، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۴۰۰}{۲۵۰-۳x}=۴ \implies x=۵۰$$

پاسخ: سرعت‌قطارباری ۵۰ کیلومتردرساعت وسرعت‌قطارسریع‌السیر ۱۰۰ کیلومتر درساعت است.

۵. با توجه به‌فرض‌های مسأله داریم:

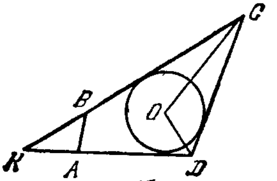
$$\sin\widehat{ABC}=\sqrt{-۱\left(-\frac{۶۳}{۶۵}\right)^{۲}}=\frac{۱۶}{۶۵}$$

$$\cos \widehat{DAB}=\sqrt{1-\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲}=\frac{۴}{۵}$$

و از آن‌جا

$$\sin(\widehat{ABC}+\widehat{DAB})=\frac{۱۶}{۶۵}\times\frac{۴}{۵}+\left(-\frac{۶۳}{۶۵}\right)\times\frac{۳}{۵}=-\frac{۵}{۱۳}$$

و این، به‌معنای آن است که $\widehat{ABC}+\widehat{DAB}>\pi$ و خط‌های راست AD و BC، یکدیگر را در نقطه‌ای مثل K قطع می‌کنند؛ نقطهٔ K روی امتداد DA (از طرف A) و امتداد CB (از طرف B) قرار دارد (شکل ۱۲۰). سپس داریم:



شکل ۱۲۰

$$\widehat{AKB}=\pi-\widehat{KAB}-\widehat{KBA}=\pi-(\pi-\widehat{DAB})-(\pi-\widehat{ABC})=$$
$$=\widehat{ABC}+\widehat{DAB}-\pi,$$
$$\sin\widehat{AKB}=-\sin(\widehat{ABC}+\widehat{DAB})=\frac{۵}{۱۳}$$

از مثلث AKB، با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، به‌دست می‌آید.

$$\frac{|KB|}{\sin\widehat{KAB}}=\frac{|AB|}{\sin\widehat{AKB}} \Rightarrow |KB|=|AB|\frac{\sin\widehat{KAB}}{\sin\widehat{AKB}}=$$

$$=\frac{۲۵}{۶۴}\cdot\frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۵}{۱۳}}=\frac{۳۹}{۶۴}$$

یعنی

$$|KC|=|KB|+|BC|=\frac{۳۹}{۶۴}+۱۲\frac{۲۵}{۶۴}=۱۳$$

با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها، در مثلث KCD، داریم:

$$|CD|:\sin\widehat{AKB}=|KC|:\sin\widehat{KDC}$$

از آن‌جا

$$\sin\widehat{KDC}=\frac{|KC|}{|CD|}\sin\widehat{AKB}=\frac{۱۳}{\frac{۲۵}{۴}}\cdot\frac{۵}{۱۳}=\frac{۴}{۵}$$

وچون، بنا برفرض $\widehat{KDC}>\frac{\pi}{۲}$، پس $\cos\widehat{KDC}=-\frac{۳}{۵}$. بـا توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، درمثلث OCD، به‌دست می‌آید:

$$\frac{|OC|}{\sin\widehat{ODC}}=\frac{|CD|}{\sin\widehat{DOC}}\Longrightarrow|OC|=|CD|\cdot\frac{\sin\widehat{ODC}}{\sin\widehat{DOC}}\quad(۲)$$

چون مرکزدایرهٔ O روی نیمسازهای زاویه‌های KDC و BCD قراردارد، بنابراین

$$\sin\widehat{ODC}=\sin\left(\frac{۱}{۲}\widehat{KDC}\right)=\sqrt{\frac{۱-\cos\widehat{KDC}}{۲}}=\sqrt{\frac{۱+\frac{۳}{۵}}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}},$$

و

$$\sin\widehat{DOC}=\sin(\pi-\widehat{ODC}-\widehat{OCD})=\sin\left(\frac{\widehat{ADC}+\widehat{BCD}}{۲}\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi-\widehat{AKB}}{۲}\right)=\cos\frac{۱}{۲}\widehat{AKB}=\sqrt{\frac{۱+\cos\widehat{AKB}}{۲}}$$

چون، زاویهٔ KDC منفرجه و زاویهٔ AKB حاده است، بنابراین

$$\cos\widehat{AKB}=\sqrt{۱-\sin^{۲}\widehat{AKB}}=\sqrt{۱-\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۲}}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

ولی، دراین صورت

$$\sin\widehat{DOC}=\sqrt{\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱۲}{۱۳}\right)}=\frac{۵}{\sqrt{۲۶}}$$

اکنون، از (۲) به‌دست می‌آید:

$$|OC| = \frac{۲۵}{۴} \cdot \frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۵}{\sqrt{۲۶}}} = \sqrt{\frac{۶۵}{۲}}$$

۶. فرض کنیم، x با شرط مسأله سازگار باشد. درحالت $x = ۰$، تنها یك زوج منحصر به‌فرد از عددهای (a, b) پیدا می‌شود که در نابرابری‌های زیر صدق کند.

$$abx \geqslant ۴a + ۷b + x \qquad (۳)$$

$$a \geqslant ۰,\ b \geqslant ۰ \qquad (۴)$$

که عبارت است از: $a = ۰$ و $b = ۰$. ولی، نابرابری $ab \geqslant ۵$، به‌ازای این مقدارهای a و b، برقرار نیست. بنابراین، داریم: $x > ۰$. نابرابری (۳) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$a(bx - ۴) \geqslant ۷b + x \qquad (۵)$$

b را عددی می‌گیریم که در نابرابری $b > \frac{۴}{x}$ صدق کند، شرط مسأله به‌معنای این است که برای هرعدد a، که با شرط‌های $a \geqslant ۰$ و (۵) سازگار باشد، یعنی برای هرعدد a بـا شرط $a \geqslant \frac{۷b + x}{bx - ۴}$، باید نابرابری $a \geqslant \frac{۵}{b}$ برقرار باشد. واین، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $\frac{۷b + x}{bx - ۴} \geqslant \frac{۵}{b}$ و یـــا چون $b > \frac{۴}{x} > ۰$، وقتی کـه داشته باشیم: $b(۷b + x) \geqslant ۵(bx - ۴)$. این نابرابری را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۷b^۲ - ۴bx + ۲۰ \geqslant ۰ \qquad (۶)$$

به‌این ترتیب، برای هـر b از حوزهٔ $b > \frac{۴}{x}$، باید نابرابری (۶) برقـرار باشد.

مبین Δ، از سه‌جمله‌ای درجه دوم $۷t^۲ - ۴tx + ۲۰$ برابر است با $۱۶x^۲ - ۵۶۰$. بنابراین، اگر داشته‌باشیم $\Delta \leqslant ۰$، یعنی اگر $۰ < x \leqslant \sqrt{۳۵}$، آن وقت، نابرابری (۶) برای همهٔ مقدارهای b برقرار خواهد بود. طول

نقطهٔ راس سهمی متناظر بـا سه‌جمله‌ای $7t^2-4tx+20$ برابراست بـا $\frac{2x}{7}$. چون، به‌ازای $x>\sqrt{35}$، نابرابری‌های $\frac{2x}{7}>\frac{4}{x}$ و $\Delta>0$ برقرار است، بنابراین، نابرابری (۶) برای همهٔ مقدارهای b، از حوزهٔ $b>\frac{4}{x}$، برقرار نیست (مثلا به‌ازای $b=\frac{2x}{7}$).

به‌این ترتیب، همهٔ مقدارهای مجهول x درحوزهٔ زیرقراردارند:

$$0<x\leqslant\sqrt{35} \qquad (7)$$

x را، عدد دلخواهی از حوزهٔ (۷) می گیریم. ثابت می کنیم که، در این صورت، شرط مساله برقرار است. فرض می کنیم، زوج عدد (a, b) در نابرابری‌های (۳) و(۴) صدق کنند. دراین‌صورت داریم: $a>0$ و $b>0$. اگـر b درحوزهٔ $0<b\leqslant\frac{4}{x}$ باشد،داریم $bx-4\leqslant 0$ که با توجه‌به‌مثبت بودن a وغیرمنفی بودن $7b+x$، نابرابری (۵) و، درنتیجه، نابرابری(۳) برقرار نمی‌شود. یعنی باید داشته باشیم: $b>\frac{4}{x}$. اگـر داشتـه بـاشیم: $0<a<\frac{5}{b}$، با توجه به (۵) به‌دست می‌آید:

$$\frac{7b+x}{bx-4}<\frac{5}{b}$$

یا $7b^2-4bx+20<0$. ولی این، ممکن نیست، زیـرا به‌ازای x از حوزهٔ (۷)، مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $7t^2-4tx+20$ غیرمثبت است.

بنابراین، باید داشته باشیم: $a\geqslant\frac{5}{b}$ یا $ab\geqslant 5$.

پاسخ: $0<x\leqslant\sqrt{35}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. برای $a=0$، هیـچ مقداری از x بـا شرط مساله نمی‌سازد؛ برای $a\neq 0$ داریم: $x=\frac{a}{3}$؛ ۲. $x=-9$؛

۳. $-\sqrt{58}\leqslant A\leqslant\sqrt{58}$؛ ۴. ۵٪، ۱۰٪؛ ۵. $\frac{6}{\sqrt{5}}$؛

۶. $0<x\leqslant\sqrt{32}$.

گروه سوم. ۱. برای $a=0$، هیچ مقداری از x درشرط مساله صدق‌نمی کند وبرای $a\neq 0$ داریم: $x=\frac{3a}{2}$؛ ۲. $x=8$؛

۳. $-\sqrt{97}\leqslant A\leqslant\sqrt{97}$؛

۴. ۶۰ مترمکعب در ساعت، ۲۴مترمکعب در ساعت؛ ۵. $\frac{103}{65}$؛

۶. $0<x\leqslant\sqrt{60}$.

گروه چهارم. ۱. برای $a=0$، هیچ مقداری ازx با شرط مساله نمی‌سازد و برای $a\neq 0$ داریم: $x=\frac{a}{4}$؛ ۲. $x=2$؛

۳. $-\sqrt{13}\leqslant A\leqslant\sqrt{13}$؛ ۴. ۲متر، ۳متر؛ ۵. $\frac{103\sqrt{17}}{130}$؛

۶. $0<x\leqslant\sqrt{96}$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. 7^x را y می‌نامیم؛ نامعادله مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{y}-21y>4$$

همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ می‌بریم و به‌یك مخرج تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{21y^2+4y-1}{y}<0$$

درمجموعهٔ $y>0$ (ما تنها بـه‌مقدارهای مثبت y کارداریم، زیـرا $y=7^x$)، نامعادلهٔ اخیر، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارزاست:

$$21y^2+4y-1<0$$

که جواب‌های آن، به‌صورت $\frac{1}{3}<y<\frac{1}{7}$ درمی‌آیند؛ که ازآن‌ها، باتوجه به مثبت بودن y، تنها $0<y<\frac{1}{7}$ باقی‌می‌ماند. به‌این‌ترتیب، نامعادلهٔ مفروض منجر به نامعادلهٔ $7^x<\frac{1}{7}$ یا $x<-1$ می‌شود.

پاسخ: $x<-1$.

۲. همهٔ جواب‌های معادلهٔ مفروض را، باید از بین جواب‌های معادلهٔ زیر انتخاب کرد:

$$2-3\sin x-\cos 2x=0$$

معادلهٔ اخیر، با توجه به‌رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$، چنین می‌شود:

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \qquad (1)$$

که نسبت به مجهول $\sin x$، دارای دوجواب $\frac{1}{2}$ و ۱ می‌باشد. بنابراین، معادلهٔ (۱)، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\sin x=\frac{1}{2} \text{ و } \sin x=1$$

که برای آن‌ها، به رشته جواب‌های زیرمی‌رسیم:

$$x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6} \text{ و } x=2n\pi+\frac{\pi}{2}(k،n\in Z)$$

برای این که، ازاین عددها، جواب‌های معادلهٔ مفروض را جداکنیم، باید عددهایی راکه در برابری

$$6x^2-\pi x-\pi^2=0$$

صدق می‌کنند، ازآن‌ها، کناربزنیم. معادلهٔ اخیر دو ریشه دارد: $x_1=-\frac{\pi}{3}$ و $x_2=\frac{\pi}{2}$. در رشتهٔ اول جواب‌ها، عددی‌که با یکی ازاین دو ریشه تطبیق کند، وجود ندارد. در رشتهٔ دوم جواب‌ها، تنها یك عدد، به‌ازای $n=0$، با یکی ازاین ریشه‌ها تطبیق می‌کند.

پاسخ: $x=k\pi+(-1)^k.\frac{\pi}{6}\,(k\in Z)$، $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}\,(n\in Z$ و $n\neq 0)$

۳. برای آزاد شدن ازعلامت قدرمطلق، محورعددی را به دوحوزه تقسیم می‌کنیم: درحوزهٔ اول $x-۳ \geqslant ۰$ و درحوزهٔ دوم $x-۳ < ۰$، ودرهریك‌از این دو حوزه، جواب‌های معادله را، به‌طورجداگانه، پیدا می‌کنیم.

درحوزهٔاول داریم $|x-۳| = x-۳$ ومعادلهٔ مفروض‌چنین‌می‌شود:

$$x^{۲}+۴(x-۳)-۷x+۱۱=۰ \Rightarrow x^{۲}-۳x-۱=۰$$

ایـن معادلـهٔ درجـه دوم، دارای دوجـواب است: $x_{۱}=\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ و $x_{۲}=\frac{۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$؛ کـه ازآن‌ها، تنها $x_{۱}$ با شرط $x-۳ \geqslant ۰$ سازگار و بنابراین، جوابی ازمعادلهٔ اصلی است.

درحوزهٔ دوم داریم: $|x-۳| = -(x-۳)$ و معادلهٔ مفروض بـه این صورت در می‌آید: $x^{۲}-۱۱x+۲۳=۰$.

این معادله هم دو ریشه دارد: $x_{۱}=\frac{۱۱+\sqrt{۲۹}}{۲}$ و $x_{۲}=\frac{۱۱-\sqrt{۲۹}}{۲}$، که تنها $x_{۲}$ با شرط $x-۳<۰$ می‌سازد.

پاسخ: $\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ و $\frac{۱۱-\sqrt{۲۹}}{۲}$.

۴. راهی راکه اتومبیل در۹ ثانیه طی می‌کند، به‌دست می‌آوریم. این فاصله، عبارت است ازمجموع جمله‌های یك تصاعد عددی با جملهٔ اول ۳۰ و قـدر نسبت (-۲). داریم:

$$a_{۹}=a_{۱}+d(۹-۱)=۳۰+(-۲)(۸)=۱۴(\text{متر})$$

که درآن، $a_{۱}$ جمله‌اول، $a_{۹}$ جملهٔ نهم و d قدرنسبت تصاعداست. درنتیجه، مجموع ۹ جملهٔ تصاعد، یعنی راهی‌که اتومبیل در۹ ثانیه اول بعداز رسیدن به‌A، طی‌کرده است، برابرمی‌شود با

$$\frac{a_{۱}+a_{۹}}{۲}\times ۹=\frac{۳۰+۱۴}{۲}\times ۹=۱۹۸(\text{متر})$$

بنابرایـن، وقتی‌که اتوبـوس ازنقطهٔ B آغازبه حرکت می‌کند، بـه اندازهٔ ۱۹۸ — ۲۵۸، یعنی ۶۰ متر با اتومبیل فاصله دارد. درنخستین ثانیهٔ بعد از حرکت اتوبوس، اتومبیل ۱۲ متر واتوبوس ۲متر می‌روند، یعنی بـه اندازهٔ ۱۴ متر به‌یکدیگر نـزدیك می‌شوند و در فاصلهٔ ۱۴ — ۶۰، یعنی ۴۶ متری

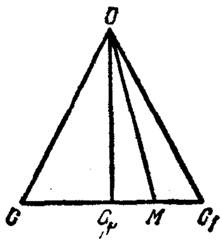
یکدیگر قرارمی‌گیرند. درثانیهٔ دوم به‌اندازهٔ

$$(۱۲-۲)+(۲+۱)=۱۳\text{(متر)}$$

به هم نزدیک‌می‌شوند ودرفاصلهٔ ۱۳ — ۴۶، یعنی ۳۳متری یکدیگر قرارمی‌گیرند. به همین ترتیب، درثانیه سوم ۱۲متر، درثانیهٔ چهارم ۱۱مترودرثانیهٔ پنجم ۱۰متردیگربه‌هم نزدیک می‌شوند؛ وچون ۳۳ = ۱۰ + ۱۱ + ۱۲، بنابراین، اتوبوس۵ ثانیه بعدازحرکت ازB به‌اتومبیل می‌رسد و دراین مدت به اندازهٔ ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲، یعنی ۲۰متر راه پیموده است.

پاسخ: ۲۰ متر.

۵. O را مرکز کره می‌گیریم. چون $|OM|=\sqrt{۵۹}$ وشعاع کره برابر۱۱ سانتیمتراست، بنابراین، نقطهٔ Mدر درون‌کره قراردارد. یعنی. نقطهٔ Mروی هریک‌ازپاره‌خط‌های $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$قرار دارد.ازمرکز کره، عمودهای $OA_۲$، $OB_۲$، $OC_۲$ را، به‌ترتیب،برخط‌های راست $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ رسم‌می‌کنیم. چون همهٔ نقطه‌های A، $A_۱$، B، $B_۱$، C، $C_۱$ برسطح کره قرار دارند، بنابراین، نقطه‌های $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$، به ترتیب، وسط پاره‌خط‌های $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ خواهندبود.



شکل ۱۲۱

درمثلث $OCC_۱$ (شکل۱۲۱)، بنابرفرض مساله، داریم:

$$|CM|:|MC_۱|=(۸+\sqrt{۲}):(۸-\sqrt{۲})$$

یعنی $|MC_۱|<|CM|$. ازمثلث‌های‌قائم‌الزاویهٔ $OC_۲C_۱$و$OC_۲M$، به‌دست می‌آید :

$$|OC_۱|^۲=|OC_۲|^۲+|C_۲C_۱|^۲ \text{ ، } |OM|^۲=|OC_۲|^۲+|C_۲M|^۲$$

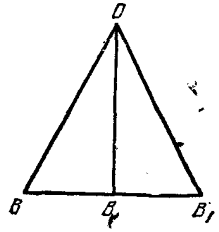
ولی دراین صورت

$$|C_۲C_۱|^۲-|C_۲M|^۲=|OC_۱|^۲-|OM|^۲=۱۲۱-۵۹=۶۲ \quad (۲)$$

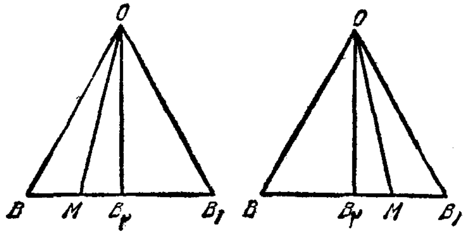
وچون داریم: $|CC_۲|=|C_۲C_۱|$ ، $|CM|=|CC_۲|+|C_۲M|=$ $=|C_۲C_۱|+|C_۲M|$ ، $|C_۱M|=|C_۲C_۱|-|C_۲M|$

پس

$$\frac{|CM|}{|C_۱M|}=\frac{|C_۲C_۱|+|C_۲M|}{|C_۲C_۱|-|C_۲M|}=\frac{۸+\sqrt{۲}}{۸-\sqrt{۲}}$$



شکل ۱۲۲



شکل ۱۲۳

وازآن‌جا $|C_2C_1| = 4\sqrt{2}|D_2M|$. اکنون‌از(۲)نتیجه‌می‌شود: $|C_2M| = \sqrt{2}$.
با استفاده ازقضیهٔ فیثاغورث درمثلث OBB_2 (شکل ۱۲۲)، به دست می آید:

$$|OB_2| = \sqrt{|OB_1|^2 - \left(\frac{|BB_1|}{2}\right)^2} = \sqrt{121 - 81} = \sqrt{40}$$

بنا براین، نقطهٔ M غیرازنقطهٔ B_2 است. به این ترتیب، دوحالت ممکن است پیش‌آیدکه روی شکل ۱۲۳ نشان داده‌شده‌اند. درهریك ازاین دوحالت، با استفاده ازقضیهٔ فیثاغورث درمثلث OB_2M، به‌دست می‌آید:

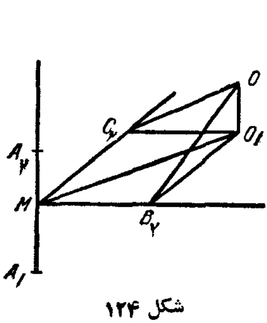
$$|B_2M| = \sqrt{|OM|^2 - |OB_2|^2} = \sqrt{59 - 40} = \sqrt{19}$$

تصویر نقطهٔ O برصفحهٔ MB_2C_2 را O_1 می‌نامیم (شکل۱۲۴).چون $DC_2 \perp MC_2$ و $OB_2 \perp MB_2$، پس، بنا بر قضیه سه عمود، داریم: $O_1C_2 \perp MC_2$ و $O_1B_2 \perp MB_2$.
بنابراین، چهارضلعی $MC_2O_1B_2$ مستطیل است و داریم:

$$|O_1M|^2 = |B_2M|^2 + |B_2O_1|^2 = |B_2M|^2 + |C_2M|^2 = 21$$

ولی‌دراین‌صورت، بنابرقضیهٔ‌فیثاغورث

$$|OO_1| = \sqrt{|OM|^2 - |O_1M|^2} = \sqrt{59 - 21} = \sqrt{38}$$



شکل ۱۲۴

خط راست AA_1 بر صفحهٔ MB_2C_2 عمود است وچون، بنابرفرض، $AA_1 \perp BB_1$ و $AA_1 \perp CC_1$، بنابرفرض $O_1M \perp AA_1$ و $OO_1 \perp AA_1$ چون $OA_2 \perp AA_1$، پس $OA_2 \| O_1M$، یعنی چهارضلعی OO_1MA_2

مستطیل است. در این صورت $|OA_2| = |O_1M| = \sqrt{21}$. از مثلث قائم الزاویهٔ OA_1A_2 به‌دست می‌آید:

$$|A_1A_2| = \sqrt{|OA_1|^2 - |OA_2|^2} = \sqrt{121 - 21} = 10$$

و درنتیجه: $|AA_1| = 2|A_1A_2| = 20$.

پاسخ: ۲۰ سانتیمتر.

گروه‌های دوم تاچهارم

گروه دوم. ۱. $x > 2$؛ ۲. جواب ندارد؛

۳. $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$، $x_2 = \frac{-9-\sqrt{35}}{2}$؛

۴. ۳۲۴/۸ متر؛ ۵. $\sqrt{67}$ سانتیمتر

گروه سوم. ۱. $x > 1$؛ ۲. $k\pi + \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$، $\pi n - \frac{\pi}{6}$ که در آن، n می‌تواند هرعدد درستی به‌جز $n = 0$ را قبول کند،

۳. $x_1 = \frac{5+\sqrt{53}}{2}$، $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$، ۴. ۱۴/۴ کیلومتر،

۵. ۱۲ سانتیمتر

گروه چهارم. ۱. $x < 2$؛ ۲. $x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$،

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$، که‌در آن، n می‌تواندهر عدددرستی به‌جز $n = 0$ راقبول کند؛

۳. $x = \frac{7+\sqrt{26}}{2}$؛ ۴. ۹۳۰ متر،

۵. $(6+\sqrt{2}):(6-\sqrt{2})$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. برای آزاد شدن ازعلامت قدرمطلق، محور عددی را به دوحوزهٔ جداگانه تقسیم می‌کنیم: درحوزهٔ اول $x - 3 \geqslant 0$ وجواب‌های معادله را، در هریك

ازاین دوحوزه، به‌طورجداگانه، پیدا می‌کنیم.

درحوزهٔ اول داریم: $|x-۳| = x-۳$ ومعادلهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$x^{۲}-۴x+(x-۳)+۳=۰ \Rightarrow x^{۲}-۳x=۰$$

این معادله دوجواب دارد: $x_{۱}=۰$ و $x_{۲}=۳$، که ازآن‌ها، تنها $x_{۲}=۳$ به حوزهٔ اول تعلق دارد.

درحوزهٔ دوم داریم: $|x-۳| = -(x-۳)$ و معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$x^{۲}-۴x-(x+۳)+۳=۰ \Rightarrow x^{۲}-۵x+۶=۰$$

این‌معادله هم دوجواب دارد: $x_{۳}=۲$ و $x_{۴}=۳$، که ازآن‌ها، تنها $x_{۳}=۲$ به‌حوزهٔ دوم متعلق است.

پاسخ: $x=۲$ و $x=۳$.

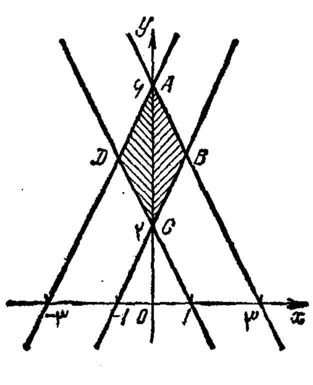
۲. چون $log_{۹}x=\frac{۱}{۲}log_{۳}x$، بنابراین، می‌توان معادله را این‌طور نوشت:

$$۳log_{۳}x-\frac{۱}{۲}log_{۳}x=۵ \Rightarrow log_{۳}x=۲$$

پاسخ: $x=۹$.

۳. برای این‌که شکل مفروض را رسم کنیم، صفحهٔ مربوط به‌دستگاه مختصات $(x ، y)$ را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کنیم، به نحوی که درنیم صفحهٔ اول $x \geqslant ۰$ ودرنیم صفحهٔ دوم $x<۰$ باشد. بخشی ازشکل که درنیم صفحهٔ اول‌قرارمی‌گیرد، به‌وسیلهٔ نامعادله‌های زیر مشخص می‌شود:

$$\begin{cases} y \leqslant ۶-۲x \\ y \geqslant ۲+۲x \end{cases} \qquad (۱)$$



شکل ۱۲۵

برای نقطه‌های نیم‌صفحهٔ دوم داریم: $|x|=-x$ وبنابراین، بخشی از شکل که دراین نیم‌صفحه واقع‌است، با این نامعادله‌ها مشخص می‌شود:

$$(2) \quad \begin{cases} y \leqslant 6+2x \\ y \geqslant 2-2x \end{cases}$$

به‌این ترتیب، شکل مطلوب، ازدوبخش تشکیل شده است: بخش اول، شامل نقطه‌هایی ازصفحهٔ (x , y) است که مختصات آن‌ها، با شرط‌های

$$x \geqslant 0 \quad , \quad 2+2x \leqslant y \leqslant 6-2x$$

سازگارباشند وبخش دوم ازنقطه‌هایی ازصفحهٔ (x , y) که مختصات آن‌ها با شرط‌های

$$x < 0 \quad , \quad 2-2x \leqslant y \leqslant 6+2x$$

سازگار باشند. به‌بخش اول شکل‌می‌پردازیم. خط‌های راست

$$y = 6-2x \quad , \quad y = 2+2x$$

یکدیگر رادرنقطهٔ $B(1 , 4)$ ومحورعرض‌را، به‌ترتیب، درنقطه‌های $A(0 , 6)$ و $C(0 , 2)$ قطع می‌کنند. حالا به‌سادگی‌روشن می‌شود که بخش‌اول شکل، عبارت است ازمثلث ABC (شکل ۱۲۵) به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود که بخش دوم، به‌صورت مثلث ADC درمی‌آید، که درآن، $D(-1 , 4)$ عبارت است‌ازنقطهٔ برخورد خط‌های‌راست $y = 6+2x$ و $y = 2-2x$. به‌این‌ترتیب، چهارضلعی $ABCD$، همان شکل مطلوب است. ضلع‌های AB و DC ازاین‌چهارضلعی، روی خط‌های راست $y = 6-2x$ و $y = 2-2x$ وضلع‌های AD و BC ازآن روی‌خط‌های‌راست $y = 6+2x$ و $y = 2+2x$ قراردارند. از آن‌جا که دوخط راست اول با هم و دوخط راست دوم با هم موازی‌اند، بنابراین، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. روشن‌است که قطرهای AC و BD این‌متوازی‌الاضلاع برهم عمودند، یعنی $ABCD$ یك لوزی است ومساحت آن برابراست‌با

$$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD| = \frac{1}{2}\times 4\times 2 = 4$$

پاسخ: ۴ واحد مربع.

۴. (x_0 , y_0) را جوابی‌ازدستگاه‌معادله‌های مفروض‌می‌گیریم؛ دراین‌صورت، برابری‌های زیر برقراراست:

$$\sin x_0 \sin y_0 = \frac{1}{4}, \quad \frac{3\sin x_0}{\cos x_0} = \frac{\cos y_0}{\sin y_0}$$

که از آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$\sin x_0 \cdot \sin y_0 = \frac{1}{4},\ \cos x_0 \cdot \cos y_0 = \frac{3}{4}$$

این دو برابری را، یکبار باهم جمع ویکبار ازهم کم می کنیم، به‌دست‌می آید:

$$\cos(x_0 - y_0) = 1,\ \cos(x_0 + y_0) = \frac{1}{2}$$

یعنی عددهای x_0 و y_0 چنانندکه برای هر k و m $(k, m \in Z)$ داریم:

$$x_0 - y_0 = 2k\pi,\ x_0 + y_0 = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

از آن‌جا

$$x_0 = (k+m)\pi + \frac{\pi}{6},\ y_0 = (m-k)\pi + \frac{\pi}{6} \qquad (3)$$

یا

$$x_0 = (k+m\pi) - \frac{\pi}{6},\ y_0 = (m-k)\pi - \frac{\pi}{6} \qquad (4)$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کردکه هریك از جواب‌های (۳) یا (۴) درمعادلهٔ مفروض صدق می کنند و، بنابراین، به‌ازای k و m درست، جواب‌های معادله‌اند.

۵. فرض می کنیم که، درابتدا، x لیتر از مایع A در ظرف اول ریخته‌ایم. در نتیجه، بنابرفرض مسأله، در ابتدا به‌اندازهٔ $(15 - x)$ لیتر از مایع A در ظرف دوم ریخته شده است. وقتی که ظرف اول را با مایع B پرکردیم و آن را به‌هم زدیم، درهرلیتر آن $\frac{x}{10}$ لیتر از مایع A و $\frac{10-x}{10}$ لیتراز مایع B وجود دارد. برای پرکردن ظرف دوم، باید به‌اندازهٔ $20 - (15 - x)$، یعنی $(5 + x)$ لیتر ازآمیزهٔ ظرف اول درآن بریزیم. دراین $(5 + x)$ لیتر آمیزه، $\frac{x}{10}(5 + x)$ لیتر از مایع A وجود دارد. ضمناً، نسبت مقدار مایع A به‌کل حجم ظرف دوم، برابراست با

$$\frac{1}{20}\left[15 - x + \frac{x}{10}(5 + x)\right] \qquad (5)$$

بعد از آن‌که $(x+5)$ لیتر از آمیزهٔ ظرف اول را برداشتیم، در آن $(5-x)$ لیتر باقی می‌ماند که شامل $\frac{x}{10}(5-x)$ لیتر مایع A است. وقتی که دوباره x لیتر از مایع A به‌ظرف اول اضافه کنیم، در آن

$$\left[x+\frac{x}{10}(5-x)\right]$$

لیتر از مایع A وجود خواهد داشت و حجم کل آمیزه برابر ۵ لیتر می‌شود. بنابراین، نسبت مقدار مایع A به کل آمیزه‌ای که در ظرف اول وجود دارد، برابر است با

$$\frac{1}{5}\left[x+\frac{x}{10}(5-x)\right] \qquad (6)$$

که بنا به‌فرض مساله، باید نسبت‌های (۵) و (۶) با هم برابر باشند:

$$\frac{1}{20}\left[15-x+\frac{x}{10}(5+x)\right]=\frac{1}{5}\left[x+\frac{x}{10}(5-x)\right]$$

که بعد از تبدیل‌های لازم، به‌صورت معادلهٔ درجه دوم زیر درمی‌آید:

$$x^2-13x+30=0$$

این معادله، دو ریشه دارد: $x_1=3$ و $x_2=10$.

از ظرف اول، که شامل ۱۰ لیتر از آمیزه بود، $x+5$ لیتر در ظرف دوم ریختیم. بنابراین، باید داشته باشیم: $x+5 \leqslant 10$. به این ترتیب، تنها جواب اول معادلهٔ درجهٔ دوم قابل قبول است.

پاسخ: ۳ لیتر.

۶. معادلهٔ مفروض را، می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2 \qquad (7)$$

از این جا معلوم می‌شود که همهٔ جواب‌های آن، باید در نابرابری $1-2x^2 \geqslant 0$ صدق کنند، یعنی درحوزهٔ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ واقع باشند. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، برای همهٔ این xها، برابری زیر درست است:

$$1+2x\sqrt{1-x^2}=(x+\sqrt{1-x^2})^2$$

بنابراین، معادلهٔ (۷) را، دراین حوزه، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{|x+\sqrt{1-x^2}|}{\sqrt{2}}=1-2x^2 \qquad (8)$$

چون درمجموعهٔ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$، داریم: $1-2x^2\geqslant 0$، پس در این مجموعه خواهیم داشت: $1-x^2\geqslant x^2$ و $\sqrt{1-x^2}\geqslant|x|$. در نتیجه، در این مجموعه، داریم: $x+\sqrt{1-x^2}\geqslant 0$ ومعادلهٔ (۸) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}=1-2x^2 \qquad (9)$$

درمجموعهٔ‌مفروض‌داریم: $1-2x^2=(\sqrt{1-x^2}+x)(\sqrt{1-x^2}-x)$ و، بنابراین، معادلهٔ (۹) چنین می‌شود:

$$(x+\sqrt{1-x^2})\left(\sqrt{1-x^2}-x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

به‌این ترتیب، درمجموعهٔ مورد بحث، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیرهم‌ارز می‌شود:

$$\sqrt{1-x^2}=-x \quad \text{و} \quad \sqrt{1-x^2}=x+\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (10)$$

جواب‌های معادلهٔ اول درحوزهٔ $x\leqslant 0$ قراردارند؛ و در این حوزه هم‌ارز است با معادلهٔ $1-x^2=x^2$، که درحوزهٔ $x\leqslant 0$، تنها یک جواب دارد: $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

همهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم (۱۰)، در حوزهٔ $x\geqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}$ قرار دارند و، دراین حوزه، سرانجام، به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$2x^2+\sqrt{2}x-\frac{1}{2}=0$$

این معادله، درحوزهٔ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x$، تنها یک جواب دارد: $x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

به‌این ترتیب، مجموعهٔ معادله‌های (۱۰)، دارای دوریشه است:

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad (11)$$

به‌سادگی قابل تحقیق است که این هردوریشه، درحوزهٔ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ قراردارند و، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ اصلی هستند.

پاسخ: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=3$، $x=4$؛ ۲. $\log_5 2$؛ ۳. ۶؛

۴. $x=\frac{2k\pi+m\pi+\frac{\pi}{2}}{2}$، $y=\frac{2k\pi-m\pi-\frac{\pi}{2}}{2}$؛ $(k, m \in Z)$؛

۵. ۵ لیتر؛ ۶. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

گروه سوم. ۱. $x=-2$، $x=-1$؛ ۲. ۲۵؛ ۳. ۶؛

۴. $x_1=-\frac{1}{2}k\pi-l\pi-\frac{\pi}{12}$، $y_1=\frac{1}{2}k\pi+l\pi+\frac{7\pi}{12}$ و

$x_2=\frac{1}{2}n\pi-p\pi+\frac{7\pi}{12}$، $y_2=\frac{1}{2}n\pi+p\pi-\frac{\pi}{12}$ $(k, l, n, p \in Z)$؛

۵. ۲ لیتر؛ ۶. $\frac{\sqrt{2}}{4}$، $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$.

گروه چهارم. ۱. $x=-2$، $x=-6$؛ ۲. $\log_7 3$؛ ۳. ۲؛

۴. $x_1=k\pi-l\pi+\frac{\pi}{6}$، $y_1=k\pi+l\pi+\frac{\pi}{3}$ و $x_2=p\pi-m\pi-\frac{\pi}{6}$،

$y_2=p\pi+m\pi+\frac{2\pi}{3}$ $(h, l, p, m \in Z)$؛ ۵. ۴ لیتر؛

۶. $\frac{\sqrt{2}}{4}$، $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$.

§۹. دانشکدهٔ زمین‌شناسی
(بخش زمین‌شناسی عمومی)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ نامعادله می بریم و به‌یك مخرج تبدیل می‌کنیم، به‌این نامعادله می‌رسیم:

$$\frac{11\times 3^{x-1}-31-20\times 9^{x}+55\times 3^{x-1}+25}{4\times 9^{x}-11\times 3^{x-1}-5}\geqslant 0 \qquad (1)$$

که با نامعادلهٔ مفروض هم‌ارزاست. اگر $y=3^{x}$ بگیریم، نامعادلهٔ (۱) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{60y^{2}-66y+18}{12y^{2}-11y-15}\leqslant 0$$

ویا

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{5}\right)}{\left(y+\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)}\leqslant 0 \qquad (2)$$

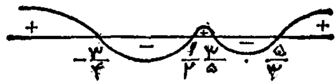
مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲)، عبارت است از اجتماع مجموعهٔجواب‌های معادله و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ زیر:

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{5}\right)}{\left(y+\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{3}{5}\right)}{\left(y+\frac{3}{4}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)}<0$$

معادله، دوجواب دارد: $y_1=\frac{1}{2}$ و $y_2=\frac{3}{5}$، با استفاده از روش فاصله‌ها (شکل ۱۲۶)؛ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اخیر هم به‌دست می‌آید: $-\frac{3}{4}<y<\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5}<y<\frac{5}{3}$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲)

چنین است:

$$-\frac{۳}{۴}<y\leqslant\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۳}{۵}\leqslant y<\frac{۵}{۳}$$



شکل ۱۲۶

به‌این ترتیب، نامعادلهٔ اصلی مساله، هم‌ارز با مجموعهٔ دونامعادلهٔ دو طرفهٔ زیرمی‌شود:

$$-\frac{۳}{۴}<۳^x\leqslant\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۳}{۵}\leqslant ۳^x<\frac{۵}{۳}$$

مجموعهٔ‌جواب‌های نامعادلهٔ‌اول عبارت‌است از $-\infty<x\leqslant \log_۳\frac{۱}{۲}$ ومجموعهٔ جواب‌هـای نامعادلهٔ دوم: $\log_۳\frac{۳}{۵}\leqslant x<\log_۳\frac{۵}{۳}$.

پاسخ: $x\leqslant \log_۳\frac{۱}{۲}$ و $\log_۳\frac{۳}{۵}\leqslant x<\log_۳\frac{۵}{۳}$.

۴۰. سرعت دوندهٔ اول را x کیلومتر درساعت و سرعت دوندهٔ دوم را y کیلومتر درساعت می گیریم. دونـدهٔ اول، هر کیلومتررا در $\frac{۱}{x}$ ودوندهٔ‌دوم،هر کیلومتر را در $\frac{۱}{y}$ ساعت طی می کنند. بنا بر فرض، دوندهٔ دوم، برای‌هر کیلومتر،۲دقیقه کمترصرف می کند؛ بنا براین

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۳۰} \qquad (۳)$$

دونـدهٔ اول تـا لحظهٔ برخـورد دوم، ۲۰ دقیقه در راه بـوده است، یعنی $\frac{۱}{۳}x$ کیلومتر پیموده است. یعنی دوندهٔ دوم تا ایـن لحظـه، $\left(۱۰-\frac{۱}{۳}x\right)$ کیلومترطی کرده است، وچون او ۱۸ دقیقه دویده است، پس

$$۱۰-\frac{۱}{۳}x=\frac{۱۸}{۶۰}y \qquad (۴)$$

از معادلهٔ (۲) داریم:

$$x=۳۰-\frac{۹}{۱۰}y$$

که اگر به‌جای x درمعادلهٔ (۳) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۳۰-\frac{۹}{۱۰}y}-\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۳۰}$$

که دوریشه دارد: $y_۱=۲۰$ و $y_۲=-۵۰$؛ وچون سرعت دونده‌نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین. $y=۲۰$.

پاسخ: سرعت دوندهٔ دوم برابراست با ۲۰ کیلومتر درساعت.

۳. با استفاده از رابطهٔ $sin^۲\alpha=\frac{۱-cos۲\alpha}{۲}$، معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$-cos۳x-cos\left(\frac{\pi}{۲}-۵x\right)=-cos۱۱x-cos\left(\frac{\pi}{۲}-۱۳x\right)$$

ویا

$$cos۱۱x-cos۳x=sin۵x-sin۱۳x$$

وبعد از تبدیل هردوطرف به‌ضرب

$$-۲sin۷xsin۴x=-۲sin۴xcos۹x$$

درنتیجه، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$sin۴x=۰ \quad و \quad sin۷x=cos۹x$$

معادلهٔ اول، یك رشته جواب دارد: $x=\frac{۱}{۴}k\pi$ $(k\in Z)$. معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت:

$$sin۷x-sin\left(\frac{\pi}{۲}-۹x\right)=۰ \implies$$

$$\implies ۲sin\left(۸x-\frac{\pi}{۴}\right)cos\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)=۰$$

و بنابراین، معادلهٔ دوم، هم‌ارز مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر است:

$$\sin\left(۸x-\frac{\pi}{۴}\right)=۰ \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)=۰$$

که جواب معادلهٔ اول به‌صورت رشتهٔ $(n\in Z)x=\frac{۱}{۸}n\pi+\frac{\pi}{۳۲}$ و جواب معادلهٔ دوم به‌صورت رشتهٔ $(m\in Z)x=m\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ درمی‌آید. به‌سادگی دیده می‌شود که جواب‌های به‌صورت $x=m\pi+\frac{۳\pi}{۴}$، جزو همان جواب‌هایی است که قبلا به‌صورت $x=\frac{۱}{۴}k\pi$ به‌دست آورده بودیم.

پاسخ: $x=\frac{۱}{۴}k\pi$، $(k, n\in Z)x=\frac{۱}{۸}n\pi+\frac{\pi}{۳۲}$.

۴. مثلث مفروض و دایره‌ای راکه درآن محاط شده است، در شکل ۱۲۷ می‌بینید. نقطه‌های تماس دایره را، با ضلع‌های AB و AC، به ترتیب، D و F می‌نامیم. چون BE نیمساز زاویهٔ B است، پس $\widehat{OBD}=\frac{\pi}{۴}$ وازمثلث BEC به‌دست می‌آید:

$$\widehat{OEF}=\pi-\widehat{C}-\widehat{OBC}=\frac{۳\pi}{۴}-\widehat{C}$$

ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OBD و OEF داریم:

$$|OD|=|BO|\cdot\sin\frac{\pi}{۴} ,\ |OF|=|OE|\cdot\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}-\widehat{C}\right)$$

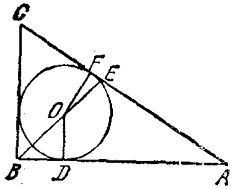
بنابراین

$$|BO|\cdot\sin\frac{\pi}{۴}=|OE|\cdot\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}-\widehat{C}\right).$$

از آن جا

$$\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\cdot\sin\frac{\pi}{۴}=\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}-\widehat{C}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{۳\pi}{۴}-\widehat{C}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

وچون $0<\widehat{C}<\frac{\pi}{2}$، پس یا $\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$ و یا $\frac{3\pi}{4}-\widehat{C}=\frac{2\pi}{3}$. از آن‌جا یا



شکل ۱۲۷

$\widehat{C}=\frac{5\pi}{12}$ یا $\widehat{C}=\frac{\pi}{12}$ به این ترتیب،

دوحالت وجود دارد: یا $\widehat{C}=\frac{5\pi}{12}$ و

$\widehat{A}=\frac{\pi}{22}$، یا $\widehat{C}=\frac{\pi}{12}$ و $\widehat{A}=\frac{\pi}{12}$،

که در واقع، هردوحالت، منجر به یك مثلث می‌شوند.

پاسخ: $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$.

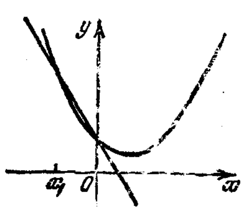
۵۰ a را عددی ثابت ومثبت درنظر می‌گیریم. مساحت $S(a)$ محدود به سهمی

$$y=x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$$

وخط راست

$$y=-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3$$

را پیدا می‌کنیم. مختصات نقطه‌های برخورد سهمی با خط راست، از دستگاه معادله‌های زیر، به‌دست می‌آید:



شکل ۱۲۸

$$\begin{cases} y=x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3 \\ y=-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3 \end{cases}$$

اگرسمت راست این معادله‌ها را برابر قراردهیم، به‌معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2+x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}=0$$

یعنی، خط راست، سهمی را در دو نقطه به طولهای $x_1=-\sqrt[3]{\dfrac{a}{a^2+1}}$ و $x_2=0$ قطع می‌کند و ضمناً: $x_1<x_2$. به‌سادگی دیده می‌شود (شکل ۱۲۸) که شکل مورد نظر، که باید مساحت $S(a)$ از آن را محاسبه کنیم، زیرا خط راست و بالای سهمی در فاصلهٔ از x_1 تا x_2، قرار دارد. بنابراین

$$S(a)=\int_{-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}}^{0}\left[\left(-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3\right)-\right.$$

$$\left.-\left(x^2-2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}+3\right)\right]dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}}^{0}=\frac{a}{6(1+a^2)}$$

برای این‌که، مقدار مثبت a را طوری پیدا کنیم که مساحت شکل، به‌حداکثر مقدار ممکن خود برسد، تابع $S(a)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تابع $S(a)$، درهر نقطه از حوزهٔ $0<a<+\infty$ دارای مشتق است:

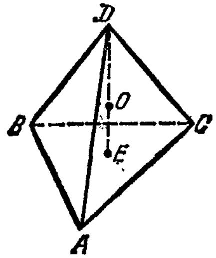
$$S'(a)=\frac{1-a^2}{6(1+a^2)^2} \qquad (5)$$

از (۵) نتیجه می‌شود که مشتق $S'(a)$ درفاصلهٔ $1>a>0$ منفی است. بنابراین، تابع $S(a)$ در فاصلهٔ $1>a>0$ صعودی یکنوا، و در فاصلهٔ $1<a<+\infty$ نزولی یکنوا می‌باشد. علاوه براین، $S(a)$ درنقطهٔ $a=1$ پیوسته است و، درنتیجه، به‌ازای $a=1$، به حداکثر مقدارخود می‌رسد.

پاسخ: $a=1$.

۶. سه راس مثلث قاعدهٔ هرم را A، B و C؛ راس هرم را D و مرکز کرهٔ محیط بر هرم را O می‌گیریم (شکل ۱۲۹). در این صورت داریم: $AB=BC=AC=b$ و $\widehat{ADC}=\alpha$. تصویر قائم مرکز کره بر صفحهٔ

ABC را E می‌نامیم. چون، طول هریك از پاره‌خطهای AO، BO و CO برابر است با شعاع کره، بنابراین، تصویر آن‌ها بر صفحهٔ ABC هم، با یکدیگر برابر می‌شود؛ یعنی $AE=BE=CE$. به‌این ترتیب، نقطهٔ E، مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌شود. بنابر فرض، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین، نقطهٔ E، مرکز این مثلث است. ازمنتظم بودن



شکل ۱۲۹

هرم نتیجه می‌شود که، تصویر قائم نقطهٔ D هم، بر مرکزمثلث، یعنی نقطهٔ E منطبق است. و این، به‌معنای آن است که سه نقطهٔ O، E و D بریك خطراست قرار دارند.

از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و از مثلث متساوی‌الساقین ADC، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$CE=\frac{۲}{۳}\times\frac{b\sqrt{۳}}{۲}=\frac{b\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } CD=\frac{\frac{۱}{۲}AC}{\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{b}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

مثلث DEC قائم‌الزاویه است، بنابراین

$$\sin\widehat{CDE}=\frac{|CE|}{|CD|}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}{\sqrt{۳}}$$

درمثلث‌متساوی‌الساقین DOC، ضلع‌های DO و OC برابرند با شعاع کره، یعنی مقدارمجهول DO چنین است:

$$|DO|=\frac{|CD|}{۲\cos\widehat{CDE}}=\frac{b}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}\sqrt{۱-\frac{۴}{۳}\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}}$$

درشکل ۱۲۹، مرکز کره، در درون هرم نشان داده شده است. به ازای بعضی مقدارهای α، ممکن است این مرکز دربیرون هرم قرار گیرد. راه حلی که ارائه دادیم، هیچ استفاده‌ای ازاین مطلب نمی‌کند که نقطهٔ O، روی پاره‌خط DE قرار گرفته است.

پاسخ: $r=\frac{b}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}\sqrt{۱-\frac{۴}{۳}\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x>\log_{۵}۲$، $\log_{۵}\frac{۲}{۵}<x\leqslant\log_{۵}\frac{۴}{۵}$؛

۲. ۱۰ کیلومتر در ساعت؛ ۳. $\frac{۱}{۶}k\pi+\frac{\pi}{۱۲}$، $\frac{۱}{۲}n\pi+\frac{\pi}{۸}$ $(k,n\in Z)$؛

۴. $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۳}$؛ ۵. $a=\sqrt{۳}$؛

۶. $S=-۴R^{۲}\sin۴\alpha$؛

گروه سوم. ۱. $x<\log_{۲}\frac{۵}{۲}$، $x\geqslant\log_{۲}\frac{۷}{۸}$؛

۲. ۱ ثانیه؛ ۳. $\frac{۱}{۵}k\pi$، $n\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k,n\in Z)$؛

۴. $\frac{\pi}{۱۸}$، $\frac{۷\pi}{۱۸}$؛ ۵. $p=۱$؛

۶. $S=۱۲\sqrt{۳}R^{۲}.\frac{\cos\alpha(۱+\cos\alpha)}{۱+۳\cos^{۲}\alpha}$؛

گروه چهارم. ۱. $x\leqslant\log_{۱۲}\frac{۱}{۲}$، $\log_{۱۲}\frac{۲}{۳}<x<\log_{۱۲}\frac{۳}{۲}$؛

۲. ۲۵ کیلومتر در ساعت؛ ۳. $k\pi$، $\frac{۱}{۹}n\pi+\frac{\pi}{۱۸}$ $(k,n\in Z)$؛

۴. $\frac{\pi}{۱۲}$، $\frac{۷\pi}{۱۲}$؛ ۵. $p=\sqrt{۳}$؛

۶. $V=\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}.\frac{b^{۴}}{r_{۳}}(۴R^{۲}-b^{۲})$؛

۱۹۷۸

۱. حوزهٔ تعریف این معادله، عبارت است از همهٔ مقدارهای x، به‌جز $x=k\pi$ $(k\in Z)$. دراین‌حوزه $\sin x$ مخالف صفراست و، بنابراین، معادلهٔ مفروض‌را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt{۲}\sin^{۲}x+\cos x=۰$$

که با معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف آن، هم‌ارزاست. معادلهٔ اخیر را هم، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\sqrt{۲}\cos^{۲}x-\cos x-\sqrt{۲}=۰ \qquad (۱)$$

این معادله، نسبت به $\cos x$، ازدرجه دوم است‌و دوجواب دارد: $\cos x=\sqrt{۲}$ و $\cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. بنابراین، معادلهٔ (۱)، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\cos x=\sqrt{۲} \text{ و } \cos x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

معادلهٔ اول جواب ندارد ومعادلهٔ دوم این مجموعه، به جواب $x=۲n\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ $(n\in Z)$ منجرمی‌شود، که‌همهٔ آن‌ها درحوزهٔ تعریف معادلهٔ مفروض مساله، واقع‌اند.

پاسخ: $x=۲n\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ $(n\in Z)$.

۲. فرض می کنیم، دوچرخه سوار واتومبیل، برای‌رفتن ازمرکز A به‌مرکز B، به‌ترتیب، به x دقیقه و y دقیقه وقت نیاز داشته باشند. برای نصف فاصلهٔ از A تا B، دوچرخه‌سوار به $\frac{x}{۲}$ دقیقه واتومبیل به $\frac{y}{۲}$ دقیقه‌وقت احتیاج دارند، با وجودی که اتومبیل ۱۵ دقیقه دیرترحرکت کرده است، بنابرفرض، در وسط راه از A تا B، به دوچرخه‌سوار رسیده است. بنابراین، داریم:

$$\frac{y}{۲}+۱۵=\frac{x}{۲} \qquad (۲)$$

وقتی که اتومبیل به B رسید، دوچرخه‌سوار، که به‌اندازهٔ $(y+۱۵)$

دقیقه رکاب زده است، $\frac{۲}{۳}$ مسیر را پیموده است، یعنی $\frac{۲}{۳}x$ دقیقه‌صرف کرده است، بنابراین

$$y+۱۵=\frac{۲}{۳}x \qquad (۳)$$

از دستگاه شامل معادله‌های (۲) و (۳)، مقدارهای x و y به دست می‌آید.

پاسخ: ۴۵ رقیقه.

۰۳ راه حل اول. تابع $y(x)=x\ln x-x\ln ۵$، درحوزهٔ $x>۰$ معین است ودراین حوزه، همه‌جا دارای مشتق است. داریم:

$$y'(x)=(x\ln x-x\ln ۵)'=\ln x+۱-\ln ۵=\ln\frac{xe}{۵}$$

مشتق، تنها درنقطهٔ $x_۰=\frac{۵}{e}$ برابرصفرمی‌شود. چون $۵>e>۱$، پس این نقطه در درون بازهٔ [۱، ۵] واقع است. برای پیداکردن‌حداقل مقدارتابع، کافی است، مقدارهای $y(۱)$، $y(۵)$ و $y\left(\frac{۵}{e}\right)$ را محاسبه، و ازبین آن‌ها، کمترین مقدار را انتخاب‌کنیم. داریم:

$$y(۱)=-\ln ۵ \ ، \ y(۵)=۰ \ ، \ y\left(\frac{۵}{e}\right)=\frac{۵}{e}\ln\frac{۵}{e}-\frac{۵}{e}\ln ۵=-\frac{۵}{e}$$

ثابت می کنیم که

$$\frac{۵}{e}>\ln ۵ \qquad (۴)$$

چون $e<۳$، پس $\frac{۵}{e}>\frac{۵}{۳}$، یعنی، برای‌اثبات‌نابرابری (۴)، کافی است‌درستی نابرابری $\ln ۵<\frac{۵}{۳}$ را ثابت کنیم. نابرابری اخیر را می‌توان به صورت $\ln ۵^۳<\ln e^۵$ نوشت. بنابراین، برای‌اثبات نابرابری (۴) کافی است‌ثابت کنیم. $۵^۳<e^۵$. چون $e>۲/۷$، بنابراین

$$e^۵>۲/۷^۲\times ۲/۷^۲\times ۲/۷=۷/۲۹\times ۷/۲۹\times ۲/۷>۵۰\times ۲/۷=$$
$$=۱۳۵>۵^۳$$

به‌این ترتیب، نابرابری (۴) ثابت‌شد؛یعنی $0 > -\ln 5 > -\frac{5}{e}$، و، بنابراین

کمترین مقدارتابع، دربازهٔ [۱، ۵]، برابر است با $-\frac{5}{e}$.

راه حل دوم. تابع $y(x)$، درحوزهٔ $0 < x < +\infty$ معین ودارای مشتق است:

$$y'(x) = \ln x + 1 - \ln 5 = \ln\frac{xe}{5}$$

مشتق، درنقطهٔ $x_0 = \frac{5}{c}$ برابرصفرمی‌شود، دربازهٔ $0 < x < \frac{5}{x}$ منفی و در بازهٔ $\frac{5}{e} < x < +\infty$ مثبت است. بنابراین، $y(x)$ دربازهٔ $\left(0، \frac{5}{e}\right)$ نزولی و در بازهٔ $\left(\frac{5}{e}، \infty\right)$ صعودی است. چون تابع درنقطهٔ $x = \frac{5}{e}$ پیوسته‌است، نتیجه‌می‌شود که‌درهمهٔ‌نقطه‌های $0 < x < +\infty$، غیراز $x = \frac{5}{e}$، مقداری بیشتراز $y\left(\frac{5}{e}\right)$ اختیارمی کند.

چون $1 < e < 5$، بنابراین $x = \frac{5}{e}$ دربازهٔ[۱،۵]قراردارد‌و،بنابراین، حداقل مقدارتابع دراین بازه، برابر $y\left(\frac{5}{e}\right)$ می‌شود:

$$y\left(\frac{5}{e}\right) = -\frac{5}{e}.$$

پاسخ: $y_{Min} = -\frac{5}{e}$.

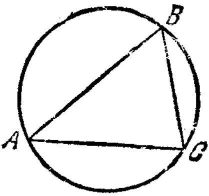
۴۰. بنابرقضیهٔ سینوس‌ها داریم: $|BC| = 2R\sin\widehat{ABC} = 2$ (R شعاع دایرهٔ محیطی است ــ شکل ۱۳۰). چون AB وتراست، بنابراین، طول آن ازطول قطردایره‌تجاوز نمی‌کند،یعنی $|AB| \leqslant 2R = 4$. ثابت‌می‌کنیم $|AB| < 4$.

اگرداشته باشیم: $|AB| = 4$، آن‌وقت خواهیم داشت: $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ و در

نتیجه $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$، ولی این برابری نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا $4^2 \neq 3^2+2^2$. یعنی $|AB|<4$. دراین‌صورت:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{ABC}<\frac{1}{2}\times 4\times 3\times\frac{1}{2}=3$$

وحکم مورد نظر ثابت شد.



شکل ۱۳۰

۵. بین‌مقدارهای $|a|>2$، حتی یك‌مقدار a وجود ندارد که با شرط‌های مساله سازگار باشد، زیرا، به ازای چنین مقدارهایی از a، معادلهٔ $x^2+a^2=4$ جواب ندارد. به ازای $a=2$ و $a=-2$، معادلهٔ $x^2+a^2=4$، دارای‌جواب منحصر $x=0$ است که‌در نامعادله‌صدق‌نمی‌کند. به‌این‌ترتیب، اگر مقداری برای a وجود داشته باشد که با شرط‌های مساله بسازد، باید داشته باشیم: $|a|<2$. برای چنین مقدارهایی از a، معادلهٔ $x^2+a^2=4$، دو جواب دارد:

$$x_1=-\sqrt{4-a^2} \text{ و } x_2=\sqrt{4-a^2}$$

حالا، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم

$$Q(x)=x^2+(5a+2)x+4a^2+2a$$

را درنظرمی‌گیریم. مبیّن این سه جمله‌ای، برابر است با $\Delta=(3a+2)^2$.

در حالت $a=-\frac{2}{3}$، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $Q(x)$ نمی‌تواند به‌ازای هیچ مقداری از x، منفی شود. یعنی $a=-\frac{2}{3}$ با شرط‌های مساله سازگار نیست.

در حالت $a\neq\frac{2}{3}$، مبیّن سه‌جمله‌ای مثبت می‌شود و سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم دو ریشهٔ مختلف پیدا می‌کند. به این ترتیب، درحالت $a\neq-\frac{2}{3}$، وقتی $Q(x)$ منفی می‌شود که x بین ریشه‌های آن واقع باشد.

بنابراین، اگرعدد a با شرط‌های مساله سازگارباشد، به‌این معناست که اولاً $|a|<2$ و $a\neq-\frac{2}{3}$ وثانیاً دست‌کم یکی از عددهای x_1 و x_2

بین ریشه‌های سه‌جمله‌ای $Q(x)$ قرارمی گیرد. ریشه‌های سه‌جمله‌ای $Q(x)$ را می‌توان این‌طورنوشت:

$$x_3=\frac{-(5a+2)-|3a+2|}{2},\ x_4=\frac{-(5a+2)+|3a+2|}{2}$$

که دراین‌صورت، روشن است $x_1<x_2$.

اکنون،مساله‌را می‌توان‌به‌این‌ترتیب تنظیم کرد: به‌ازای چه‌مقدارهایی از پارامتر aـ که درشرط‌های $|a|<2$ و $a\neq-\frac{2}{3}$ صدق‌می کنندـ دست‌کم یکی‌ازعددهای x_1 و x_2، بین عددهای x_3 و x_4قرارمی گیرد. روشن‌است که این‌مقدارهای پارامترa، ازاجتماع مجموعهٔ جواب‌های دو دستگاه زیر، درحوزهٔ $|a|<2$ و $a=-\frac{2}{3}$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\dfrac{-(5a+2)-|3a+2|}{2}<-\sqrt{4-a^2}\\[2mm] -\sqrt{4-a^2}<\dfrac{-(5a+2)+|3a+2|}{2},\end{cases}\qquad(5)$$

$$\begin{cases}\dfrac{-(5a+2)-|3a+2|}{2}<\sqrt{4-a^2}\\[2mm] \sqrt{4-a^2}<\dfrac{-(5a+2)+|3a+2|}{2}\end{cases}\qquad(6)$$

دستگاه‌های(5)و(6) را، به‌طورجداگانه،درحوزهٔ$|a|<2$ و $a\neq-\frac{2}{3}$،حل می‌کنیم.

دستگاه (5) را، درمجموعهٔ $-2<a<-\frac{2}{3}$، می‌توان‌چنین نوشت:

$$\begin{cases}-a<-\sqrt{4-a^2}\\ -\sqrt{4-a^2}<-4a-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{4-a^2}<a\\ 4a+2<\sqrt{4-a^2}\end{cases}$$

روشن است که این دستگاه، درمجموعهٔ $-2<a<-\frac{2}{3}$،جواب ندارد، زیرا دراین مجموعه، سمت چپ نامعادلهٔ اول غیرمنفی وسمت راست آن مقداری منفی است.

درمجموعهٔ $-\frac{2}{3}<a<2$، دستگاه (۵)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases}-4a-2<-\sqrt{4-a^2}\\ -\sqrt{4-a^2}<-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{4-a^2}<4a+2\\ a<\sqrt{4-a^2}\end{cases}\qquad(7)$$

نا معادلهٔ اول دستگاه (۷)، درمجموعهٔ $-\frac{2}{3}<a<-\frac{1}{2}$ جواب ندارد ودر مجموعهٔ $-\frac{1}{2}<a<2$، دوطرف نامعادلهٔ اول دستگاه (۷) مثبت می‌شودو، بنابراین، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارزاست:

$$4-a^2<16a^2+16a+4\Rightarrow 17a^2+16a>0$$

نامعادلهٔ اخیر، دوجواب دارد: $a>0$ و $a<-\frac{16}{17}$، یعنی‌مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول دستگاه (۷) چنین است:

$$-\frac{1}{2}<a<-\frac{16}{17}\ \text{و}\ 0<a<2\qquad(8)$$

معادلهٔ دوم دستگاه (۷)، به ازای همهٔ مقدارهای a از حوزهٔ $-\frac{2}{3}<a<-\frac{16}{17}$ برقرار است، زیرادراین حوزه، سمت‌چپ آن‌غیرمثبت وسمت‌راست آن‌مثبت‌می‌شود.درحوزهٔ $0\leqslant a<2$،دوطرف‌نامعادلهٔ‌دوم‌دستگاه (۷) مثبت می‌شود و، بنابراین، با نامعادلهٔ $a^2<4-a^2$ یا $a^2<2$ هم‌ارز است،که مجموعهٔ جواب‌های آن، در حوزهٔ $0\leqslant a<2$، عبارت است از $0\leqslant a<\sqrt{2}$. به‌این ترتیب، مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم دستگاه (۷)، چنین است:

$$-\frac{2}{3}<a<\sqrt{2}\qquad(9)$$

از (۸) و (۹) نتیجه می‌شودکه همهٔ جواب‌های دستگاه (۵)، در بازهٔ $|a|<2$ و $a\neq-\frac{2}{3}$، از دوبازهٔ زیرتشکیل شده است:

$$-\frac{1}{2}<a<-\frac{16}{17}\ \text{و}\ 0<a<\sqrt{2}\qquad(10)$$

اکنون، دستگاه (۶) را حل می‌کنیم. این دستگاه را، در مجموعهٔ

$-2<a<-\frac{2}{3}$، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} -a<\sqrt{4-a^2} \\ \sqrt{4-a^2}<-4a-2 \end{cases}$$

دوطرف هردونامعادلهٔ این دستگاه، دربازهٔ $-2<a<-\frac{2}{3}$، مثبت‌اند و، بنابراین، هم‌ارز دستگاه زیراست:

$$\begin{cases} a^2<4-a^2 \\ 4-a^2<16a^2+16a+4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2<2 \\ 17a^2+16a>0 \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های دستگاه اخیر، از دوبازه تشکیل شده است: $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17}$ و $0<a<\sqrt{2}$؛ که با توجه به حوزهٔ $-2<a<-\frac{2}{3}$، همان جواب $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{7}$ قابل قبول است.

درمجموعهٔ $-\frac{2}{3}<a<2$، دستگاه (۵) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} -4a-2<\sqrt{4-a^2} \\ \sqrt{4-a^2}<-a \end{cases} \qquad (11)$$

معادلهٔ دوم دستگاه (۱۱)، درمجموعهٔ $0\leqslant a<2$ جواب ندارد. همین‌معادلهٔ دوم دستگاه (۱۱)، درمجموعهٔ $-\frac{2}{3}<a<0$، به‌صورت $a^2>2$ درمی‌آید که دراین مجموعه جواب ندارد.

به‌این ترتیب، دستگاه (۶)، درمجموعهٔ $-\frac{2}{3}<a<2$ جوابی ندارد و همهٔ جواب‌های آن درحوزهٔ $|a|<2$ و $a\neq=-\frac{2}{3}$ چنین است:

$$-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17} \qquad (12)$$

ازاجتماع مجموعه‌های (۱۰) و (۱۲)، مجموعهٔ مقدارهای مطلوب پارامتر a، حاصل می‌شود.

پاسخ: $-\frac{16}{7}<a<-\sqrt{2}$ و $0<a<\sqrt{2}$

۶. ابتدا $x>1$ می‌گیریم. دراین‌صورت، نامعادلهٔ مفروض را می‌توان‌این‌طور نوشت:

$$\frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>1 \Rightarrow \frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}-1>0 \Rightarrow \frac{7x-\frac{23}{5}}{5(1-x)}>0$$

جواب‌های نامعادلهٔ اخیر، به‌صورت $\frac{23}{35}<x<1$ درمی‌آید و این‌بازه با بازهٔ $x>1$، فصل مشترکی ندارد. یعنی، معادلهٔ مفروض، به‌ازای $x>1$، جواب ندارد.

اکنون فرض می‌کنیم: $0<x<1$. دراین حالت، نامعادلهٔ مفروض چنین می‌شود:

$$0<\frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}<1$$

که آن را می‌توان به‌صورت دستگاه نامعادله‌های زیرنوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0 \\[2ex] \dfrac{7x-\frac{23}{5}}{5(1-x)}<0 \end{cases}$$

که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول آن $-\frac{1}{5}<x<1$ ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم آن $x>1$ و $x<\frac{23}{35}$ می‌باشد: یعنی،مجموعهٔجواب‌های دستگاه، عبارت است از $-\frac{1}{5}<x<\frac{23}{35}$. فصل مشترك این مجموعه، با مجموعهٔ $0<x<1$، به‌صورت مجموعهٔ $0<x<\frac{23}{35}$ درمی‌آید که‌جواب-

های نامعادلهٔ مفروض مسأله را، به‌ما می‌دهد.

پاسخ: $0<x<\frac{23}{35}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $m\pi+(-1)^m\cdot\frac{\pi}{4}\,(m\in Z)$؛ ۲. ۲ ساعت؛

۳. $-\frac{2}{e}$؛ ۵. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<a<-1$، $\frac{1+\sqrt{3}}{2}<a<1$؛

۶. $\frac{2}{7}<x<+\infty$.

گروه سوم. ۱. $n\pi+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}\,(n\in Z)$؛ ۲. ۱۶ ساعت؛

۳. $-\frac{1}{e}$؛ ۵. $-2<a<0$؛ ۶. $0<x<\frac{2}{7}$.

گروه چهارم. ۱. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\,(n\in Z)$؛ ۲. ۲۵ ساعت؛ ۳. $-\frac{14}{e}$؛

۵. $-\frac{1}{2}<a<1$؛ ۶. $x>4/5$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. روشن است که ریشه‌های معادله، باید با شرط $3-2x\geqslant 0$ یا $x\leqslant\frac{3}{2}$ سازگار باشند. ولی، با توجه به‌این شرط، معادلهٔ مفروض، به‌صورت $3-2x=3-2x$ درمی‌آید که یك اتحاد و به‌ازای همهٔ مقدارهای x، برقراراست. بنابراین، همهٔ عددهایی که در بازهٔ $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ باشند، جواب‌های معادله‌اند.

پاسخ: $-\infty<x\leqslant\frac{3}{2}$.

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x، در این معادله، از شرط‌های $1-x>0$ و $x>0$ به‌دست می‌آید، یعنی حوزهٔ تعریف معادله، عبارت است از

$1 < x < +\infty$. معادلهٔ مفروض، در این حوزه، به معادلهٔ $x^2 - x = 2$ تبدیل می‌شود، که دو ریشه دارد: $x_1 = 2$ و $x_2 = -1$. از این ریشه‌ها، تنها x_1 درحوزهٔ تعریف معادله قرار می گیرد.

پاسخ: $x = 2$.

۳. اگرفرض کنیم $cotg\,x = z$، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \sqrt{2}y + \sqrt{12}z = 4 \\ 2\sqrt{2}y - \sqrt{27}z = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

دستگاه (۱)، یك جواب منحصردارد: $y = \sqrt{2}$، $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$؛ و جواب‌های معادلهٔ $cotg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ عبارت است‌از: $x = k\pi + \frac{\pi}{3}\,(k \in Z)$.

پاسخ: (x, y)، که در آن $x = k\pi + \frac{\pi}{3}\,(k \in Z)$ و $y = \sqrt{2}$.

۴. فرض می کنیم، ماشین خاك‌برداری بتواند درهرساعت، خندقی به‌طول xمتر را آماده کند. دراین صورت، برای کندن خندق اول به $\frac{5}{x}$ ساعت و برای کندن خندق دوم به $\frac{3}{x}$ ساعت نیاز دارد. اگرقدرت کارماشین را به $\frac{1}{4}$ آن تقلیل دهیم، آن‌وقت، خندق اول را در $\frac{20}{x}$ساعت آماده می کند، واین، برای زمانی است که برای انتقال ماشین از خندق اول به خندق دوم لازم است. بنا براین، با توجه به‌فرض مساله به‌این معادله می‌رسیم:

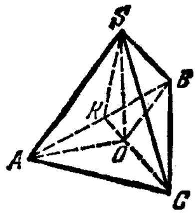
$$\frac{5}{x} = \frac{20}{x} + \frac{3}{x} - \frac{6}{5}$$

که باحل آن، به‌دست می آید: $x = 15$. یعنی، ماشین خاك‌برداری، می‌تواند درهرساعت ۱۵ مترخندق را آماده کند.

پاسخ: ۱۵متر.

۵. چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع وطول ضلع آن برابر$\sqrt{3}$ است،بنا براین، مساحت آن برابراست با

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



شکل ۱۳۱

از نقطهٔ O، عمودی برضلع AB از قاعدهٔ هرم، فرود می‌آوریم (شکل ۱۳۱). دراین صورت

$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}|AB|\cdot|OK|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}|OK|$$

نقطهٔ O، به‌فاصلهٔ ۱، ازضلع AC قراردارد، یعنی

$$S_{AOC}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳}\times ۱=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

چون نقطهٔ O در درون مثلث ABC قرار گرفته است، پس

$$S_{BOC}=S_{ABC}-S_{AOC}-S_{AOB}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}|OK|$$

با توجه به‌فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{\frac{۱}{۲}|AB|\cdot \sin\widehat{OBA}}{\frac{۱}{۲}|BC|\cdot \sin\widehat{OBC}}=\frac{\sin\widehat{OBA}}{\sin\widehat{OBC}}=\frac{۲}{۱}=۲$$

وازاین‌جا، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$\frac{|OK|}{\frac{۱}{۲}-|OK|}=۲$$

که با حل آن به‌دست می‌آید: $|KO|=\frac{۱}{۳}$. بنابـر قضیهٔ سه عمود، داریم: $SK\perp AB$، یعنی

$$\sqrt{\frac{۵}{۶}}=S_{ABS}=\frac{۱}{۲}|AB|\cdot|SK|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}|SK|$$

بنابراین: $|SK|=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$. بنابرقضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$|SO|=\sqrt{|SK|^۲-|OK|^۲}=\sqrt{\frac{۱۰}{۹}-\frac{۱}{۹}}=۱$$

وسرانجام

$$V=\frac{۱}{۳}S_{ABC}\cdot|SO|=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}\cdot ۱=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

پاسخ: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$.

۶. ابتدا یادآوری می‌کنیم که ضریب‌های این معادله، با شرط $cos\alpha\neq ۰$ و $sin\alpha>۰$ معین‌اند. با این شرط، تنها وقتی، معادلهٔ درجه دوم مفروض، دارای یك جواب منحصر به‌فرد است که مبین آن

$$\Delta=\frac{۳۶}{sin\alpha}-\frac{۳۶\sqrt{۳}}{cos\alpha}-۴\times ۳۶$$

برابر صفر باشد.

به‌این ترتیب، مقدارهای موردنظر α را باید با توجه به‌این شرط‌ها پیدا کرد:

$$\begin{cases}\dfrac{۱}{sin\alpha}-\dfrac{\sqrt{۳}}{cos\alpha}-۴=۰\\ sin\alpha>۰\\ cos\alpha\neq ۰\end{cases}\qquad (۲)$$

معادلهٔ این دستگاه، در حوزهٔ $sin\alpha>۰$ و $cos\alpha\neq ۰$، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$cos\alpha-\sqrt{۳}sin\alpha-۴\,sin\alpha cos\alpha=۰$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$sin\left(\frac{\pi}{۶}-\alpha\right)-sin۲\alpha=۰\implies ۲sin\left(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{۳\alpha}{۲}\right)\times$$

$$\times cos\left(\frac{\pi}{۱۲}+\frac{\alpha}{۲}\right)=۰$$

معادلهٔ اخیر، دو رشته جواب دارد:

$$\alpha=\frac{۲}{۳}k\pi+\frac{\pi}{۱۸}\ \text{و}\ \alpha=۲n\pi+\frac{۵\pi}{۶}\qquad (k\text{،}\ n\in Z)$$

اکنون، از میان این عددها ، باید آن‌هایی را انتخاب کرد که با شرط‌های $sin\alpha > ۰$ و $cos\alpha \neq ۰$ سازگار باشند. به‌روشنی دیده می‌شود که همهٔ این عددها، با شرط $cos\alpha \neq ۰$ می‌سازند. ازطرف دیگر، برای هر $n \in Z$،داریم:

$$sin\left(۲n\pi + \frac{۵\pi}{۶}\right) = sin\frac{۵\pi}{۶} > ۰$$

پس، عددهای $x = ۲n\pi + \frac{۵\pi}{۶}$، با شرط‌های (۲) سازگارند. رشتهٔ اول جواب‌ها را به سه بخش تقسیم می کنیم: $k = ۳m$، $k = ۳m + ۱$ و $k = ۳m + ۲$؛ که به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\alpha = ۲m\pi + \frac{\pi}{۱۸} , \alpha = ۲m\pi + \frac{۱۳\pi}{۱۸} , \alpha = ۲m\pi + \frac{۲۵\pi}{۱۸} \quad (m \in Z)$$

که به‌ازای هر $m \in Z$ داریم:

$$sin\left(۲m\pi + \frac{\pi}{۱۸}\right) = sin\frac{\pi}{۱۸} > ۰$$

$$sin\left(۲m\pi + \frac{۱۳\pi}{۱۸}\right) = sin\frac{۱۳\pi}{۱۸} > ۰$$

$$sin\left(۲m\pi + \frac{۲۵\pi}{۱۸}\right) = sin\left(\frac{۷\pi}{۱۸} + \pi\right) < ۰$$

بنابراین، دو جواب اول با شرط‌های (۲) سازگار و جواب سوم با آن‌ها ناسازگار است.

پاسخ: $\alpha = ۲n\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ،$\alpha = ۲m\pi + \frac{\pi}{۱۸}$ ،$\alpha = ۲k\pi + \frac{۱۳\pi}{۱۸}$
$(n , m , k \in Z)$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x \leqslant \frac{۴}{۵}$؛ ۲. $x = ۱$؛ ۳. (x , y)، که درآن $x = n\pi + (-۱)^n . \frac{\pi}{۶}$ $(n \in Z)$ و $y = \frac{۹}{۲}$؛ ۴. ۱۵۰ متر؛ ۵. $\frac{۳}{۲}$؛ ۶. $۲n\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ ،$۲k\pi + \frac{\pi}{۱۲}$ $(n , k \in Z)$.

گروه سوم. ۱. $x \leqslant \frac{۵}{۳}$؛ ۲. $x = ۱$؛ ۳. $(x ، y)$، که در آن $x = n\pi - \frac{\pi}{۴}$ و $y = ۲$؛ ۴. ۳ کیلومتر درساعت؛ ۵. $\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}$؛

۶. $۲k\pi + \frac{\pi}{۹}$، $۲m\pi + \frac{۷\pi}{۹}$، $۲l\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ $(k ، m ، l \in Z)$.

گروه چهارم. ۱. $x \leqslant \frac{۷}{۴}$؛ ۲. $x = ۵$؛ ۳. $(x ، y)$، که در آن $x = ۲n\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$ $(n \in Z)$ و $y = \frac{۱}{۴}$؛ ۴. ۹۰۰ کیلومتر درساعت؛

۵. ۲؛ ۶. $۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}$ $(k \in Z)$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۲\sin x \cos x = ۲\sqrt{۳}\cos^۲ x \implies \cos x(\sin x - \sqrt{۳}\cos x) = ۰$$

بنابراین، معادله مفروض، هم‌ارز با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیراست:

$$\cos x = ۰ \quad و \quad \sin x - \sqrt{۳}\cos x = ۰$$

معادلهٔ اول، به‌جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ $(k \in Z)$، می‌رسد و معادلهٔ دوم، که در آن $\cos x \neq ۰$ است، هم‌ارز است با معادلهٔ

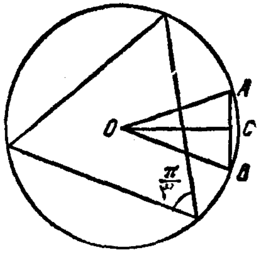
$$tg x = \sqrt{۳}$$

و بنابراین، جواب آن عبارت است از $x = l\pi + \frac{\pi}{۳}$ $(l \in Z)$.

پاسخ: $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $l\pi + \frac{\pi}{۳}$ $(k ، l \in Z)$.

۲. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را با O ووتر به‌طول ۲ سانتیمتر را با AB نشان

می‌دهیم (شکل ۱۳۲). از نقطهٔ O، عمود OC را بر وتر AB رسم می‌کنیم. داریم: $|OC| = ۳$. چون در مثلث متساوی‌الساقین AOB، ارتفاع OC برمیانهٔ مثلث منطبق است، پس:



شکل ۱۳۲

$$|AC| = \frac{۱}{۲}|AB| = ۱$$

بنابر قضیهٔ فیثاغورث، به‌دست‌می‌آید.

$$|OA| = \sqrt{|OC|^۲ + |AC|^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$$

می‌دانیم که طول ضلع مثلث محاط در دایرهٔ به‌شعاع $|OA|$، برابر است با $|OA|۲\sin\frac{\pi}{۳}$، یعنی $\sqrt{۳۰}$. بنابراین، محیط این مثلث، برابراست با $۳\sqrt{۳۰}$.

۳. چون $۲\log_۴ x = \log_۲ x$ و $\log_۲ x + \log_۲ y = \log_۲(xy)$، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ مفروض، بین جواب‌های دستگاه زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۳۲ \\ xy = ۱۶ \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر معادلهٔ دوم را دوبرابر و، سپس، از معادلهٔ اول کم کنیم، به‌معادلهٔ $(x-y)^۲ = ۰$ ویا $x = y$ می‌رسیم. اگر درمعادلهٔ دوم، x را به‌جای y قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $x^۲ = ۱۶$. دیگر به‌سادگی دوجواب دستگاه (۱) به دست‌می‌آید: $x_۱ = ۴$، $y_۱ = ۴$ و $x_۲ = -۴$ و $y_۲ = -۴$. آزمایش نشان می‌دهد که $x_۱ = ۴$ ، $y_۱ = ۴$ در دستگاه مفروض مساله صدق می‌کند، در حالی که $x_۲ = -۴$ ، $y_۲ = -۴$ درآن صدق نمی‌کند.

پاسخ: $x = ۴$ ، $y = ۴$.

۴. تعداد روزهایی راکه، ضمن آن‌ها، فروشنده توانسته است برنامهٔ فروش ماهانهٔ خود را به‌پایان برساند، n می‌گیریم. بنابرفرض، تعداد تلویزیون‌هایی که دراین n روز به فروش رفته است، که تصاعد حسابی، با جملهٔ اول ۱۰۵ وقدرنسبت ۱۰ تشکیل می‌دهند. بنابراین، با استفاده از رابطهٔ مربوط به مجموع n جملهٔ اول تصاعد حسابی، می‌توان مقدار n را ازمعادلهٔ زیر محاسبه کرد:

$$\frac{۲\times ۱۰۵+۱۰(n-۱)}{۲}.n=۴۰۰۰$$

که بعد ازساده کردن، به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$n^۲+۲۰n-۸۰۰=۰$$

این معادله، تنها یك جواب مثبت‌دارد: $x=۲۰$. به‌این‌ترتیب، در ۲۰ — ۲۶، یعنی ۶روزآخر، فروش بیش‌ازبرنامه، انجام‌گرفته است. این مغازه، در روز پایان فروش برنامهٔ ماهانهٔ خود، به‌تعداد

$$۱۰۵+۱۰(۲۰-۱)=۲۹۵$$

تلویزیون فروخته‌است. بنابرفرض، در روزهای بعد، هر روز ۱۳ — ۲۹۵، یعنی۲۸۲ تلویزیون‌و، بنابراین،در۶ روز، ۶ × ۲۸۲، یعنی ۱۶۹۲تلویزیون فروخته است. درصد فروش بیش ازبرنامهٔ اصلی این مغازه، عبارت است از $\frac{۱۶۹۲}{۴۰۰۰}$، یعنی ۴۲/۳٪ بیشتراز برنامه.

پاسخ: برنامهٔ ماهانه ۴۲/۳ درصد بیشترانجام شده است.

۵. $x-y$ را a و $y-۱$ را b می‌نامیم. آن‌وقت، معادلهٔ اول دستگاه فرض‌را، می‌توان چنین نوشت:

$$\big||a|-|b|\big|=a+b \qquad (۲)$$

همهٔ زوج عددهای a و b را کــه دراین برابری صدق می‌کنند، پیدا کنید. دوحالت پیش‌می‌آید.

۱) فرض می‌کنیم $a\geqslant ۰$. دراین حالت، برابری (۲) چنین می‌شود:

$$\big|a-|b|\big|=a+b \qquad (۳)$$

اگر $b<۰$ باشد، برابری (۳) به صورت $|a-b|=a+b$ درمی‌آید و روشن است که نمی تواند برقرار باشد. بنابراین $b\geqslant ۰$، و برابری (۳) چنین می‌شود:

$$|a+b|=a+b$$

از این‌جا معلوم می‌شود که $a+b\geqslant ۰$. بــه این ترتیب، همهٔ زوج عددهای (a ,b)، که با برابری (۲) وشرط $a\geqslant ۰$ سازگارباشند، در حوزه‌ای قرار دارند که به وسیلهٔ دستگاه نابرابری‌های زیرمعین می‌شود:

$$\begin{cases} a \geqslant ۰ \\ b \leqslant ۰ \\ a+b \geqslant ۰ \end{cases} \qquad (۴)$$

به‌سادگی می‌توان روشن کرد که، برعکس، هر زوج عددی کـه در دستگاه (۴) صدق کند، در برابری (۲) هم‌صدق می‌کند.

۲) اکنون، زوج عددهای $(a ، b)$ را طوری پیدا کنیم که دربرابری (۲) وشرط $a \leqslant ۰$ صدق کنند. اگرداشته باشیم $b < ۰$، سمت راست‌برابری (۲) منفی می‌شود که ممکن نیست. بنابر این داریم $b \geqslant ۰$، و برابری (۲) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$|-a-b| = a+b \cdot$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود: $a+b \geqslant ۰$. بنابراین، همهٔ زوج عددهای $(a ،b)$، که با برابری (۲) وشرط $a \leqslant ۰$ سازگارباشند، درحوزه‌ای قرار دارندکه به‌وسیلهٔ دستگاه نابرابری‌های زیرمعین می‌شود:

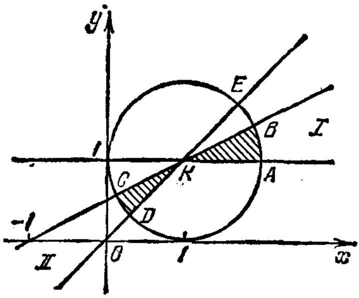
$$\begin{cases} a \leqslant ۰ \\ b \geqslant ۰ \\ a+b \geqslant ۰ \end{cases}$$

وبه سادگی‌قابل تحقیق است که هر زوج عدد $(a،b)$ که دراین نابرابری‌ها صدق کند، دربرابری (۲) هم صدق می‌کند.

به این ترتیب، زوج عددهای $(x،y)$، کـه در برابری فـرض صدق می‌کنند، تنها آن‌هایی هستند که در یکی ازدو دستگاه نامعادله‌های زیرصدق کنند:

$$\begin{cases} x-y \leqslant ۰ \\ ۱-y \geqslant ۰ \\ x-۲y+۱ \geqslant ۰ \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x-y \geqslant ۰ \\ ۱-y \leqslant ۰ \\ x-۲y+۱ \geqslant ۰ \end{cases}$$

روی صفحـهٔ محـورهـای مختصات (شـکـل ۱۳۳) ، خـطـهای راست $۱-y=۰$ ، $x-y=۰$ و $x-۲y+۱=۰$ را رسم می‌کنیم. آن‌ها درنقطهٔ $K(۱ ، ۱)$ به‌هم‌می‌رسند. در این‌صورت ، نقطه‌هایی از صفحهٔ



شکل ۱۳۳

مختصات که متناظر با دستگاه اول نامعادله‌ها باشند، درداخل و روی ضلع‌های زاویه‌ای قرار گرفته‌اند که‌در شکل ۱۳۳ باعددI نشان‌داده‌شده است. همچنین ، نقطه‌های متناظر با دستگاه دوم نامعادله‌ها، متناظراست‌بانقطه‌های واقع در داخل ویا روی ضلع‌های زاویهٔ II، نقطه‌های متناظر با نامعادلهٔ فرض‌مسأله، عبارتنداز نقطه‌های داخلی و روی محیط دایره‌ای به‌شعاع ۱ ومرکز $K(1,1)$. بنابراین، شکلی که باید مساحت آن را پیدا کنیم، ازدوقطاع AKB وCKD تشکیل شده است (روی شکل ۱۳۳، این‌دوقطاع را هاشور زده‌ایم). ازتقارن روشن‌است که مساحت قطاع CDK، برابراست با مساحت قطاع EKB و، به‌این ترتیب، مساحت مطلوب برابراست با مساحت قطاع EKA. قطاع EKA را خطهای راست $x-y=0$ و $y-1=0$ تشکیل داده‌اند. این دوخط‌راست ازمرکزدایره می‌گذرند و زاویه‌ای برابر۴۵ درجه، یعنی $\frac{360}{8}$ درجه، با هم می‌سازند. یعنی مساحت قطاع EKA برابراست با $\frac{1}{8}$ مساحت‌دایره‌ای به‌شعاع برابر۱، یعنی برابر است با $\frac{\pi}{8}$.

پاسخ: $\frac{\pi}{8}$

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $k\pi$، $l\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k,l\in z)$؛ ۲. $58\sqrt{3}$ سانتیمتر؛

۳. $x=\sqrt{2}$، $y=\sqrt{2}$؛ ۴. ٪۱۸؛ ۵. $\frac{\pi}{4}$.

گروه سوم. ۱. $k\pi+\frac{\pi}{2}$، $l\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k,l\in z)$؛ ۲. $2\sqrt{5}$ سانتیمتر؛

۰۳ $x_1 = 2$ و $y_1 = 4$، $x_2 = 4$ و $y_2 = 2$؛ ۰۴ ٪۴۲/۳؛ ۰۵ $\frac{3\pi}{8}$.

گروه چهارم. ۰۱ $k\pi$، $l\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k, l \in Z)$؛ ۰۲ $\frac{\sqrt{30}}{4}$ سانتیمتر؛

۰۳ $x_1 = 1$ و $y_1 = \sqrt{5}$، $x_2 = \sqrt{5}$ و $y_2 = 1$؛ ۰۴ ٪۱۸ ۰۵ $\frac{\pi}{2}$.

۱۹۸۱

گروه اول

۰۱ چون $2^{x+1} = 2 \times 2^x$ و $2^{x+2} = 4 \times 2^x$، معادلهٔ مفروض را مـی توان چنین نوشت:

$$6 \times 2^x + 5 \times 2^x - 4 \times 2^x = 21 \Rightarrow 2^x = 3$$

پاسخ: $x = \log_2 3$.

۰۲ اگر از رابطهٔ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده کنیم، معادلهٔ مفروض، به صورت $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ درمی‌آید، که هم‌ارز با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر است:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad و \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پاسخ: $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

۰۳ سرعت قطارباری را v کیلومتر درساعت می گیریم. دراین صورت، ازفرض نتیجه می‌شود که سرقت قطارمسافری $\frac{8}{5}v$ کیـلومتر درساعت و سرعت قطـار سریع‌السیر $(v+50)$ کیلومتردرساعت است.

فرض می کنیم، قطارباری، فاصلهٔ بین دوشهر را در t ساعت طی کند. در این صورت، این فاصله را، قطارسریـع‌السیر در $(t-4)$ ساعت وقطار مسافری در $(t-3)$ ساعت طی خواهدکرد. به این‌ترتیب، داریم:

$$\begin{cases} vt = \frac{8}{5}v(t-3) \\ vt = (v+50)(t-4) \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول این دستگاه، به‌دست می‌آید: $t = ۸$؛ که اگر به‌جای t درمعادلهٔ دوم قرار دهیم، به معادلهٔ

$$۸v = ۴(v + ۵۰)$$

می‌رسیم وازآن‌جا به‌دست می‌آید: $v = ۵۰$.

پاسخ: سرعت‌قطارباری ۵۰ کیلومتر درساعت‌وسرعت‌قطارسریع‌السیر ۱۰۰ کیلومتر در ساعت است.

۴. صفحهٔ محورهای مختصات را، به‌چهارحوزه بخش می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geqslant ۰ \\ y - ۱ \geqslant ۰, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant ۰ \\ y - ۱ \leqslant ۰, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant ۰ \\ y - ۱ \geqslant ۰, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leqslant ۰ \\ y - ۱ \leqslant ۰ \end{cases}$$

نامعادلهٔ مفروض، در هریك ازاین حوزه‌ها، به‌این صورت‌ها درمی‌آید:

درحوزهٔ اول: $x + (y - ۱) \leqslant ۴$ یا $x + y \leqslant ۵$؛

در حوزهٔ دوم: $x + (۱ - y) \leqslant ۴$ یا $y - x \geqslant -۳$؛

درحوزهٔ سوم: $-x + (y - ۱) \leqslant ۴$ یا $y - x \leqslant ۵$؛

درحوزهٔ چهارم: $-x + (۱ - y) \leqslant ۴$ یا $x + y \geqslant -۳$.

بنابراین، شکل مورد نظرمساله، شامل نقطه‌هایی است که درهرچهاردستگاه نامعادله‌های زیرصدق کنند:

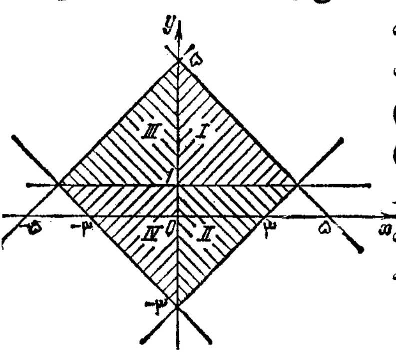
$$\mathrm{I} \begin{cases} x \geqslant ۰ \\ y \geqslant ۱ \\ x + y \leqslant ۵ \end{cases} \qquad \mathrm{II} \begin{cases} x \geqslant ۰ \\ y \leqslant ۱ \\ y - x \geqslant -۳ \end{cases}$$

$$\mathrm{III} \begin{cases} x \leqslant ۰ \\ y \geqslant ۱ \\ y - x \leqslant ۵, \end{cases} \qquad \mathrm{IV} \begin{cases} x \leqslant ۰ \\ y \leqslant ۰ \\ x + y \geqslant -۳ \end{cases}$$

اکنون، هریك ازحوزه‌هارا، روی‌صفحهٔ مختصات نشان می‌دهیم (شکل۱۳۴)

حوزهٔ اول، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است محدود به خطهای راست $x = ۰$، $y = ۱$ و $x + y = ۵$؛ ضلع‌های مجاوربه زاویهٔ قائمهٔ این مثلث برخطهای راست $x = ۰$ و $y = ۱$ واقع‌اند وطولی برابر ۴ دارند، بنابراین‌مساحت‌آن‌برابر

است با ۸. بقیهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه را، می‌توان به‌عنوان قرینه‌هایی از مثلث اول درنظر گرفت: مثلث دوم، نسبت به‌خط راست $y = 1$، b) مثلث سوم نسبت به‌خط راست $x = 0$ و c) مثلث چهارم نسبت به نقطهٔ $(1 , 0)$ نقطهٔ برخورد خطهای راست $x = 0$ و $y = 1$. مساحت شکل مورد نظر مساله، ازمجموع مساحت‌های این مثلث‌ها به دست می‌آیدو بنا براین:

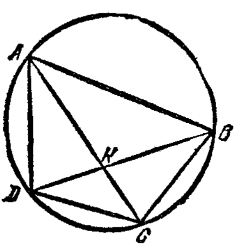


شکل ۱۳۴

$S = 4 \times 8 = 32$.

پاسخ: ۳۲ واحد مربع.

۵. ثابت می‌کنیم، دومثلث ABC و KBC متشابه‌اند (شکل ۱۳۵). این دو مثلث، در زاویهٔ ACB مشترک‌اند. بنا برفرض‌داریم: $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. ولی زاویه‌های CAD و CBD، زاویه‌هایی‌محاطی و روبه روی‌به یک‌کمان‌اند، بنا براین: $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$. به‌این‌ترتیب، دومثلث ABC وKBC متشابه می‌شوند وداریم:



شکل ۱۳۵

$$\frac{|BC|}{|KC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

و یا

$$|KC| \cdot |AC| = |BC|^2$$

اگر $|KC|$ را x بگیریم، داریم:

$$|AC| = |AK| + |KC| = 6 + x$$

و به معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمی‌رسیم:

$$x(6+x) = 16$$

که تنها یک‌جواب مثبت دارد: $x = 2$.

پاسخ: $|KC| = 2$.

۶. با استفاده از رابطه‌های

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

می‌توان تابع مفروض را چنین نوشت:

$$y(x)=\cos 2x-6\sin 2x+2-2\sqrt[3]{66}$$

و یا به‌صورت

$$y(x)=\sqrt{37}\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\cos 2x-\frac{6}{\sqrt{37}}\sin 2x\right)+2-2\sqrt[3]{66}$$

اگر $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}$ بگیریم، تابع $y(x)$، به این‌صورت درمی‌آید:

$$y(x)=\sqrt{37}\cdot\sin(\varphi-2x)+2-2\sqrt[3]{66}$$

اکنون روشن است که $y(x)$، حداکثر مقدار خود را، به ازای $\sin(\varphi-2x)=1$، به‌دست می‌آورد. این مقدار حداکثر برابر است با $\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66}$ فرض می کنیم، نابرابری زیردرست باشد:

$$\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66}<0$$

دراین صورت داریم: $\sqrt{37}+2<2\sqrt[3]{66}$ اگر دوطرف را مکعب کنیم، به دست می‌آید: $49\sqrt{37}<298$. این نابرابری را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt{37}<6+\frac{4}{49}$$

دوطرف را مجذور می کنیم، به‌دست می‌آید:

$$37<36+\frac{48}{49}+\frac{16}{49^2}=37-\frac{33}{49^2}$$

که یك نابرابری نادرست است. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{37}+2-2\sqrt[3]{66}\geqslant 0$$

یعنی، تابع مفروض، درنقطه‌هایی که‌درآن‌ها داشته باشیم: $\sin(\varphi-2x)=1$، مقدارهایی غیرمنفی را قبول می کند.

مثلاً، $y(x)$، بـه‌ازای $x=\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}$، مقداری‌غیرمنفی است‌و، به‌این‌ترتیب، حکم مساله ثابت باشد.

گروه‌های دوم تاچهارم

گروه دوم. ۱. $x=16$؛ ۲. $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(k\in Z)$؛

۳. ۲ متر درساعت؛ ۴. ۸؛ ۵. ۷.

گروه سوم. ۱. $x=\log_3 2$؛ ۲. $k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ (k\in Z)$؛

۳. ۱۸۰ کیلومتر درساعت، ۱۵۰ کیلومتر درساعت و۱۲۰ کیلومتر درساعت،

۴. ۱۸؛ ۵. ۱۶.

گروه چهارم. ۱. ۲۵ ؛ ۲. $k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$؛

۳. کارگر اول: ۶ قطعه، کارگردوم: ۵ قطعه و کارگر سوم: ۳ قطعه؛

۴. ۲؛ ۵. ۶.

§ ۱۰. دانشکدهٔ اقتصاد
(بخش اقتصاد سیاسی)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. فرض می‌کنیم گروه اول بتواند بارکشتی‌را در x ساعت وگروه دوم در y ساعت تخلیه کند. دراین‌صورت

$$x+y=12 \qquad (1)$$

گروه‌اول، هرساعت $\frac{1}{x}$ بارکشتی وگروه دوم، هرساعت $\frac{1}{y}$ بارکشتی‌را تخلیه می‌کند. بنابراین، اگرباهم کار کنند، درهرساعت، $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\left(\frac{x+y}{yx}\right)$بارکشتی تخلیه‌می‌شود. یعنی‌اگردو گروه با هم‌کار کنند،برای‌انجام‌تمامی‌کار، به $\frac{1}{\frac{x+y}{xy}}$ ساعت وقت نیازدارند. برای مشخص‌بودن وضع، فرض مـی کنیم $x>y$.

بنابراین $(x-y)$ باید برابر ۴۵٪ از $\frac{xy}{x+y}$ باشد، یعنی

$$x-y=\frac{۴۵}{۱۰۰}\cdot\frac{xy}{x+y} \qquad (۲)$$

ازمعادلهٔ(۱) به‌دست می‌آید: $y=۱۲-x$، که اگر به‌جای y درمعادلهٔ(۲) قراردهیم، به معادله‌ای نسبت به مجهول xمی‌رسیم:

$$x-۱۲+x=\frac{۹}{۲۰}\cdot\frac{x(۱۲-x)}{۱۲}$$

که می‌توان آن را به‌این‌صورت نوشت:

$$۳x^۲+۱۲۴x-۹۶۰=۰$$

این معادله، دو ریشه دارد: $x_۱=-۴۸$ و $x_۲=\frac{۲۰}{۳}$ وچون باید xمثبت باشد، پس $x=\frac{۲۰}{۳}$ و ازآن‌جا $y=\frac{۱۶}{۳}$.

پاسخ: $۶\frac{۲}{۳}$ ساعت و $۵\frac{۱}{۳}$ ساعت.

۰۲ با استفاده از رابطهٔ $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$، می‌توان معادلهٔ مفروض را چنین نوشت:

$$۸\sin^۴ x-۲۶\sin^۲ x+۶=۰$$

چون معادلهٔ درجهٔ دوم $۴y^۲-۱۳y+۳=۰$ دارای دو ریشه است: $y_۱=۳$ و $y_۲=\frac{۱}{۴}$، بنابراین، معادلهٔمفروض مساله،با مجموعهٔ دو معادلهٔزیر هم‌ارزاست:

$$\sin^۲ x=۳ \text{ و } \sin^۲ x=\frac{۱}{۴}$$

معادلهٔ $\sin^۲ x=۳$ جواب ندارد ومعادلهٔ $\sin^۲ x=\frac{۱}{۴}$، با مجموعهٔ دومعادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ و $\sin x=-\frac{۱}{۲}$ هم‌ارزاست.

$$\sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=n\pi+(-۱)^n\cdot\frac{\pi}{۶} \qquad (n\in Z)$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=m\pi+(-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{6}\qquad (m\in Z)$$

پاسخ: $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(k\in Z)$.

۳. مجذور فاصلهٔ نقطهٔ $M(0,-2)$ تا نقطهٔ $A(x,y)$، عبارت است از:

$$|AM|^2=(x-0)^2+(y+2)^2$$

وچون مختصات نقطهٔ A، به‌وسیلهٔ رابطهٔ $y=\frac{16}{\sqrt{3}x^3}-2$ به‌هم مربوط‌اند، بنا براین

$$|AM|^2=x^2+\left(\frac{16}{\sqrt{3}x^3}\right)^2=x^2+\frac{256}{3x^6}$$

به‌این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع زیر را، در مجموعهٔ $0<x<+\infty$ پیدا کنیم:

$$f(x)=x^2+\frac{256}{3x^6}$$

تابع $f(x)$. درهر نقطهٔ این حوزهٔ، مشتق‌پذیر است وداریم:

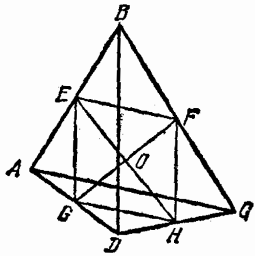
$$f'(x)=2x-512x^{-7}=\frac{2(x^8-256)}{x^7}=\frac{2(x^8-2^8)}{x^7}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که مشتق $f'(x)$، در مجموعهٔ $0<x<2$ منفی و در مجموعهٔ $2<x<+\infty$ مثبت است. به‌این‌ترتیب، تابع $f(x)$ در بازهٔ $0<x<2$ نزولی و دربازهٔ $2<x<+\infty$ صعودی است، به‌جز این، $f(x)$ درنقطهٔ $x=2$ پیوسته‌است. بنابراین، حداقل تابع $f(x)$، درمجموعهٔ $0<x<+\infty$ عبارت است از $f(2)$، یعنی $5\frac{1}{3}$. به‌این ترتیب، فاصلهٔ مجهول، برابر است با $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

پاسخ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$

۴. چون نقطه‌های F و H وسط ضلع‌های BC و CD هستند (شکل ۱۳۶)، بنابراین FH، که وسط دوضلع ازمثلث BCD را به‌هم وصل کرده است،

موازی با BD می شود و داریم: $|FH|=\frac{۱}{۲}|BD|$. بـه همیـن تـرتیب $EG||BD$. در نتیجه خواهیم داشت: $EG||FH$، $EF||GH$، $|EF|=\frac{۱}{۲}|AC|$.



شکل ۱۳۶

به این ترتیب، چهارضلعی EFHG متوازی‌الاضلاعی می‌شود که طول قطرهای آن برابر a و b وزاویهٔ بین قطرهای آن برابر $\frac{\pi}{۳}$ است.

مثلث OFH را درنظر مـی گیریم. بنا بر قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$|FH|^۲=|OF|^۲+|OH|^۲-۲|OF|\cdot|OH|\cdot\cos F\widehat{O}H$$

وچون $|FH|=\frac{۱}{۲}|BO|$، بنا براین

$$\frac{۱}{۴}|BD|^۲=\left(\frac{d}{۲}\right)^۲+\left(\frac{a}{۲}\right)^۲-۲\frac{ab}{۴}\cos\frac{\pi}{۳}$$

واز آن‌جا $|BD|=\sqrt{a^۲+b^۲-ab}$. به همین ترتیب، اگر درمثلث EOF هم از رابطهٔ کسینوس‌ها استفاده کنیم، $|EF|$ وسپس $|AC|$ به‌دست می‌آید.

پاسخ: $\sqrt{a^۲+b^۲-ab}$ و $\sqrt{a^۲+b^۲+ab}$.

۵۰. a را عددی می‌گیریم که با شرط‌های مسأله سازگار باشد. این، به‌معنای آن است که اگر درنابرابری مفروض، y را به x یا y را به x− تبدیل کنیم، باید یك نابرابری نسبت به x به‌دست آید، که به‌ازای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد. به این ترتیب، نابرابری‌های زیر، به‌ازای هرمقدار x ، برقرار است:

$$(a+۵۰)x^۲-۲x+\frac{۱}{۱۰۰}\geqslant ۰ \qquad (۳)$$

$$(۵۰-a)x^۲+\frac{۱}{۱۰۰}\geqslant ۰ \qquad (۴)$$

روشن است که، به‌ازای $a=-۵۰$، نابرابری (۳) به‌ازای همهٔ مقدارهای x برقرار نیست، بنابراین $a\neq-۵۰$. چون باید نابرابری (۳)، به‌ازای

همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد، مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم سمت چپ آن نمی‌تواند مثبت باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$۴-\frac{۴}{۱۰۰}(۵۰+a)\leqslant ۰$$

که از آن جا به دست می‌آید: $۵۰\leqslant a$. چون مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۴) هم باید برتمامی محورعددی منطبق باشد، باید داشته باشیم: $a\leqslant ۵۰$. بنابراین، اگرمساله جوابی داشته باشد، این جواب $a=۵۰$ است. به ازای $a=۵۰$، نامعادلهٔ اصلی، به‌این صورت درمی‌آید.

$$۲۵y^۲+\frac{۱}{۱۰۰}\geqslant x-۵۰xy+y-۲۵x^۲$$

که آن را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$(۵x+۵y)^۲-۲(۵x+۵y)\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۰۰۱}\geqslant ۰$$

یا

$$\left(۵x+۵y-\frac{۱}{۱۰}\right)^۲\geqslant ۰ \qquad (۵)$$

نامعادلهٔ (۵)، به‌ازای هرمقدار دلخواه x و y برقرار است. بنابراین، $a=۵۰$، جواب منحصر به‌فرد مساله است.

پاسخ: $a=۵۰$.

۶. ازمعادلهٔ دوم به‌دست می‌آید: $y=x^{-۳}$، که اگر به‌جای y درمعادلهٔ اول قراردهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$x^{۴x+x^{-۳}}=x^{-۱۵\left(x^{-۳}x-\frac{x}{۳}\right)} \qquad (۶)$$

روشن است که $x_۱=۱$، جوابی‌ازمعادله است. درمجموعهٔ $x>۰$ و $x\neq ۱$، معادلهٔ (۶)، به‌معادلهٔ زیر، که هم‌ارزآن است، تبدیل می‌شود:

$$۴x+x^{-۳}=-۱۵\left(x^{-۳}-\frac{x}{۳}\right)=x^۴=۱۶$$

که دارای دوریشه است: $x_۲=۲$ و $x_۳=-۲$ وتنها $x_۲=۲$ درمجموعهٔ $x>۰$ و $x\neq ۱$ قرار دارد. به‌این ترتیب، درمجموعهٔ $x>۰$، معادلهٔ (۶) تنها دوجواب دارد: $x_۱=۱$ و $x_۲=۲$. درنتیجه، دستگاه مفروض مساله،

درمجموعهٔ $x>0$ و $y>0$، دارای دو جواب است: $x_1=1$، $y_1=1$ و $x_2=2$، $y_2=\frac{1}{8}$.

پاسخ: $(1, 1)$، $\left(2, \frac{1}{8}\right)$.

۷. a را عدد ثابتی می‌گیریم. نامعادلهٔ مفروض را می‌توان به‌صورت $|x-a|<3-x^2$ نوشت. در نتیجه، آن را می‌توان به‌صورت نامعادلهٔ دوطرفهٔ

$$-(3-x^2)<x-a<3-x^2$$

نوشت که با دستگاه زیرهم‌ارز است:

$$\begin{cases} x-a<3-x^2 \\ -(3-x^2)<x-a \end{cases}$$

بنابراین، مساله را می‌توان به‌این ترتیب تنظیم کرد؛ مقدارهای a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، دستگاه نامعادله‌های زیر، دست‌کم، یک‌جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} x^2+x-3-a<0 \\ x^2-x-3+a<0 \\ x<0 \end{cases} \qquad (7)$$

مبین سه‌جمله‌ای‌های درجهٔ دوم

$$x^2+x-3-a \text{ و } x^2-x-3+a \qquad (8)$$

به‌ترتیب، برابراست با $13+4a$ و $13-4a$. بنابراین، برای این‌که، دو نامعادلهٔ اول و دوم دستگاه دارای جواب باشند، باید داشته باشیم: $13+4a>0$ و $13-4a>0$، یعنی $-\frac{13}{4}<a<\frac{13}{4}$. دردنبالهٔ بحث، فرض را براین می‌گیریم که مقدار a، بااین شرط سازگار باشد.

ریشه‌های سه‌جمله‌ای‌های (۸) را x_1، x_2 و x_3، x_4 می‌گیریم. ضمناً فرض می‌کنیم: $x_1<x_2$ و $x_3<x_4$. چون مجموعهٔ جواب‌های دونامعادلهٔ اول دستگاه (۷)، به‌صورت $x_1<x<x_2$ و $x_3<x<x_4$ هستند،

بنابراین، دستگاه (۷) وقتی، وتنها وقتی، جواب دارد که داشته باشیم: $x_1<0$ و $x_2<0$، یعنی

$$\frac{-1-\sqrt{13+4a}}{2}<0\ ,\ \frac{1-\sqrt{13-4a}}{2}<0$$

نابرابری اول، به‌ازای $-\frac{13}{4}<a<\frac{13}{4}$ برقرار است. نامعادلهٔ دوم را، در این مجموعه، می‌توان چنین نوشت:

$$1<\sqrt{13-4a} \Longrightarrow 1<13-4a \Longrightarrow -\infty<a<3$$

به‌این ترتیب، دستگاه (۷)، وقتی وتنها وقتی، دست‌کم یک جواب دارد که داشته باشیم: $-\frac{13}{4}<a<3$.

پاسخ: $-\frac{13}{4}<a<3$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. ۴ساعت، $\frac{4}{3}$ ساعت؛ ۲. $x=k\pi\ (k\in Z)$؛ ۳. $\frac{1}{3}$؛

۴. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}$، $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-16S^2}}$؛

۵. ۳۲؛ ۶. $\left(\frac{9}{4},\frac{2}{3}\right)$، $(1,1)$؛ ۷. $-\frac{9}{4}<a<2$.

گروه سوم. ۱. $7\frac{1}{2}$ ساعت، $10\frac{1}{2}$ ساعت؛ ۲. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}\ (n\in Z)$؛

۳. $\frac{5}{12}$؛ ۴. $|EG|=|FH|=2\sqrt{\frac{5S}{3}}$؛ ۵. ۱۸؛ ۶. $(1,1)$؛

۷. $-4<a<\frac{17}{4}$.

گروه چهارم. ۱. $\frac{20}{3}$ ساعت، $\frac{10}{3}$ساعت؛ ۲. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$،

$2m\pi\pm\frac{5\pi}{6}\ (k\ ,\ m\in Z)$؛ ۳. $12\frac{1}{2}$؛ ۴. $\sqrt[4]{3}\cdot 2\sqrt{Q}$، $\frac{4Q}{\sqrt[4]{3}}$؛

۵. ۸؛ ۶. $(1, 1)$، $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$؛ ۷. $-1 < a < \frac{5}{4}$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبـول معادلهٔ مفروض، از همهٔ مقدارهـای x تشکیل شده است که، به‌طورهم‌زمان، درشرط‌های $1-2x^2 > 0$، $1-2x^2 \neq 1$ و $x > 0$ صدق کند، یعنی، حوزهٔ تعریف معادله‌عبارت است از $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

چون دراین حوزه داریم:

$$\frac{3}{4 \log_2(1-2x^2)} = \frac{3}{4} \log_{1-2x^2} 2, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \log_{1-2x^2}(1-2x^2)$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز معادلهٔ زیراست:

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} \log_{1-2x^2}(1-2x^2) - \frac{3}{4} \log_{1-2x^2} 2$$

که به‌سادگی، به‌معادلهٔ زیرتبدیل می‌شود:

$$8x^4 = 1 - 2x^2 \qquad (1)$$

کـه با معادلهٔ مفروض مساله، در حـوزهٔ تعریف آن، هم‌ارز است. معادلـهٔ $8z^2 + 2z - 1 = 0$ دوریشه‌دارد: $z_1 = -\frac{1}{2}$ و $z_2 = \frac{1}{4}$. یعنی معادلهٔ (۱) با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

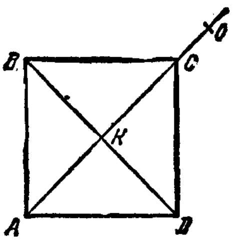
$$x^2 = \frac{1}{4} \text{ و } x^2 = -\frac{1}{2}$$

معادلهٔ اول جـواب ندارد ومعادلهٔ دوم، دارای دو ریشه است: $x_1 = \frac{1}{2}$ و $x_2 = -\frac{1}{2}$، که ازآن‌ها، تنها x_1 درحوزهٔ تعریف معادلهٔ اصلی قراردارد.

پاسخ: $x = \frac{1}{2}$.

۰۲ چون $|OD|=|OB|$ ، بنابراین، نقطهٔ O بر عمود منصف پاره‌خط BD، یعنی روی خط راست AC قراردارد (شکل ۱۳۷). نقطهٔ برخورد قطرهای مربع را K می‌نامیم. با توجه به‌فرض نتیجه می‌شود: $|OB|>|OC|$، بنابراین، نقطهٔO روی عمود منصف BC نیست ودریکی ازدوطرف آن‌قرار دارد؛ یعنی نقطهٔ C روی نیم‌خط KC واقع است. $|KO|$ را x و $|AB|$ را y می‌گیریم، چون $|KC|=y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $|OC|=5\sqrt{2}$، بنابراین

$$\left|x-y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=5\sqrt{2} \qquad (2)$$



شکل ۱۳۷

با استفاده ازقضیهٔ فیثاغورث در مثلث KOD به‌دست می‌آید:

$$|OD|^2=|KO|^2+|KD|^2 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow 169=x^2+\frac{1}{2}y^2 \qquad (3)$$

فرض می‌کنیم $x\geqslant y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$، آن وقت $x^2\geqslant\frac{1}{2}y^2$ (توجه کنیم که x و y غیرمنفی‌اند) و

$$169=x^2+\frac{1}{2}y^2\geqslant\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2=y^2$$

یعنی مساحت مربع از ۱۶۹ تجاوز نمی‌کند، و این متناقض با فرض مساله است. بنابراین، داریم: $x<y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$، یعنی $|KO|<|KC|$ و نقطهٔ O در درون مربع قراردارد. اکنون از (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-x=5\sqrt{2} \\ x^2+\frac{1}{2}y^2=169 \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول داریم: $x=y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-5\sqrt{2}$، که‌اگرآن را به‌جای x درمعادلهٔ دوم قراردهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$y^۲-۱۰y-۱۱۹=۰$$

این‌معادله دوریشه دارد، $y_۱=-۷$ و $y_۲=۱۷$. چون y طول یك‌پاره‌خط و، بنابراین، مثبت است: $y=۱۷$.

پاسخ: طول‌ضلع‌مربع برابر ۱۷ونقطهٔ O در درون مربع واقع است.

۳. از معادلـهٔ اول داریم : $y=\frac{b+۲-bx}{۲}$، که اگر به‌جای y درمعادلهٔ دوم قراردهیم، به‌دستگاه زیرمی‌رسیم که هم‌ارز دستگاه مفروض است:

$$\begin{cases} y=\dfrac{b+۲-bx}{۲} \\ b(b-۳)x=(b+۲)(b-۳) \end{cases} \qquad (۴)$$

به ازای $b=۰$، دستگاه ناسازگار و به ازای $a=۳$، دستگاه (۴) دارای بی‌نهایت جواب به‌صورت $x=a$ و $y=\frac{۵-۳a}{۲}$ است. (a، عددی است دلخواه). اگر $b\neq۰$ و $b\neq۳$، آن‌گاه دستگاه (۴)، دارای جواب منحصر به فرد $x=\frac{b+۲}{b}$ و $y=۰$ است.

پاسخ: $-\infty<b<۰$ و $۰<b<+\infty$.

۴. تعداد واگن‌های با ظرفیت ۵۰ تن را، n مـی‌گیریم. در این صورت، وزن تمامی بار برابر $۵۰n$ تن می‌شود.

از واگون‌های ۶۰ تنی، $n-۵$ عدد مـورد استفاده قـرار گرفته است. چون همهٔ بار را در این واگون‌ها جا داده‌ایم و یکی ازآن‌ها پرنشده است، بنابراین

$$۶۰(n-۵)>۵۰n \quad \text{و} \quad ۶۰(n-۶)<۵۰n$$

ازاین دونابرابری، حاصل می‌شود: $۳۰<n<۳۶$؛ وچون n عددی درست است، بنابراین

$$۳۱\leqslant n\leqslant ۳۵ \qquad (۵)$$

تعداد واگون‌های ۸۰ تنی، $n-۱۳$ بـوده است و، شبیه حالت قبل، باید داشته باشیم:

$$۸۰(n-۱۳)>۵۰n \text{ و } ۸۰(n-۱۴)<۵۰n$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\frac{۱۰۴}{۳}<n<\frac{۱۱۲}{۳}$. چون $\frac{۱۰۴}{۳}=۳۴\frac{۲}{۳}$،

$\frac{۱۱۲}{۳}=۳۷\frac{۱}{۳}$ و n عددی است درست، بنابراین

$$۳۵\leqslant n\leqslant ۳۷ \qquad (۶)$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود: $n=۳۵$.

پاسخ: ۱۷۵۰ تن.

۵. برای هر مقدار ثابت a، تابع مفروض، در تمام نقطه‌ها، مشتق‌پذیر است. اگر بخواهیم، تابع $y(x)$، همیشه صعودی باشد و، ضمناً، دارای نقطه‌های بحرانی نباشد، باید داشته باشیم $y'(x)>۰$. ازطرف دیگر، اگر داشته باشیم: $y'(x)>۰$ آن‌وقت، تابع مفروض نقطهٔ بحرانی ندارد و صعودی است.

داریم: $y'(x)=۸a-۶a\cos۶x-۷-۵\cos۵x$ و، بنابراین، بنابرآن‌چه گفتیم، باید داشته باشیم:

$$۶a\cos۶x+۵\cos۵x<۸a-۷ \qquad (۷)$$

چون این نابرابری، باید برای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد، باید در حالت خاص $x=۰$ هم برقرار شود. اگر در (۷) قرار دهیم $x=۰$، به‌دست می‌آید. $۶a+۵<۸a-۷$، یا $a>۶$. بنابراین، همهٔ جواب‌های پارامتر a، درحوزهٔ $a>۶$ قراردارند. ولی در این حوزه داریم: $۶a+۵<۸a-۷$ و، درنتیجه، به‌ازای هرمقدار دلخواه x، خواهیم داشت:

$$۶a\cos۶x+۵a\cos۵x\leqslant ۶|a|+۵=۶a+۵<۸a-۷$$

یعنی نابرابری (۷)، برای همهٔ مقدارهای x، برقراراست.

پاسخ: $a>۶$.

۶. a را عددی می‌گیریم که، به ازای آن، شرط مسأله بر قرار باشد. چون نابرابری مفروض، به ازای همهٔ مقدارهای x باید درست باشد، بنابراین، برای $x=\frac{\pi}{۲}$ هم درست است، یعنی

$$\left(۴-\sin\frac{\pi}{۲}\right)^۴\cdot a-۳+\cos^۲\frac{\pi}{۲}+a>۰ \Longrightarrow ۸۲a-۳>۰$$

بنابراین، همهٔ مقدارهای مطلوب پارامتر a، باید با نابرابری $a>\frac{3}{28}$ سازگار باشند.

اکنون، فرض می‌کنیم: $a>\frac{3}{82}$. برای هرمقدار x، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$\cos^2 x \geqslant 0 \;،\; 4-\sin x \geqslant 3 \;،\; (4-\sin x)^4 \geqslant 81$$

وچون داریم $a>0$، ازاین نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a \geqslant 81a-3+a=82a-3>0$$

یعنی، همهٔ مقدارهای پارامتر a ازحوزهٔ $a>\frac{3}{82}$، با شرط مساله سازگار است.

پاسخ. $a>\frac{3}{82}$.

گروه‌های دوم تاچهارم

گروه دوم. ۱. $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$؛ ۲. ۲؛

۳. $a=-\frac{2}{3}$؛ ۴. ۸۵۰ لیتر؛

۵. $a<\frac{1}{15}$؛ ۶. $a<\frac{3}{11}$.

گروه سوم. ۱. $x=\pm\frac{1}{2}$؛ ۲. ۴، نقطهٔO، در بیرون مربع قراردارد؛

۳. $c=-4$؛ ۴. ۲۵۳۰۰ متر؛

۵. $a>\frac{11}{2}$؛ ۶. $a>\frac{5}{13}$.

گروه چهارم. ۱. $x=\pm\frac{1}{2}$؛ ۲. ۳۲؛

۳. $d<-1$، $-1<d<1$ ، $d>1$؛ ۴. ۱۱۹ نفر؛

۵. $a<\frac{۳}{۸}$ ؛ ۶. $a<\frac{۵}{۲۹}$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. اگر $cotg\,x$ را z بگیریم، معادلهٔ مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{۳۷-۴۸z}=۸z-۵ \qquad (۱)$$

با مجذور کردن دوطرف معادلهٔ (۱)، به‌معادلهٔ‌درجهٔ دوم زیرمی‌رسیم:

$$۱۶z^۲-۸z-۳=۰$$

که دارای دو ریشه است: $z_۱=\frac{۳}{۴}$ و $z_۲=-\frac{۱}{۴}$. اگراین جواب‌ها را در معادلهٔ (۱) آزمایش کنیم، معلوم می‌شود که تنها جواب $z_۱=\frac{۳}{۴}$ درآن‌صدق می‌کند. ازآن‌جا

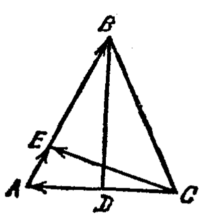
$$cotg\,x=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=n\pi+arctg\frac{۳}{۴}(n\in Z)$$

۲. چون داریم

$$cos\,\widehat{ACE}=\frac{(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA})}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\overrightarrow{CA}|}$$

پس، برای پیداکردن جواب، باید $|\overrightarrow{CE}|$ وحاصل‌ضرب اسکالر $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA})$ را به‌دست آورد. به‌سادگی دیده می‌شود (شکل ۱۳۸):

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE} \text{ و } \overrightarrow{AE}=\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AB}.$$



شکل ۱۳۸

بنابراین، با توجه به ویژگی‌های حاصل‌ضرب اسکالر، داریم:

$$(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CA})=$$

$$=(\overrightarrow{CA}+\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA})=$$

$$=(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA})+\frac{۱}{۴}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA})$$

با رسم ارتفاع BD ازمثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD به‌دست می‌آید، که در آن، داریم:

$$cos\widehat{BAD}=|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AB}|=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

وچون زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CA}$، برابراست با $\pi-\widehat{BAD}$، پس

$cos(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})=-\frac{۳}{۴}$ یعنی

$$(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA})=۱۴۴+\frac{۱}{۴}\times ۱۲\times ۸\times -\frac{۳}{۴}=۱۲۶$$

سپس، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$|\overrightarrow{EC}|^{۲}=|\overrightarrow{AC}|^{۲}+|\overrightarrow{AE}|^{۲}-۲|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cdot cos\widehat{CAE}=$$

$$=۱۴۴+۴-۲\times ۱۲\times ۲\times\frac{۳}{۴}=۱۱۲$$

اکنون به‌دست می‌آید

$$cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})=\frac{۱۲۶}{\sqrt{۱۱۲}\times ۱۲}=\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$$

یعنی: $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}})=\arccos\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$.

پاسخ: $\arccos\frac{۳\sqrt{۷}}{۸}$.

۰۳ حجم ظرف را V لیتر می‌گیریم بعداز برداشتن ۲ لیتر گلسیرین و ریختن ۲ لیتر آب به جای آن، گلسیرین باقی‌مانده $\frac{V-۲}{V}$ قسمت ظرف را تشکیل می‌دهد. بعدازآن که ۲ لیترازمخلوط را برداریم، به‌اندازهٔ $(V-۲)\frac{V-۲}{V}$

لیتر گلسیرین در آن می‌ماند، که بعداز اضافه‌کردن ۲ لیتر آب، $\frac{(V-2)^2}{V^2}$ قسمت‌ظرف‌را تشکیل‌می‌دهد. به همین‌ترتیب، بعدازجابه‌جایی سوم، گلیسرین موجود درظرف، به‌اندازهٔ $\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ قسمت ظرف را تشکیل خواهد داد.

بنابراین، مقدارگلسیرین موجود درظرف برابر $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ لیتر ومقدار آب آن برابر $3+V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3-$ لیترخواهد شد و داریم:

$$V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3+V\left(\frac{V-2}{V}\right)^2+3=V$$

چون $V\neq 0$، بنابراین، معادلهٔ اخیر، با معادلهٔ زیرهم‌ارزمی‌شود:

$$V^3-9V^2+24V-16=0 \Rightarrow (V-1)(V-4)^2=0$$

درنتیجه یا $V=1$ یا $V=4$، وچون، با توجه به‌صورت مساله $V>2$. بنابراین، بعد از پایان سه بار جابه‌جائی، مقدار گلسیرین موجود در ظرف، چنین است:

$$V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3=4\left(\frac{4-2}{4}\right)^3=\frac{1}{2}(\text{لیتر})$$

پاسخ: گلسیرین ۰/۵ لیتر وآب ۳/۵ لیتر.

۴. سه‌جمله‌ای‌درجهٔدوم x^2+2x-3،دو ریشه دارد: $x_1=-3$ و $x_2=1$. ازاین دو ریشه، تنها $x_2=1$ دربازهٔ $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ واقع است. حداکثر و حداقل مقدارتابع $y(x)$ را دردوبازهٔ $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ و $[1, 4]$، به طور جداگانه، پیدا می‌کنیم. در مجموعهٔ $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ داریم: $x^2+2x-3\leqslant 0$. یعنی

$$|x^2+2x-3|=-x^2-2x+3 \text{ و}$$

$$y(x)=-x^2-2x+3+\frac{3}{2}\ln x$$

تابع $f(x)=-x^{2}-2x+3+\frac{3}{2}\ln x$، درمجموعهٔ $x>0$ معین ودرهمهٔ نقطه‌های این مجموعه، دارای مشتق است، ضمناً

$$f'(x)=-2x-2+\frac{3}{2x}=-\frac{4x^{2}+4x-3}{2x}=$$

$$=-\frac{(2x-1)(2x+3)}{2x}$$

ازاین جا نتیجه می‌شود کـه درمجموعهٔ $x>\frac{1}{2}$، نابـرابـری $f'(x)<0$ برقرار است، یعنی دراین مجموعهٔ، تابع $f(x)$ به‌طور یـکنوا نزولی است. چون $f(x)$ به ازای $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ پیوسته است، بنابـرایـن، در بـازهٔ $\left[1\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ نزولی است. چون دراین بازه، دوتابع $y(x)$ و $f(x)$ بـر هم منطبق‌اند، بنابراین تابع مفروض $y(x)$، دربازهٔ $\left[1\ ,\ \frac{1}{2}\right]$ به‌طـوریکنوا نزولی است. درنتیجه

$$\min_{x\in\left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]} y(x)=y(1)=0$$

$$\max_{x\in\left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln 2$$

درمجموعهٔ $x\geqslant 1$ داریم: $x^{2}+2x-3\geqslant 0$، یعنی

$$|x^{2}+2x-3|=x^{2}+2x-3$$

$$y(x)=x^{2}+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$$

تابع $g(x)=x^{2}+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$ درمجموعهٔ $x>0$ معین و، در هر نقطهٔ این مجموعه، دارای مشتق است، ضمناً

$$g'(x)=۲x+۲+\frac{۳}{۲x}=\frac{۴x^۲+۴x+۳}{۲x}=\frac{(۲x+۱)^۲+۲}{۲x}$$

ازاین‌جا معلوم می‌شود که، درمجموعهٔ $a>۰$، نابرابری $g'(x)>۰$ برقرار است. بنابراین، تابع $g(x)$، درمجموعهٔ $x>۰$ و درحالت‌خاص آن، دربازهٔ $[۱ \,,\, ۴]$، صعودی‌است. چون دوتابع $g(x)$ و $y(x)$، دراین بازه، برهم منطبق‌اند، بنابراین تابع مفروض $y(x)$، دربازهٔ $[۱ \,,\, ۴]$، به‌طور یکنوا صعودی است و داریم:

$$\min_{x\in[۱ \,,\, ۴]} y(x)=y(۱)=۰,$$

$$\max_{x\in[۱ \,,\, ۴]} y(x)=y(۴)=۲۱+۳\ln ۲$$

به‌این ترتیب، حداکثرتابع $y(x)$، دربازهٔ $\left[\frac{۱}{۲} \,,\, ۴\right]$ عبارت است از بزرگترین عدد ازبین دوعدد $y\left(\frac{۱}{۲}\right)$ و $y(۴)$ و حداقل $y(x)$ دراین بازه عبارت است از $y(۱)$.

پاسخ: $\max_{x\in\left[\frac{۱}{۲} \,,\, ۴\right]} y(x)=۲۱+۳\ln ۲$ ، $\min_{x\in\left[\frac{۱}{۲} \,,\, ۴\right]} y(x)=۰$

۵. چون داریم

$$۹+۱۲x+۴x^۲=(۲x+۳)^۲$$

و

$$۶x^۲+۲۳x+۲۱=(۳x+۷)(۲x+۳)$$

بنابراین، حوزهٔ مقدارهای‌قابل قبول معادله، شامل مقدارهایی از x است که، به‌طور همزمان، در شرطهای زیر صدق کنند:

$$۲x+۳>۰ \;,\; ۲x+۳\neq۱ \;,\; ۳x+۷>۰ \;,\; ۳x+۷\neq۱$$

یعنی حوزهٔ تعریف معادله، ازدوبازه تشکیل شده است:

$$-\frac{۳}{۲}<x<-۱ \quad و \quad -۱<x<+\infty$$

معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، با این معادله هم‌ارز است:

$$2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)+1=0 \qquad (2)$$

اگر $\log_{3x+7}(2x+3)$ را با z نشان دهیم، معادلهٔ (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$2z+\frac{1}{z}=3 \qquad (3)$$

معادلهٔ (۳) با معادلهٔ $2z^2-3z+1=0$ هم‌ارز است و دو ریشه دارد: $z_1=\frac{1}{2}$ و $z_2=1$. بنابراین، معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر هم‌ارزاست:

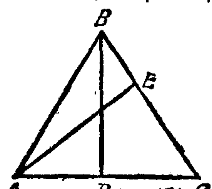
$$\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2} \text{ و } \log_{3x+7}(2x+3)=1$$

معادلهٔ اول، درحوزهٔ تعریف خود، با معادلهٔ $(2x+3)^2=3x+7$ هم‌ارز است، که دو ریشه دارد: $x_1=-\frac{1}{4}$ و $x_2=-2$ و از آن‌ها، تنها $x_1=-\frac{1}{4}$ درحوزهٔ تعریف معادلهٔ مفروض مساله قرار دارد. معادلهٔ دوم مجموعهٔ، با معادلهٔ $2x+3=3x+7$ هم‌ارزاست. این معادله یک ریشه دارد $x_3=-4$، که درحوزهٔ تعریف معادلهٔ اصلی نیست.

پاسخ: $x=-\frac{1}{4}$.

۶. طول پاره‌خط AC را x می‌نامیم (شکل ۱۳۹). ازمثلث قائم‌الزاویهٔ AEC، بنابرقضیهٔ فیثاغورث، به‌دست می‌آید:

$$|EC|=\sqrt{|AC|^2-|AE|^2}=\sqrt{x^2-144}$$


شکل ۱۳۹

بنابرفرض داریم:

$$\frac{|BE|}{|EC|}=\frac{5}{9}$$

یعنی:

$$|BC|=|BE|+|EC|=\frac{14}{9}|EC|=\frac{14}{9}\sqrt{x^2-144}$$

مساحت مثلث ABC، از یك طرف برابر $\frac{۱}{۲}|BD|\cdot|AC|$ وازطرف‌دیگر برابر $\frac{۱}{۲}|AE|\cdot|BC|$ است، بنابراین

$$|BD|\cdot|AC|=|AE|\cdot|BC|$$

یا

$$۱۱/۲x=۱۲\times\frac{۱۴}{۹}\sqrt{x^۲-۱۴۴}$$

معادلهٔ اخیر را، می‌توان چنین نوشت:

$$۳x=۵\sqrt{x^۲-۱۴۴} \qquad (۴)$$

اگردوطرف معادلهٔ (۴) را مجذورکنیم، به‌معادلهٔ $x^۲=۲۲۵$ می‌رسیم واز آن‌جا $x=۱۵$ یا $x=-۱۵$ چون x، طول ضلع مثلث است و نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین $x=۱۵$.

پاسخ: ۱۵.

۷. به جای معادلهٔ دوم دستگاه، معادله‌ای را در نظرمی‌گیریم که از مجموع ۳ برابرمعادلهٔ اول با (۲ —) برابر معادلهٔ دوم، به‌دست آمده باشد؛ به دستگاه زیر، هم‌ارز دستگاه مفروض می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۳x^۲+۲y^۲-۳x+۵y=۳ \\ y=۵-۳x \end{cases}$$

ویا

$$\begin{cases} ۳x^۲+۲(۵-۳x)^۲-۳x+۵(۵-۳x)=۳ \\ y=۵-۳x \end{cases} \qquad (۵)$$

معادلهٔ اول دستگاه (۵)، دوریشه دارد: $x_۱=۲$ و $x_۲=\frac{۱۲}{۷}$. در نتیجه، دستگاه (۵) و، همراه با آن، دستگاه اصلی، دو جواب دارد. $x_۱=۲$، $y_۱=-۱$؛ $x_۲=\frac{۱۲}{۷}$ ، $y_۲=-\frac{۱}{۷}$.

پاسخ: $(۲, -۱)$ و $\left(\frac{۱۲}{۷}, -\frac{۱}{۷}\right)$.

گروه دوم. ۱. $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ (k \in Z)$؛ ۲. $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$؛

۳. ۱۰ لیتر؛ ۴. $\min f(x) = 0$، $\max f(x) = 4 + \ln 2$؛

۵. $x = \frac{1}{4}$؛ ۶. ۷۵؛ ۷. $(-1, 2)$، $\left(\frac{7}{9}, \frac{10}{9}\right)$.

گروه سوم. ۱. $x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\ (k \in Z)$؛ ۲. $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$؛

۳. $\frac{1}{4}$ گلیسیرین، $\frac{7}{4}$ آب؛ ۴. $\min f(x) = -3\ln 2 - 21$، $\max f(x) = 0$؛

۵. $x_1 = 1$، $x_2 = \frac{1}{2}$؛ ۶. $6\sqrt{2}$؛ ۷. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$، $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$.

گروه چهارم. ۱. $x = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}\ (n \in Z)$؛ ۲. $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$؛

۳. ۲۵ لیتر؛ ۴. $\min f(x) = -\ln 2 - 4$، $\max f(x) = 0$؛

۵. $x_1 = 2$، $x_2 = \frac{7}{10}$؛ ۶. ۷۵؛ ۷. $(1, 4)$؛ $\left(-\frac{5}{9}, \frac{64}{9}\right)$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادله، با توجه به‌نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$|x-1| - 1 > 0 \qquad (1)$$

دراین حوزه، معادلهٔ مفروض، با معادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\frac{1}{|x-1|-1} = 2 \implies |x-1| = \frac{3}{2}$$

این معادله، دو ریشه دارد: $x_1 = \frac{5}{2}$ و $x_2 = -\frac{1}{2}$؛ که هردوی آن‌ها باشرط (۱) سازگارند.

پاسخ: $x_۱=-\frac{۱}{۲}$ ، $x_۲=\frac{۵}{۲}$.

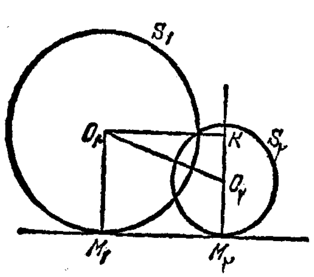
۲. سهمی $y=-x^۲+x+۲$، محور طول را در دو نقطه به‌طول‌های $x_۱=-۱$ و $x_۲=۲$ قطع می‌کند. شاخه‌های سهمی به‌طرف پایین امتداد دارند. بنابراین، شکلی که باید مساحت آن را محاسبه کنیم، بالای محور Ox وزیرسهمی $y=-x^۲+x+۲$، درفاصلهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۱$ قراردارد (شکل ۱۴۰). مساحت را محاسبه می‌کنیم:

$$S=\int_۰^۱(-x^۲+x+۲)\,dx=\left(-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۲}{۲}+۲x\right)\Big|_۰^۱=$$

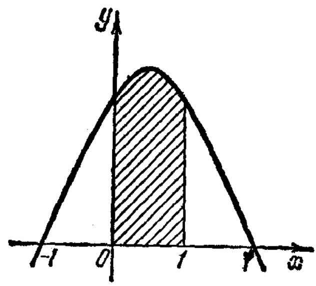
$$=-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+۲=۲\frac{۱}{۶}$$

پاسخ: $۲\frac{۱}{۶}$ واحدمربع.

۳. $S_۱$ و $S_۲$ را دو دایرهٔ مفروض می‌گیریم. (شکل ۱۴۱). چون نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$، نقطه‌های تماس دودایرهٔ $S_۱$ و $S_۲$ با خط‌راست $M_۱M_۲$



شکل ۱۴۱



شکل ۱۴۰

هستند، پس $O_۱M_۱\perp M_۱M_۲$ و $O_۲M_۲\perp M_۱M_۲$. $O_۱$ و $O_۲$،مرکزهای دودایره را به‌هم وصل واز $O_۱$ خط‌راستی موازی $M_۱M_۲$ رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط‌راست موازی $M_۱M_۲$ را با خط‌راست $O_۲M_۲$، با K نشان می‌دهیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $O_۱O_۲K$ به‌دست می‌آید. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث دراین مثلث، داریم:

$$|O_۱O_۲|^۲=|O_۱K|^۲+|KO_۲|^۲ \qquad (۲)$$

چون $|O_۱O_۲|:|M_۱M_۲|=\sqrt{۵}:۲$، بنابراین

$$|O_1O_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot|M_1M_2|$$

وچون $|KM_2|=|O_1M_1|$ و $|KO_2|=|KM_2|-|M_2O_2|$، بنا براین $|KO_2|=5$. بالاخره $|O_1K|=|M_1M_2|$. اکنون از برابری (۲)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{5}{4}|M_1M_2|^2=|M_1M_2|^2+25 \Longrightarrow |M_1M_2|+\sqrt{\frac{25}{\frac{5}{4}-1}}=10$$

پاسخ: ۱۰.

۴. مقدار قلع آلیاژ جدید را x کیلوگرم و مقدار روی آلیاژ اول را y کیلوگرم می گیریم. چون آلیاژ جدید، ۴۰۰ کیلوگرم وزن و ۳۰٪ روی دارد، بنا براین، دارای ۴۰۰×۰/۳۰، یعنی ۱۲۰ کیلوگرم روی است و، بنا براین، در آلیاژ دوم $(120-y)$ کیلوگرم روی وجود خواهد داشت. طبق فرض، درصد روی، در آلیاژهای اول ودوم، یکی است؛ یعنی داریم:

$$\frac{y}{150}=\frac{120-y}{250}$$

که از آن به‌دست می‌آید: $y=45$. چون آلیاژ اول دارای ۴۰٪ قلع‌است، در ۱۵۰ کیلوگرم آلیاژ اول، ۱۵۰×۰/۴۰، یعنی ۶۰ کیلوگرم قلع ودر آلیاژ دوم $(x-60)$ کیلوگرم قلع وجود دارد. چون آلیاژ دوم ۲۶٪ مس دارد، پس مقدارمس آلیاژ دوم، برابر ۲۵۰×۰/۲۶، یعنی ۶۵کیلوگرم است. در آلیاژ دوم، $(x-60)$کیلوگرم قلع، ۴۵ − ۱۲۰، یعنی ۷۵ کیلوگرم روی و ۶۵کیلوگرم مس وجود دارد، بنا براین

$$x-60+75+65=250 \Longrightarrow x=170$$

پاسخ: ۱۷۰ کیلوگرم.

۵. با استفاده از رابطه‌های $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ و $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$، می‌توان معادلهٔ مفروض را، به‌این صورت نوشت:

$$4\cos^2 x-4\cos x-3-3k=0 \qquad (3)$$

معادلهٔ درجهٔ دوم زیررا درنظرمی گیریم:

$$4z^2-4z-3-3k=0 \qquad (4)$$

مبیّن این معادله، برابراست با $\Delta=16(4+3k)$. درحالت $\Delta<0$، معادلهٔ (۴)، ریشه‌های حقیقی ندارد. بنابراین، به‌ازای $k<-1$، معادلـهٔ (۴) و، درنتیجه، معادلهٔ (۳)، دارای جواب نیست.

ضمناً، روشن است که Δ، به‌ازای هیچ مقدار درستی از k، برابرصفر نمی‌شود. به‌ازای $k\geqslant-1$، معادلهٔ (۴)، دوریشه دارد.

$$z_1=\frac{1+\sqrt{4+3k}}{2}\ ,\quad z_2=\frac{1-\sqrt{4+3k}}{2}$$

بنابراین، معادلهٔ (۳)، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\cos x=z_1 \quad \text{و} \quad \cos x=z_2 \qquad (5)$$

$$z_1>1 \quad \text{و} \quad z_2<-1$$

وبنابراین، هیچ‌کدام از معادله‌های مجموعهٔ (۵)، جواب ندارند. تنهـا سه حالت برای تحقیق باقی می‌ماند: $k=-1$، $k=0$ و $k=1$.

درحالت $k=-1$ داریم: $z_1=1$ و $z_2=0$ ومعادله‌های مجموعه، دارای جواب‌اند:

$$x=2m\pi(m\in Z)\ ,\ x=n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$$

به‌این‌ترتیب، $k=-1$ با شرط‌های مساله سازگار است.

درحالت $k=0$ داریم: $z_1=\frac{3}{2}$ و $y_2=-\frac{1}{2}$. معادلهٔ $\cos x=\frac{3}{2}$ جواب ندارد و جواب‌های معادلهٔ $\cos x=-\frac{1}{2}$ چنین است.

$$x=2ln\pm\frac{2\pi}{3}(l\in Z)$$

یعنی $k=0$ هم با شرط‌های مساله سازگار است.

درحالت $k=1$ داریم: $z_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $z_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$. معادلـهٔ $\cos x=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ جواب ندارد وجواب‌هـای معادلـهٔ $\cos x=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

عبارتند از:

$$x = ۲p\pi \pm \arccos\frac{۱-\sqrt{۷}}{۲}(p\in Z)$$

بنابراین، ۱ = k هم با شرط‌های مساله سازگار است. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، تنها به‌ازای ۱ − = k، ۰ = k و ۱ = k دارای جواب است.

پاسخ: بـه‌ازای ۱ − = k داریـم: $x = ۲m\pi$ و $x = n\pi + \frac{\pi}{۲}$ $(m ، n\in Z)$؛ به‌ازای ۰ = k داریم: $x = ۲l\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ $(l\in Z)$؛ به‌ازای ۱ = k داریم: $x = ۲p\pi \pm \arccos\frac{۱-\sqrt{۷}}{۲}$ $(p\in Z)$.

۶. چون $۳^{۴۰x^۲} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۴۰x^۲}$، بنابراین ، نامعادلهٔ مفروض را می‌تــوان چنین نوشت:

$$۳^{۴x^۲-۳+\frac{۱}{۲}} < ۲^{۴۰x^۲}$$

که هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$۴x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۲} < ۴۰x^۲ \implies ۳۶x^۲ + ۳x - \frac{۱}{۲} > ۰ \quad (۶)$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $۳۶x^۲ + ۳x - \frac{۱}{۲}$ دو جواب دارد: $x_۱ = -\frac{۱}{۶}$ و $x_۲ = \frac{۱}{۲}$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۶) و، درنتیجه، مجمــوعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اصلی، عبارتند از :

$$-\infty < x < -\frac{۱}{۶} \quad و \quad \frac{۱}{۱۲} < x < +\infty.$$

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x_۱ = -۳\frac{۱}{۴}$، $x_۲ = ۱\frac{۱}{۴}$؛ ۲. $\frac{۱۴}{۳}$؛

۳. $|O_1O_2|=14$؛ ۴. ۳۶ امتیاز؛ ۵. به‌ازای $k=0$ داریم:

$x=n\pi\ (n\in Z)$ و $x=2m\pi+\frac{\pi}{2}\ (m\in Z)$، به ازای $k=1$ داریم:

$x=n\pi+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}\ (n\in Z)$، به‌ازای $k=2$ داریم:

$x=l\pi+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2}$؛ ۶. $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$.

گروه سوم. ۱. $x_1=-7$، $x_2=3$؛ ۲. $|S_1S_2|=\frac{31}{6}$؛

۳. $\sqrt{6}$؛ ۴. ۲۲۰ کیلوگرم؛

۵. به‌ازای $k=0$ داریم: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\in Z)$، به‌ازای $k=1$ داریم:

$x=(2m+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}\ (m\in Z)$، به‌ازای $k=2$ داریم:

$x=(2l+1)\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{41}-3}{4}\ (l\in Z)$؛ ۶. $x<-\frac{1}{2}$، $x>\frac{1}{3}$.

گروه چهارم. ۱. $x_1=\frac{44}{5}$ ، $x_2=5\frac{1}{5}$؛ ۲. $\frac{14}{3}$؛

۳. $|A_1A_2|=\sqrt{7}$؛ ۴. ۵۶ مدال؛

۵. به ازای $k=0$ داریم: $x=n\pi\ (n\in Z)$ و $x=2m\pi+\frac{\pi}{2}\ (m\in Z)$،

به ازای $k=2$ داریم: $x=2p\pi+\frac{3\pi}{2}\ (p\in Z)$، به‌ازای $k=1$ داریم:

$x=l\pi+(-1)^{l+1}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (l\in Z)$؛ ۶. $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$.

§ ۱۱. دانشکدهٔ اقتصاد
(بخش برنامه‌ریزی و سیبرنتیک اقتصادی)

۱۹۷۷

گروه اول

۱. سمت راست معادله و مخرج کسر سمت چپ آن، غیرمنفی است، بنابراین،

جواب‌های معادله، باید با شرط $cos x \geqslant 0$ سازگار باشد. برای این‌مقدار-های x داریم: $|cos x| = cos x$، بنابراین، صورت مساله را می‌توان به این ترتیب، تنظیم کرد، جواب‌هایی ازمعادلهٔ

$$\frac{cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = cos x \qquad (1)$$

را پیدا کنیدکه درشرط $cos x \geqslant 0$ صدق کنند. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادلهٔ (۱)، تشکیل شده است از همهٔ مقدارهای x، به‌جز $x = -\frac{3}{2}$. در این حوزه، معادلهٔ (۱)، هم‌ارزست با مجموعهٔ دومعادلهٔ

$$\frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{و} \quad cos x = 0$$

جواب‌های معادلهٔ اول، عبارت است از $x = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m \in Z)$ ؛ و معادلهٔ دوم دوریشه دارد، $x_1 = -\frac{1}{2}$ و $x_2 = -\frac{5}{2}$. باید روشن کنیم که کدامیك ازاین جواب‌ها، با شرط‌های $cos x \geqslant 0$ و $x \neq -\frac{3}{2}$ سازگارند. روشن است که جواب‌های معادله $cos x = 0$ با این شرط‌ها سازگارند،زیرا به‌ازای هیچ مقداری از m، مقدار $m\pi + \frac{\pi}{2}$ برابربا $-\frac{3}{2}$ نمی‌شود. از طرف‌دیگر، با توجه به‌این که $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$، داریم: $cos\left(-\frac{1}{2}\right) = cos\frac{1}{2} > 0$. یعنی $x = -\frac{1}{2}$ با شرط‌های موردنظر سازگار است. داریم:
$-\pi < -\frac{5}{2} < -\frac{\pi}{2}$ و،درنتیجه: $cos\left(-\frac{5}{2}\right) < 0$، یعنی $-\frac{5}{2}$ جوابی از معادلهٔ اصلی نیست.

پاسخ: $x = -\frac{1}{2}$ و $x = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m \in Z)$.

۲. فاصلهٔ بین A و B را برابر S کیلومتر، سرعت موتور سوار را در مسیر

از B به A برابر u کیلومتر در ساعت، سرعت دوچرخه سوار را برابر v کیلومتر درساعت ونسبت سرعت موتورسواررا درمسیراز A به B، به‌سرعت دوچرخه‌سوار، برابر x می گیریم. در این صورت، سرعت موتورسوار در مسیر از A به B، برابر vx کیلومتر درساعت، می‌شود.

موتور سوار، در مسیراز A تا B، به‌اندازهٔ $\frac{S}{v \cdot x}$ ساعت وقت صرف می کند. بنابرفرض، این زمان، برابراست با زمانی که از لحظهٔ آغاز حرکت موتورسوار از B تا نخستین ملاقات او با دوچرخه سوار، طول کشیده است. دراین مدت، دوچرخه‌سوار، به‌اندازهٔ $\left(\frac{S}{v \cdot x} \cdot v\right)$ کیلومتر وموتورسوار، به‌اندازهٔ $\left(\frac{S}{v \cdot x} \cdot u\right)$ کیلومتر پیموده‌اند. چون، در لحظهٔ آغاز حرکت موتورسوار از B، فاصلهٔ بین او و دوچرخه‌سوار، برابر $\frac{۳}{۴}S$ بوده است، بنابراین

$$\frac{S}{v \cdot x} \cdot v + \frac{S}{v \cdot x} \cdot u = \frac{۳}{۴}S$$

ویا، با توجه به‌مثبت‌بودن مقدارهای v و S :

$$\frac{۱}{x} + \frac{u}{v \cdot x} \cdot u = \frac{۳}{۴}S \qquad (۲)$$

موتورسوار، روی هم، $\left(\frac{S}{u} + \frac{S}{v \cdot x}\right)$ ساعت درراه بوده است.در این مدت؛ دوچرخه‌سوار $\frac{۳}{۴}S$ کیلومتررا طی کرده است، بنابراین

$$\left(\frac{S}{u} + \frac{S}{v \cdot x}\right) \cdot v = \frac{۳}{۴}S \implies \frac{v}{u} + \frac{۱}{x} = \frac{۳}{۴} \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید: $\frac{u}{v} = \frac{۴x}{۳x - ۴}$، که اگر به‌جای $\frac{u}{v}$ درمعادلهٔ (۲) قراردهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{1}{x}+\frac{4x}{3x-4}=\frac{3}{4}$$

این معادله دو ریشه دارد: $x_1=4$ و $x_2=\frac{4}{9}$. از فرض مساله پیداست که سرعت موتورسوار درمسیراز A به B، بیشتراز سرعت دوچرخه‌سوار است، یعنی باید داشته باشیم: $x>1$ و، بنابراین، تنها جواب $x=4$ قابل قبول است.

پاسخ: سرعت موتورسواردرمسیراز A به B، ۴برابرسرعت‌دوچرخه‌سواراست.

۴. a را مقدار مجهول پارامتر و (x_0, y_0) را جواب دستگاه می‌گیریم. به‌سادگی دیده می‌شود که، دراین صورت، $(-x_0, -y_0)$، (y_0, x_0) و $(-y_0, -x_0)$ هم جواب‌هایی ازدستگاه خواهند بود. جواب‌های (x_0, y_0) و $(-x_0, -y_0)$ با هم فرق دارند، زیرا درغیراین‌صورت، باید داشته باشیم: $x_0=0$ و $y_0=0$، که در معادله‌های دستگاه صدق نمی‌کنند. همچنین، جواب‌های (x_0, y_0) و $(-y_0, -x_0)$ هم‌متفاوت‌اند، زیرا در غیراین‌صورت، باید داشته باشیم: $x_0+y_0=0$ که بازهم در معادله‌های دستگاه صدق نمی‌کند. بنابرشرط، دستگاه باید دقیقاً دوجواب داشته باشد، یعنی جواب‌های (x_0, y_0) و (y_0, x_0) باید برهم منطبق باشند (که دراین‌صورت، جواب‌های $(-x_0, -y_0)$ و $(-y_0, -x_0)$ هم برهم منطبق خواهند شد)، یعنی داشته باشیم: $x_0=y_0$. اگر درمعادلهٔ دوم دستگاه x_0 را به‌جای y_0 قرار دهیم، به‌معادلهٔ $4x^2=14$ می‌رسیم، که دارای دوریشه است: $x_0'=\sqrt{\frac{7}{2}}$ و $x_0''=-\sqrt{\frac{7}{2}}$. بنابراین، اگر a، مقدار مطلوب باشد، باید داشته باشیم: یا $x_0=y_0=\sqrt{\frac{7}{2}}$ و یا $x_0=y_0=-\sqrt{\frac{7}{2}}$. اگرهریك ازاین مقدارها را به‌جای x و y درمعادلهٔ اول دستگاه قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$2(1+a)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2} \implies a=\frac{5}{2}$$

به‌این ترتیب، اگرa، مقدار مطلوب پارامتر باشد، تنها می‌تواند برابر با $\frac{5}{2}$

شود. ثابت می کنیم که درواقع هم، دستگاه مفروض مساله، به‌ازای $a=\frac{5}{2}$ ، دارای دوجواب (وتنها دوجواب) است.

دستگاه مفروض، به‌ازای $a=\frac{5}{2}$، چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ (x+y)^2=14 \end{cases} \qquad (4)$$

اگردوطرف معادلهٔ اول دستگاه (۴) را در ۲ ضرب و، سپس، از معادلهٔدوم دستگاه کم کنیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ -(x-y)^2=0 \end{cases} \qquad (5)$$

که دستگاهی هم‌ارز با دستگاه (۴) است.

دستگاه (۵)، هم‌ارز است با این دستگاه

$$\begin{cases} y=x \\ 2x^2=7 \end{cases}$$

که دقیقاً دوجواب دارد: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}},\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ و $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}},-\sqrt{-\frac{7}{2}}\right)$.

پاسخ: $a=\frac{5}{2}$.

۴. $ABCD$ را ذوزنقهٔ مفروض مــی گیریم (شکل ۱۴۲): $AD=R\sqrt{3}$ و O مرکزدایره. ازمثلث متساوی‌الساقین AOD داریم:

$$\frac{1}{2}|AD|=R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AOD}\right) \Longrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AOD}\right)=\frac{|AD|}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابــراین $\widehat{AOD}=\frac{2\pi}{3}$. چون چهار ضلعی $ABCD$ محاط در دایره است، بنابراین: $\hat{B}+\hat{D}=\pi$. و چــون $BC\|AD$، یعنی $\hat{B}+\hat{A}=\pi$. بنابراین $\hat{A}=\hat{D}$ و

$$\widehat{BAO}=\hat{A}-\widehat{OAD}=\hat{D}-\widehat{ODA}=\widehat{CDO}$$

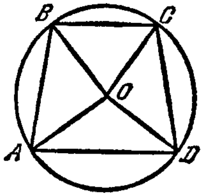
مثلث‌های ABO و DCO متساوی‌الساقین‌اند، بنا بر این

$$\widehat{AOB}=\pi-2\widehat{BAO}\text{ ، }\widehat{COD}=\pi-2\widehat{CDO}$$

از آنچه دیدیم، نتیجه می‌شود: $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$. $\widehat{AOB}$ را φ می‌نامیم. دراین صورت داریم:

$$\widehat{COD}=\varphi\text{ ، }\widehat{BOC}=2\pi-2\varphi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-2\varphi$$

به‌این ترتیب:



شکل ۱۴۲

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+$$

$$+S_{COD}+S_{AOD}=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}R^2\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)+$$

$$+\frac{1}{2}R^2\sin\varphi+\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}R\left[2\sin\varphi+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)+\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

از فرض مساله معلوم است که: $0<\widehat{BOC}<\pi$، ولی دراین‌صورت، برای‌زاویهٔφباید‌داشته باشیم$\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$. نقطه‌هایی راجست‌وجو می‌کنیم که، درآن‌ها، تابع

$$S(\varphi)=\frac{1}{2}R^2\left[2\sin\varphi+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)+\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

در بازهٔ $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$، به‌حداکثرمقدار خود برسد. تابع $S(\varphi)$ در همهٔ نقطه‌های خود مشتق‌پذیر است و داریم:

$$S'(\varphi)=\frac{1}{2}R^2\left[2\cos\varphi-2\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\varphi\right)\right]=$$

$$=2R^2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\varphi}{2}\right)$$

اگر داشته باشیم $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$، داریم:

$$\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{2}<\frac{7\pi}{22}$$

یعنی $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\varphi}{2}\right)>0$. برای همین مقدارهای φ داریم:

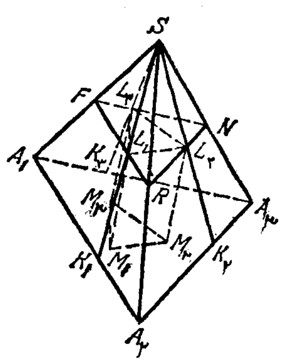
$$-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{2}-\frac{3\varphi}{3}<\frac{5\pi}{12}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که $S'(\varphi)$، دربازهٔ $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$، می‌تواند تنها در یك نقطه برابرصفر شود، که از برابری $\frac{2\pi}{3}-\frac{3\varphi}{2}=0$ بـه‌دست می آیـد؛ یعنی در نقطهٔ $\varphi=\frac{4\pi}{9}$. علاوه براین، $S'(\varphi)$ دربـازهٔ $\frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{4\pi}{9}$ مثبت ودربازهٔ $\frac{4\pi}{9}<\varphi<\frac{2\pi}{3}$ منفی است. چون $S|\varphi|$ در نقطهٔ $x=\frac{4\pi}{9}$ پیوسته است، بنابراین، $S(\varphi)$، حداکثرمقدار خـود را، در نقطهٔ $\varphi=\frac{4\pi}{9}$ به دست می آورد.

اکنون، ازمثلث متساوی‌الساقین AOB داریم:

$$|AB|=2R\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{AOB}\right)=2R\sin\frac{2\pi}{9}$$

پاسخ: $2R\sin\frac{2\pi}{9}$.



شکل ۱۴۳

۵. نقطه‌های برخورد صفحهٔ πرا با یال‌های SA_1وSA_2 و SA_3، به‌ترتیب، F، R وN مـی گیریـم (شکل ۱۳۴) صفحـهٔ SK_1K_2، صفحه‌هـای موازی FNR و $A_1A_2A_3$ را، به‌ترتیب در خط‌های راست L_1L_2 و K_1K_2 قطع مـی‌کند؛ یعنی $L_1L_2\|K_1K_2$. بـه همیـن تـرتیب، ثـابـت مـی‌شـود: $L_2L_3\|K_2K_3$ و $L_3L_1\|K_3K_1$. از

این‌جا نتیجه می‌شود که مثلث‌های $L_1L_2L_3$ و $K_1K_2K_3$ متشابه‌اند و ضریب تشابه برابراست با $|L_1L_2|:|K_1K_2|$. مثلث‌های SL_1L_2 و SK_1K_2 متشابه‌اند($L_1L_2||K_1K_2$)وداریم:

$$|L_1L_2|:|K_1K_2|=|SL_1|:|SK_1|$$

صفحهٔ SA_1A_2، صفحه‌های موازی FNR و $A_1A_2A_3$ را، به ترتیب، در خطهای راست FR و A_1A_2 قطع می کند، یعنی $FR||A_1A_2$. بنا به قضیهٔ مربوط به پاره‌خطهایی که به‌وسیلهٔ خطهای موازی، روی ضلع‌های یک زاویه جدا می‌شوند، داریم:

$$\frac{|SL_1|}{|SK_1|}=\frac{|SF|}{|SA_1|}=\frac{1}{2}$$

به‌این ترتیب، ضریب تشابه مثلث‌های $L_1L_2L_3$ و $K_1K_2K_3$، برابر است با $\frac{1}{2}$. بنابراین

$$S_{L_1L_2L_3}=\frac{1}{4}S_{K_1K_2K_3}$$

اکنون، به‌محاسبهٔ نسبت $\frac{S_{K_1K_2K_3}}{S_{A_1A_2A_3}}$ می پردازیم، به‌سادگی دیده می‌شود که

$$S_{K_1A_2K_2}=\frac{1}{2}|K_1A_2|\cdot|K_2A_2|\cdot sin K_1\widehat{A_2}K_2=$$

$$=\frac{1}{9}|A_1A_2|\cdot|A_2A_3|\cdot sin K_1A_2K_2=\frac{2}{9}S_{A_1A_2A_3}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می آید:

$$S_{K_2A_3K_3}=S_{K_3A_1K_1}=\frac{2}{9}S_{A_1A_2A_3}$$

وبنابراین

$$S_{K_1K_2K_3}=S_{A_1A_2A_3}-3\times\frac{2}{9}S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}$$

یعنی $S_{L_1L_2L_3}=\frac{1}{12}S_{A_1A_2A_3}$.

اگر H، ارتفاع هرم $S_{A_1A_2A_3}$ باشد، آن وقت، ارتفاع منشور برابر با $\frac{1}{2}H$ می‌شود (صفحهٔ FRN با صفحهٔ $A_1A_2A_3$ موازی است و داریم: $|SF|=\frac{1}{2}|SA_1|$). بنابراین، حجم v منشور، برابراست با

$$v=\frac{1}{2}H\cdot S_{L_1L_2L_3}=\frac{1}{24}H\cdot S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}H\cdot S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{8}V$$

پاسخ: $\frac{1}{8}V$.

۶. (x_0, y_0)را جوابی ازدستگاه معادله‌های‌مفروض‌می گیریم. بایداین‌برابری‌ها برقرار باشند:

$$y_0^{1-\frac{2}{5}\log_{x_0}y_0}=x_0^{\frac{2}{5}},\quad 1+\log_{x_0}\left(\frac{3y_0}{x_0}\right)=\log_{x_0}4$$

ازدرستی این برابری‌ها نتیجه می‌شود: $x_0>0$، $x_0\neq 1$، $y_0>0$ و $x_0>3y_0$. اگر در دوطرف معادلهٔ اول، درمبنای x_0 لگاریتم بگیریم و، درمعادلهٔ دوم، آنتی‌لگاریتم دو طرف را محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(1-\frac{2}{5}\log_{x_0}y_0\right)\log_{x_0}y_0=\frac{2}{5}\quad,\ x_0-3y_0=4\qquad(6)$$

$\log_{x_0}y_0$ را z می گیریم، معادلهٔ اول دستگاه (۶)، چنین می‌شود:

$$\frac{2}{5}z^2-z+\frac{2}{5}=0$$

که دارای دو ریشه است: $z_1=2$ و $z_2=\frac{1}{2}$. بنابراین، جواب‌های دستگاه مفروض مساله را باید ازبین‌جواب‌های یکی از دو دستگاه زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases}x-3y=4\\ \log_x y=2\end{cases}\ ,\qquad \begin{cases}x-3y=4\\ \log_x y=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad(7)$$

ازمعادلهٔ دوم دستگاه اول (۷)، به‌دست می‌آید: $y=x^2$، که اگر به‌جای y درمعادلهٔ اول قراردهیم، به‌معادلهٔ

$$x-3x^2=4$$

می‌رسیم. ولی این معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب ندارد. به‌این ترتیب، دستگاه اول (۷)، بدون جواب است.

ازمعادلهٔ دوم دستگاه دوم (۷) به‌دست می‌آید: $x = y^۲$؛ که اگر به جای x درمعادلهٔ اول قرار دهیم، به‌معادلهٔ

$$y^۲ - ۳y - ۴ = ۰$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: $y_۱ = ۴$ و $y_۲ = -۱$، و متناظر با آن‌ها داریم: $x_۱ = ۱۶$ و $x_۲ = ۱$. جواب (۱۶،۴) در معادله‌های دستگاه صدق می‌کند، ولی جواب (۱ ، ۱ −) در معادلهٔ دوم دستگاه دوم (۷) صدق نمی‌کند. یعنی دستگاه دوم (۷)، یك جواب منحصردارد.

به‌این، ترتیب اگردستگاه مفروض مساله، جوابی داشته باشد، این جواب، تنها می‌تواند $x_۱ = ۱۶$، $y_۱ = ۴$ باشد. اگراین عددها را، در معادله‌های دستگاه اصلی قراردهیم، معلوم می‌شود که، در واقع هم، درآن صدق می‌کنند.

پاسخ: $x = ۱۶$ ، $y = ۴$.

۷. a را عددی ثابت می گیریم حوزهٔ مقدارهای قابل قبول معادله، شامل همهٔ مقدارهای x است که در شرط زیرصدق کنند:

$$۹^x + ۹a^۳ > ۰$$

یعنی درحالت $a \geqslant ۰$، حوزهٔ‌تعریف‌معادله، همهٔ مقدارهای‌حقیقی‌x ودرحالت $a < ۰$، $x > log_۹ (-۹a^۳)$، است.

معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارز است بامعادلهٔ

$$۹^x + ۹a^۳ = ۳^x$$

که اگر ۳^x را y بنامیم، به‌معادلهٔ درجهٔ دوم زیرمی‌رسیم:

$$t^۲ - t + ۹a^۳ = ۰ \qquad (۸)$$

مبین این معادله، برابراست با $۱ - ۳۶a^۳$. بنابراین، اگر داشته باشیم: $۱ - ۳۶a^۳ < ۰$، یعنی $a > \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳۶}}$، معادله درجهٔ دوم (۸)، ریشه‌ای ندارد. روشن است که، دراین صورت، معادلهٔ مفروض هم، بدون جواب است.

درحالت $a = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳۶}}$، معادلهٔ (۸) یك‌جواب منحصر دارد: $t_۱ = \frac{۱}{۲}$. واین،

به‌معنای آن است‌که، در این حالت، معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارز است بامعادلهٔ $\frac{1}{2}=3^x$، که تنها به‌جواب منحصربه‌فرد $x=log_3\frac{1}{2}$ می‌رسد. بدون این‌که نیازی به‌تحقیق باشد که آیا این جواب در حوزهٔ تعریف معادله‌قراردارد یا نه، می‌توانیم نتیجه‌بگیریم که‌به‌ازای $a=\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$، معادلهٔ مفروض بیش ازیك جواب ندارد.

در حالت $a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$، معادلهٔ (۸) دارای دو ریشه است:

$$t_1=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \text{ و } t_2=\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$$

یعنی، دراین حالت، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$3^x=\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \text{ و } 3^x=\frac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2} \qquad (9)$$

اگر داشته باشیم $a\leqslant 0$، خواهیم داشت: $\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}\leqslant 0$ و معادلهٔ اول مجموعهٔ (۹) بدون‌جواب‌می‌ماند. دراین‌صورت، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز بامعادلهٔ دوم مجموعهٔ (۹) می‌شود که تنها یك‌جواب دارد. بنابراین،درحالت $a\leqslant 0$، معادلهٔ مفروض نمی‌تواند بیش ازیك جواب داشته باشد.

اگر داشته باشیم: $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$، مجموعهٔ معادله‌های (۹)، به این جواب‌ها می‌رسند:

$$x_1=log_3\frac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2} \text{ و } x_2=log_3\frac{1+\sqrt{1+36a^3}}{2}$$

وچون، دراین حالت، حوزهٔ تعریف معادلهٔ مفروض مساله، منطبق برمجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی است، بنابراین، x_1 و x_2 جواب‌های آن خواهند بود.

پاسخ: $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=1$، $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $\frac{32}{9}$

۳. $a=\frac{1}{4}$؛ ۴. ۲؛ ۵. $\sqrt[]{\frac{4}{81}}$؛ ۶. $x=4$، $y=16$،

۷. $-\frac{1}{4}<a<0$.

گروه سوم. ۱. $x=5$، $x=k\pi\ (k\in Z)$، ۲. $\frac{6}{5}$

۳. $a=\frac{1}{30}$، ۴. $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$؛ ۵. $\sqrt{\frac{5}{64}}$،

۶. $(9,3)$ ، $\left(\frac{1}{27},729\right)$، ۷. $0<a<\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

گروه چهارم. ۱. $x=-\frac{3}{2}$، $x=k\pi\ (k\in Z)$، ۲. ۳،

۳. $a=\frac{7}{3}$، ۴. $\frac{5\pi}{9}$، ۵. $\sqrt{\frac{81}{2000}}$،

۶. $x=3$، $y=27$؛ ۷. $-\frac{1}{8}<a<0$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. سه جمله‌ای درجه دوم x^2+x-1 دو ریشه دارد : $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$؛ ضمناً، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد: $x_2<\frac{\sqrt{3}}{3}$. بنابر-این، معادلهٔمفروض را، به‌طورجداگانه،دردوحوزهٔ $-\infty<x\leqslant\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ حل می‌کنیم.

درحوزهٔ $-\infty<x\leqslant\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$، سه‌جمله‌ای x^2+x-1 غیرمنفی است و، بنابراین، داریم: $|x^2+x-1|=x^2+x-1$ ومعادلهٔ مفروض، به‌صورت $x^2-x=0$ درمی‌آید. این معادله، دو ریشه دارد:

$x_۳ = ۰$ و $x_۴ = ۱$، که هیچ کدام از آن‌ها، درحوزهٔ مورد نظر قرار ندارند. یعنی معادلهٔ مفروض، دراین حوزه، جوابی ندارد.

درحوزهٔ $\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲} < x < \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ سه‌جمله‌ای $x^۲+x-۱$ منفی می‌شود وداریم: $|x^۲+x-۱| = -(x^۲+x-۱)$. درنتیجه، معادلهٔ مفروض، به صورت $x^۲+۳x-۲=۰$ درمی‌آید. این معادلهٔ درجهٔ دوم، دو ریشه دارد: $x_۵ = \frac{-۳-\sqrt{۱۷}}{۲}$ و $x_۶ = \frac{-۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$، که از آن‌ها، تنها $x_۶$ در حوزهٔ مورد نظر قراردارد. بنابراین، معادلهٔ مفروض، در حوزهٔ $x < \frac{\sqrt{۳}}{۳}$؛ تنها یك ریشه دارد:

$$x = \frac{-۳+\sqrt{۱۷}}{۲}.$$

پاسخ: $\frac{-۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$.

۰۴ زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ را φ می‌گیریم (شکل ۱۴۴)، در این صورت

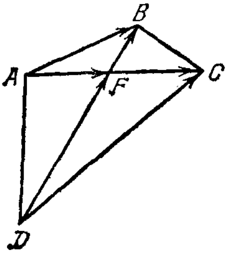
$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}$$

با استفاده از ویژگی‌های حاصل‌ضرب اسکالر بردارها و شرط‌های مساله، $|\overrightarrow{AB}|$، $|\overrightarrow{DC}|$ و $(\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC})$ را محاسبه می‌کنیم چون داریم

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}$ و $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FC}$

بنابراین

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) =$$
$$= (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FC}) =$$
$$= (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DF}) + (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FC}) +$$
$$+ (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{DF}) + (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}) =$$



شکل ۱۴۴

$$=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{DF}|\cdot\cos\widehat{BFC}+|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{FC}|\cdot\cos ۰^\circ+$$
$$+|\overrightarrow{FB}|\cdot|\overrightarrow{DF}|\cdot\cos ۰^\circ+|\overrightarrow{FB}|\cdot|\overrightarrow{FC}|\cdot\cos\widehat{BFC}=۱۳\ ،$$
$$|\overrightarrow{AB}|^۲=(\overrightarrow{AB}\ ،\ \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\ ،\ \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB})=$$
$$=|\overrightarrow{AF}|^۲+|\overrightarrow{FB}|^۲+۲|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{BF}|\cdot\cos\widehat{BFC}=۷۰\ ،$$
$$|\overrightarrow{DC}|^۲=(\overrightarrow{DC}\ ،\ \overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}\ ،\ \overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC})=$$
$$=|\overrightarrow{DF}|^۲+|\overrightarrow{FC}|^۲+۲|\overrightarrow{DF}|\cdot|\overrightarrow{FC}|\cdot\cos\widehat{BFC}=۲۸$$

واکنون به‌دست می‌آید $\cos\varphi=\frac{۱۳}{\sqrt{۷۰}\cdot\sqrt{۲۸}}=\frac{۱۳}{۱۴}$.

پاسخ: $\frac{۱۳}{۱۴}$.

۴. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول x ، برای معادله ، از شرط‌های $x>۰$ ، $x\neq ۲$ و $\frac{۷۵x}{۴}-\frac{۱۱}{x}>۰$ به‌دست می‌آید. یعنی حوزهٔ تعریف معادله،شامل دو بازه است: $\sqrt{\frac{۴۴}{۷۵}}<x<۲$ و $۲<x<+\infty$.چون،درحوزهٔ‌تعریف، داریم:

$$۳+\frac{۱}{\log_{۳۲}\frac{x}{۲}}=۳+\log_{\frac{x}{۲}}۳۲=\log_{\frac{x}{۲}}۴x^۳$$

بنابراین معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارز است با معادلهٔ

$$\log_{\frac{x}{۲}}(۴x^۳)=\log_{\frac{x}{۲}}\left(\frac{۷۵x}{۴}-\frac{۱۱}{x}\right)\Rightarrow ۴x^۴-۷۵x^۲+۱۱=۰\ \ (۱)$$

معادلهٔ درجهٔ دوم $۴z^۲-۷۵z+۱۱=۰$ دو ریشه دارد : $z_۱=۴$ و $z_۲=\frac{۱۱}{۱۶}$. بنابراین، معادلهٔ (۱)، هم‌ارز است بامجموعهٔ دومعادلهٔ

$$x^۲=۴\quad و\quad x^۲=\frac{۱۱}{۱۶}$$

یعنی، معادلهٔ (۱) دارای چهار ریشه است:

$$x_1=2 ،\ x_2=-2 ،\ x_3=\frac{\sqrt{11}}{4} ،\ x_4=-\frac{\sqrt{11}}{4}$$

که تنها یکی از آن‌ها، یعنی x_3، درحوزهٔ تعریف معادله قراردارد.

پاسخ: $x=\frac{\sqrt{11}}{4}$.

۴. فرض کنید بـرای تهیهٔ آلیاژ شامل ۴۰٪ منگنز، x کیلوگرم از آلیاژ اول، y کیلوگرم ازآلیاژ دوم و z کیلوگرم از آلیاژ سوم انتخاب کـرده باشیم. آلیاژ جدید $(x+y+z)$ کیلوگرم وزن‌داردکه درآن $(0/9y+0/6z)$ کیلوگرم منگنز وجود دارد. بنابراین

$$0/9y+0/6z=0/4(x+y+z)$$

یا

$$4x=5y+2z \qquad (2)$$

درآلیاژ جدید، به‌اندازهٔ $(0/7x+0/1y+0/25z)$ کیلوگرم مس ودر هرکیلوگرم آلیاژجدید، به‌اندازهٔ

$$M=\frac{0/7x+0/1y+0/25z}{x+y+z}$$

کیلوگرم مس وجود دارد. از (۲) نتیجه می‌شود: $x=\frac{5y+2z}{4}$ و بنابراین $M=\frac{13y+8z}{30y+20z}$. چـون، برای تهیهٔ آلیاژ جـدید؛ می‌توان مقدارهای مختلفی ازآلیاژهای اول، دوم وسوم انتخاب‌کرد، بنابراین، y وz می‌توانند هرعـدد غیرمنفی را اختیارکنند؛ ضمناً، y وz، باهـم نمی‌توانند برابرصفر شوند. اگر $y=0$ و $z\neq 0$، آن‌وقت $M=\frac{2}{5}$، واگر $y\neq 0$ و $z=0$ باشد، آن‌وقـت $M=\frac{13}{30}$. وبالاخره، اگر $y\neq 0$ و $z\neq 0$ آن‌وقت

$$M=\frac{13+8\times\frac{z}{y}}{30+20\times\frac{z}{y}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\times\frac{z}{y}}$$

چون $\frac{z}{y}>0$، به‌سادگی دیده می‌شود که داریم:

$$\frac{2}{5}<\frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\times\frac{z}{y}}<\frac{2}{5}+\frac{1}{30}=\frac{13}{30}$$

یعنی حداکثر مقدار مس در آلیاژ جدید برابر $100\times\frac{13}{30}$ درصد، یعنی $43\frac{1}{3}$% و حداقل آن برابر $100\times\frac{2}{5}$ درصد، یعنی ۴۰% می‌تواند باشد.

پاسخ: ۴۰% و $43\frac{1}{3}$%

۵. برای هر مقدار ثابت a، تابع مفروض، در تمامی نقطه‌های محور عددی، مشتق‌پذیر است. اگر تابع، در تمامی نقطه‌های خود، صعودی باشد، باید داشته باشیم: $f'(x)\geqslant 0$؛ و اگر، علاوه بر آن، $f(x)$ دارای نقطه‌های بحرانی نباشد، باید برای هر مقدار x داشته باشیم: $f'(x)\neq 0$. به‌این ترتیب، برای این که شرط‌های مساله رعایت شود، باید $f'(x)>0$ باشد. روشن است که اگر، برعکس، شرط $f'(x)>0$ برقرار باشد، تابع $f(x)$ صعودی است و نقطه‌های بحرانی ندارد.

مشتق $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=2\cos 2x-8(a+1)\cos x+(4a^2-8a+14)$$

اکنون می‌توان صورت مساله را، به‌این ترتیب، تنظیم کرد: مطلوب است محاسبهٔ همهٔ مقدارهای پارامتر a، به‌نحوی که به‌ازای هر کدام از آن‌ها، نامعادلهٔ زیر، برای همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد:

$$\cos 2x-4(a+1)\cos x+(2a^2+4a-7)>0$$

چون $\cos 2x=2\cos^2x-1$، بنابراین، می‌توان مساله را این طور تنظیم کرد: مطلوب است همهٔ مقدارهای a که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، حداقل تابع $g(t)=t^2-2(a+1)t+a^2+2a-4$، در بازهٔ $[-1,1]$، مقداری مثبت باشد. مشتق $g'(t)=2t-2(a+1)$، درنقطهٔ $t_0=a+1$، برابر صفر می‌شود. بنابراین، حداقل مقدار $g(t)$ در بازهٔ $[-1,1]$ ــ که آن را m می‌نامیم ــ برابر خواهد بود با

$$m=\begin{cases} g(-۱)=a^۲+۴a-۱ & (a+۱\leqslant -۱)\\ g(a+۱)=-۵ & (-۱<a+۱<۱)\\ g(۱)=a^۲-۵ & (a+۱\geqslant ۱)\end{cases}$$

چون، باید حداقل مقدار تابع $g(t)$، در بازهٔ $[-۱ ، ۱]$، مثبت باشد، بنا براین، مقدار پارامتر a، باید در یکی از دو شرط صدق کند: $a\leqslant -۲$ و $a\geqslant ۰$. اگر داشته باشیم $a\leqslant -۲$، حداقل مقدار $g(t)$، در بازهٔ $[-۱ ، ۱]$، برابر $a^۲+۴a-۱$ می‌شود و مقدارهای مورد نظر پارامتر a، از نامعادلهٔ $a^۲+۴a-۱>۰$ به‌دست می‌آید. درحالت $a\geqslant ۰$، حداقل مقدار تابع $g(t)$ برابر $a^۲-۵$ می‌شود و، در نتیجه، مقدارهای مطلوب a، ازنامعادلهٔ $a^۲-۵>۰$ به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های موردنظر پارامتر a، عبارت است از اجتماع جواب‌های دودستگاه نامعادله‌های

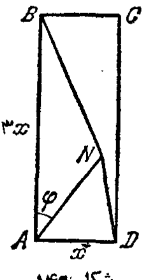
$$\begin{cases} a\leqslant -۲\\ a^۲+۴a-۱>۰\end{cases} \quad و \quad \begin{cases} a\geqslant ۰\\ a^۲-۵>۰\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های دستگاه اول، عبارت است از $-\infty<a<-۲-\sqrt{۵}$ و مجموعهٔ جواب‌های دستگاه دوم عبارت است از $\sqrt{۵}<a<+\infty$، که از اجتماع آن‌ها، مقدارهای مجهول a پیدا می‌شود.

پاسخ: $a<-۲-\sqrt{۵}$ و $a>\sqrt{۵}$.

۶. زاویهٔ BAN را φ و طول AD را x می‌گیریم (شکل ۱۴۵). آن وقت داریم:

$$\widehat{NAD}=\frac{\pi}{۲}-\varphi \quad و \quad |AB|=۳x$$



شکل ۱۴۵

با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث‌های BAN و DAN داریم:

$$|BN|^۲=|AB|^۲+|AN|^۲-$$
$$-۲|AB|\cdot|AN|\cdot cos\varphi$$
$$|ND|^۲=|AD|^۲+|AN|^۲-$$
$$-۲|AD|\cdot|AN|\cdot sin\varphi$$

یا

$$۳۲=۹x^۲+۲-۶\sqrt{۲}\cdot x cos\varphi$$

$$4 = x^2 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot x \sin\varphi$$

ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $\cos\varphi = \frac{3x^2 - 10}{2\sqrt{2} \cdot x}$ و از معادلهٔ دوم: $\sin\varphi = \frac{x^2 - 2}{2\sqrt{2} \cdot x}$. وبنا براین، باید داشته‌باشیم:

$$\left(\frac{3x^2 - 10}{2\sqrt{2} \cdot x}\right)^2 + \left(\frac{x^2 - 2}{2\sqrt{2} \cdot x}\right)^2 = 1$$

که بعد از ساده‌کردن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$5x^4 - 36x^2 + 52 = 0 \qquad (3)$$

سه‌جمله‌ای‌درجهٔ دوم $5t^2 - 36t + 52$ دوریشه دارد: $t_1 = 2$ و $t_2 = \frac{26}{5}$.

یعنی، معادلهٔ (۳)، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$x^2 = 2 \quad \text{و} \quad x^2 = \frac{26}{5}$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ (۳)، چهارجواب دارد:

$$x_1 = \sqrt{2}\,,\ x_2 = -\sqrt{2}\,,\ x_3 = \sqrt{\frac{26}{5}}\,,\ x_4 = -\sqrt{\frac{26}{5}}$$

طول پاره‌خط AD، مقداری مثبت است. بنابراین $x \neq x_2$ و $x \neq x_4$. اگر داشته باشیم: $x = \sqrt{2}$، به‌دست می‌آید $\sin\varphi = 0$، یعنی $\varphi = 0$ ونقطهٔ N روی ضلع AB قرارمی‌گیرد. ولی، طبق فرض، نقطهٔ N در درون مستطیل است. در نتیجه: $x = \sqrt{\frac{26}{5}}$ و

$$\cos\varphi = \frac{3 \times \frac{26}{5} - 10}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{26}{5}}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

مساحت مستطیل ABCD برابراست با $3x^2$، یعنی $\frac{78}{5}$.

پاسخ: $\cos\widehat{BAN} = \frac{7}{\sqrt{65}}$ و $S = \frac{78}{5}$.

۷. با توجه به‌رابطهٔ $sin^۲x = ۱ - cos^۲x$ و این که $t = cosx$ در بازهٔ $[-۱ ، ۱]$ قراردارد، صورت مساله رامی‌توان، این‌طور تنظیم کرد:مطلوب است همهٔ مقدارهای حقیقی پارامتر a، به‌نحوی‌که به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، حداقل مقدار تابع

$$t^۲ - ۲at + a^۲ + ۲a - ۳$$

دربازهٔ $-۱ \leqslant t \leqslant ۱$، عددی مثبت باشد. طول رأس سهمی

$$y = t^۲ - ۲at + a^۲ + ۲a - ۳ = (t-a)^۲ + ۲a - ۳$$

برابراست با a. بنابراین، m، حداقل تابع y، در بازهٔ $-۱ \leqslant t \leqslant ۱$، برابراست با

$$m = \begin{cases} y(-۱) = a^۲ + ۴a - ۲ & (a \leqslant -۱) \\ y(a) = ۲a - ۳ & (-۱ < a < ۱) \\ y(۱) = a^۲ - ۲ & (a \geqslant ۱) \end{cases}$$

چون حداقل تابع y، دربازهٔ $[-۱ ، ۱]$ باید مثبت باشد، بنابراین، در حوزهٔ $a \leqslant -۱$ باید داشته باشیم: $a^۲ + ۴a - ۲ > ۰$؛ همچنین، درحوزهٔ $-۱ < a < ۱$ داشته باشیم: $۲a - ۳ > ۰$ وبالاخره درحوزهٔ $a \geqslant ۱$ داشته باشیم. $a^۲ - ۲ > ۰$.

به‌این ترتیب، مجموعهٔ مقدارهای مطلوب پارامتر a، از اجتماع جواب‌های سه دستگاه نامعادله‌های زیربه‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} a \leqslant -۱ \\ a^۲ + ۴a - ۲ > ۰ \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} -۱ < a < ۱ \\ ۲a - ۳ > ۰ \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} a \geqslant ۱ \\ a^۲ - ۲ > ۰ \end{cases}$$

مجموعهٔجواب‌های دستگاه‌اول، عبارت است از $-\infty < a < -۲ - \sqrt{۶}$؛ دستگاه دوم جواب ندارد و، بالاخره، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه سوم عبارت است از $\sqrt{۲} < a < +\infty$.

پاسخ: $a < -۲ - \sqrt{۶}$ و $a > \sqrt{۲}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه اول. ۱. $\sqrt{۵} - ۱$؛ ۲. $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$؛ ۳. $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$؛ ۴. ٪۷۵ ٪۵۵؛

۵. $b<-3-\sqrt{3}$، $b>-1+\sqrt{3}$؛ ۶. $\frac{3}{\sqrt{10}}$؛

۷. $b<2-\sqrt{8}$، $b>2$.

گروه سوم. ۱. $\frac{\sqrt{113}-5}{4}$؛ ۲. $\frac{3}{\sqrt{130}}$؛ ۳. $\frac{\sqrt{33}}{3}$؛

۴. ٪۱۵، ٪۴۰؛ ۵. $a<-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$، $a>\sqrt{\frac{3}{2}}$؛

۶. $\frac{9}{\sqrt{130}}$، $\frac{39}{5}$؛ ۷. $a<-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$، $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

گروه چهارم. ۱. $-2-\sqrt{2}$؛ ۲. $\frac{2}{\sqrt{5}}$؛ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{2}$؛

۴. ٪۶۲/۵، ٪۵۵؛ ۵. $b<-\frac{3+\sqrt{7}}{2}$، $b>\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$؛

۶. $\frac{7}{\sqrt{85}}$، $\frac{34}{5}$؛ ۷. $b<-\frac{3+\sqrt{17}}{2}$، $b>2$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. $\cos x$ را u و $\sin y$ را v می‌گیریم دراین صورت $\cos 2x=2u^2-1$ و $\cos^2 y=1-v^2$، ودستگاه مفروض، چنین می‌شود:

$$\begin{cases} 4v^2+4v-6\sqrt{2}\cdot u-9=0 \\ 2u^2-1=0 \end{cases} \qquad (1)$$

ازمعادلهٔ دوم دستگاه (۱) به‌دست می‌آید: $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $u_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$، اگر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به‌جای u در معادلهٔ اول دستگاه (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$4v^2+4v-15=0 \qquad (2)$$

معادلهٔ (۲) دوریشه دارد: $v_1=\frac{3}{2}$ و $v_2=-\frac{5}{2}$. روشن است که هیچ کدام

از این دوجواب قابل قبول نیستند (زیرا داشتیم $v=\cos y$)· $u_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ را در معادله اول دستگاه (۱) می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

$$4v^2+4v-3=0$$

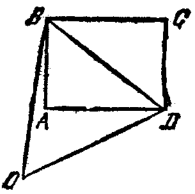
که دو جواب دارد: $v_3=\frac{1}{2}$ و $v_4=-\frac{3}{2}$. از این‌دوجواب، تنها $v_3=\frac{1}{2}$ قابل‌قبول است. به‌این‌ترتیب، تنها جواب قابل‌قبول دستگاه (۱) عبارت است از $u=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $v=\frac{1}{2}$. یعنی جواب‌های دستگاه مفروض مساله، عبارتند از جواب‌های دستگاه

$$\begin{cases} \cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

که جواب‌های آن، چنین‌اند:

$$x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}\,(n\in Z)\,,\ y=m\pi+(-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}(m\in Z)$$

۲. برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم $|AB|\leqslant|AD|$ (شکل ۱۴۶) چون $|AB||AD|=48$ و $|AD|^2+|AB|^2=|BD|^2=100$، پس $|AD|=8$ ، $|AB|=6$. چون $|BD|<13=|OD|=|OB|$، پس نقطهٔ O در بیرون دایرهٔ به قطر BD و بنابراین مستطیل قرار دارد فرض می کنیم، این نقطه، درهمان طرفی از قطر BD واقع باشد که نقطهٔ A واقع است. در این‌صورت، باید $|OC|$ را پیدا کرد. $\widehat{OBD}$ را β و $\widehat{DBC}$ را α می‌نامیم. داریم:



شکل ۱۴۶

$$\cos\alpha=\frac{|BC|}{|BD|}=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{|CD|}{|BD|}=\frac{3}{5}$$

از مثلث متساوی‌الساقین OBD به‌دست می‌آید.

$$cos\beta=\frac{\frac{۱}{۲}|BD|}{|OB|}=\frac{۵}{۱۳}$$

در این صورت: $sin\beta=\sqrt{۱-\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۲}}=\frac{۱۲}{۱۳}$. سپس

$$cos\widehat{OBC}=cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta=$$

$$=\frac{۴}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}-\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}=-\frac{۱۶}{۶۵}$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، درمثلث OBC، به‌دست می‌آید:

$$|OC|^{۲}=|OB|^{۲}+|BC|^{۲}-۲|OB|\cdot|BC|\cdot cos\widehat{OBC}=$$

$$=۱۶۹+۶۴-۲\times ۱۳\times ۸\left(-\frac{۱۶}{۶۵}\right)=\frac{۱۴۲۱}{۵}$$

و ازآن‌جا: $|OC|=۷\sqrt{\frac{۲۹}{۵}}$.

پاسخ : $۷\sqrt{\frac{۲۹}{۵}}$.

۳. مبلغ اولیهٔ پول را x واحد، میزان اضافه شدن پول در بانک اول را $\alpha\%$ ودر بانک دوم $\beta\%$ درسال می‌گیریم. مجموع پولی که درپایان سال‌های اول و دوم در دوبانک داریم، در اول فرض مساله، ما را به دو معادله می‌رسانند:

$$\frac{۵}{۶}x\left(۱+\frac{\alpha}{۱۰۰}\right)+\frac{۱}{۶}x\left(۱+\frac{\beta}{۱۰۰}\right)=۶۷۰ \qquad (۴)$$

$$\frac{۵}{۶}x\left(۱+\frac{\alpha}{۱۰۰}\right)^{۲}+\frac{۱}{۶}x\left(۱+\frac{\beta}{۱۰۰}\right)^{۲}=۷۴۹ \qquad (۵)$$

وبرای حالت دوم، وقتی که $\frac{۵}{۶}$ مبلغ را به بانک دوم وبقیه را به بانک اول سپرده‌ایم:

$$\frac{۵}{۶}x\left(۱+\frac{\beta}{۱۰۰}\right)+\frac{۱}{۶}x\left(۱+\frac{\alpha}{۱۰۰}\right)=۷۱۰ \qquad (۶)$$

معادله‌های (۴) و (۶) را، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} 5\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=\frac{6\times 670}{x} \\ \left(1+\frac{\alpha}{100}\right)+5\left(1+\frac{\beta}{100}\right)=\frac{6\times 710}{x} \end{cases}$$

با حل این دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$1+\frac{\alpha}{100}=\frac{660}{x}, \qquad 1+\frac{\beta}{100}=\frac{720}{x}$$

که اگر مقدارهای حاصل را برای $1+\frac{\alpha}{100}$ و $1+\frac{\beta}{100}$ در معادلهٔ (۵) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{5}{6}x\left(\frac{660}{x}\right)^2+\frac{1}{6}x\left(\frac{720}{x}\right)^2=749$$

این معادله، یك ریشه دارد: $x=600$؛ ولی در این صورت

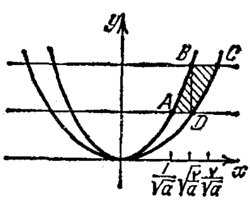
$$1+\frac{\alpha}{100}=\frac{660}{600}=1/1 \;,\quad 1+\frac{\beta}{100}=\frac{720}{600}=1/2$$

اگر تمامی مبلغ x را در بانك اول قرار دهیم، بعداز دو سال، مقدار آن، چنین می‌شود:

$$x\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^2=600\times 1/1^2=726$$

پاسخ: ۷۲۶ واحد پول.

۶. روی شکل ۱۴۷، منحنی‌های مفروض، باتثبیت a، وخطهای راست $y=1$ و $y=2$ رسم شده‌اند. باید مقدارهای $a\geqslant 1$ را طوری پیداکرد که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مساحت‌شکل‌هاشور‌خوردهٔ $ABCD$ حداکثر مقدار ممکن باشد. مختصات‌نقطه‌های A و D، ازحل دودستگاه زیر به‌دست می‌آید:



شکل ۱۴۷

$$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1 \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}ax^2 \\ y=1 \end{cases}$$

و مختصات نقطه‌های B و C، به ترتیب، با حل این دستگاه‌ها به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y=ax^۲ \\ y=۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y=\frac{۱}{۲}ax^۲ \\ y=۲ \end{cases}$$

با توجه به‌این‌که، طبق فرض، طول‌های نقطه‌های A ، B ، C و D، عددهایی مثبت‌اند، حاصل می‌شود:

$$A\left(\frac{۱}{\sqrt{a}}, ۱\right); D\left(\sqrt{\frac{۲}{a}}, ۱\right); B\left(\sqrt{\frac{۲}{a}}, ۲\right); C\left(\frac{۲}{\sqrt{a}}, ۲\right)$$

نقطه‌های D و B، طول‌هایی برابر دارند و، بنابراین، شکل هاشورخورده، از دوبخش تشکیل شده است:

الف) شکلی که زیرمنحنی $y=ax^۲$ و بالای خط راست $y=۱$ ، در فاصلهٔ از $\sqrt{\frac{۱}{a}}$ تا $\sqrt{\frac{۲}{a}}$، واقع است؛

ب) شکلی که‌بالای منحنی $y=\frac{۱}{۲}ax^۲$ و زیرخط راست $y=۲$، در فاصلهٔ از $\sqrt{\frac{۲}{a}}$ تا $\frac{۲}{\sqrt{a}}$ قراردارد.

برای S، مساحت شکل هاشورخورده، خواهیم داشت:

$$S=\int_{\sqrt{\frac{۱}{a}}}^{\sqrt{\frac{۲}{a}}}(ax^۲-۱)dx+\int_{\sqrt{\frac{۲}{a}}}^{\frac{۲}{\sqrt{a}}}\left(۲-\frac{۱}{۲}ax^۲\right)dx=$$

$$=\left(\frac{ax^۳}{۳}-x\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{۱}{a}}}^{\sqrt{\frac{۲}{a}}}+\left(۲x-\frac{ax^۳}{۶}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{۲}{a}}}^{\frac{۲}{\sqrt{a}}}=\frac{۱}{a}\left(\frac{۱۰}{۳}-۲\sqrt{۲}\right)$$

تابع $\frac{۱}{a}\left(\frac{۱۰}{۳}-۲\sqrt{۲}\right)$، دربازه حوزهٔ $a \geqslant ۱$، به‌طوریکنوا نزولی است. بنابراین، به ازای $a=۱$، به‌حداکثر مقدارخود، دراین حوزه، می‌رسد.

پاسخ: $a=۱$، $S=\frac{۱۰}{۳}-۲\sqrt{۲}$.

۵. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول این نامعادله، تشکیل شده است ازهمهٔ مقدارهای x، که دراین شرطها صدق کنند:

$$x^2-4x-11>0 \text{ ، } 2-5x-3x^2\neq 0$$

یعنی، حوزهٔ تعریف نامعادله، عبارت است از جتماع این سه بازه:

$$-\infty<x<-2 \text{، } -2<x<2-\sqrt{15} \text{، } 2+\sqrt{15}<x<+\infty$$

چون، دراین‌حوزه داریم:

$$\log_{11}(x^2-4x-11)^3=\frac{3\log_5(x^2-4x-11)}{\log_5 11}$$

$$\log_5(x^2-4x-11)^3=21\log_5(x^2-4x-11)$$

بنابراین، با معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$\left(2-\frac{3}{\log_5 11}\right)\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2}\leqslant 0 \qquad (7)$$

از نابرابری واضح $5^3>11^2$ یا $11<5^{\frac{3}{2}}$ نتیجه می‌شود: $\log_5 11<\frac{3}{2}$

و $2-\frac{3}{\log_5 11}<0$. بنابراین، نامعادله (۷)، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2}\geqslant 0$$

نامعادلهٔ اخیر، درحوزهٔتعریف نامعادلهٔ اصلی، هم‌ارز است با مجموعهٔ دو دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases}3x^2+5x-2>0\\ x^2-4x-11\geqslant 1\end{cases} \text{ ، } \begin{cases}3x^2+5x-2<0\\ x^2-4x-11\leqslant 11\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب‌های دستگاه اول، شامل دوبازه است:

$$-\infty<x<-2 \text{ ، } 6\leqslant x<+\infty \qquad (8)$$

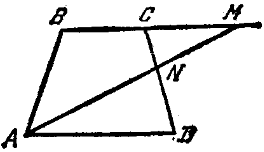
همهٔ این عددها، درحوزهٔ تعریف معادلهٔ اصلی، قرار دارند. مجموعهٔ جواب‌های دستگاه دوم، عبارت است ازبازهٔ $-2<x<\frac{1}{3}$، کـه از آن‌ها، تنها عددهای بازهٔ زیر، درحوزهٔ تعزیف نامعادلهٔ اصلی، قراردارند.

$$-2<x<2-\sqrt{15} \qquad (9)$$

از اجتماع مجموعه‌های (۸) و(۹)، مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اصلی، به دست می‌آید.

پاسخ: $x<-۲$، $-۲<x<۲-\sqrt{۱۵}$، $x\geqslant ۶$.

۶. نقطهٔ برخورد خط راست AM را با ضلع CD، با N نشان می‌دهیم (شکل ۱۴۸). h را ارتفاع مثلث AND و H را ارتفاع ذوزنقهٔ ABCD می‌گیریم. مساحت ذوزنقه برابر است با $\frac{۸+۴}{۲}H$. یعنی $۶H$؛ مساحت مثلث AND برابر است با $\frac{۱}{۲}\times ۸h$، یعنی $۴h$. چون، بنابر شرط، مساحت مثلث ذوزنقهٔ، باید ۴ برابر مساحت مثلث AND باشد، بنابراین: $۶H=۱۶h$ و از آن‌جا: $\frac{H}{h}=\frac{۸}{۳}$. دو مثلث AND و CNM متشابه‌اند و، بنابراین، داریم:



شکل ۱۴۸

$$\frac{|AD|}{h}=\frac{|CM|}{H-h}\Rightarrow|CM|=AD.\frac{H-h}{h}=۸\left(\frac{H}{h}-۱\right)=\frac{۴۰}{۳}$$

پاسخ: $|CM|=\frac{۴۰}{۳}$.

۷. معادلهٔ اول دستگاه را دو برابر و سپس، با معادلهٔ دوم دستگاه جمع می کنیم. در این صورت، به دستگاه زیر، که هم‌ارز دستگاه اصلی است، می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲-۲x-۱=۰ \\ ۳x^۲-۲y^۲-۶x-۴y=۵ \end{cases} \qquad (۱۰)$$

معادلهٔ اول دستگاه (۱۰) را در ۳ ضرب و، سپس، از معادلهٔ دوم کم می کنیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲-۲x-۱=۰ \\ -۲y^۲-۴y+۳=۵ \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که هم‌ارز با دستگاه اصلی است. معادلهٔ اول دستگاه (۱۱) دو ریشه دارد: $x_۱=۱+\sqrt{۲}$ و $x_۲=۱-\sqrt{۲}$. معادلهٔ دوم دستگاه(۱۱)، یك‌ریشه دارد: $y=-۱$.

پاسخ: $(1-\sqrt{2}, -1)$ ، $(1+\sqrt{2}, -1)$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}$ ، $y=2m\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(n, m\in Z)$؛

۲. $\arcsin\frac{14}{5\sqrt{24}}$؛ ۳. ۷۴۹ واحد پول؛ ۴. $a=2$ ، $S=\frac{7}{2}$؛

۵. $x\leqslant -2$ ، $1+\sqrt{8}<x<4$ ، $x>4$؛ ۶. $\frac{1}{2}$؛

۷. $\left(-2+\sqrt{\frac{2}{7}}, 1+3\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ و $\left(-2-\sqrt{\frac{2}{7}}, 1-3\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$.

گروه سوم. ۱. $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ، $y=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$ $(n, k\in Z)$؛

۲. $\sqrt{\frac{17}{5}}$؛ ۳. ۵۰۷ واحد پول؛ ۴. $a=4$ ، $S=\frac{13\sqrt{2}-10\sqrt{3}}{6}$؛

۵. $x\leqslant -3$ ، $1+\sqrt{15}<x<5$ ، $x>5$؛ ۶. $\frac{4}{5}$؛

۷. $(-1+\sqrt{2}, -2)$ ، $(-1-\sqrt{2}, -2)$.

گروه چهارم.

۱. $x=n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}$ ، $y=2m\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(n, m\in Z)$؛

۲. $\arcsin\frac{2}{5\sqrt{5}}$؛ ۳. ۵۰۷ واحد پول؛ ۴. $a=5$ ، $S=\frac{19}{12}$؛

۵. $x<-1$ ، $-1<x<2-\sqrt{8}$ ، $x\geqslant 5$؛ ۶. $\frac{8}{15}$؛

۷. $(2, 2+\sqrt{3})$ ، $(2, 2-\sqrt{3})$.

۱۹۸۰

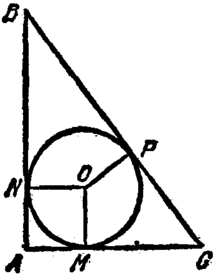
گروه اول

۱. نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$۲۶-۳^x>۲۵ \Rightarrow ۳^x<۱$$

نامعادلهٔ اخیر و، بنابراین، نامعادلهٔ اصلی، به‌جواب $x<۰$ می‌رسد.

پاسخ: $-\infty<x<۰$.



شکل۱۴۹

۲. رأس زاویهٔ قائمه را A ، ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه را AB و AC و O را مرکز دایرهٔ محاطی به شعاع r می‌گیریم و، ضمناً فرض می‌کنیم. $|AB|\geqslant|AC|$ (شکل ۱۴۹) . M و N و P را، به‌ترتیب، نقطه‌های تماس دایره با ضلع‌های AC و AB و BC می‌نامیم. روشن است که داریم :

$$|BN|=|BP|،\ \ |CM|=|CP|،\ \ |AN|=|AM|$$

چون $|AB|\geqslant|AC|$ ، ازاین برابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$|BP|\geqslant|CP| \Rightarrow |CP|:|BP|=۲:۳$$

$|CP|=۲x$ می‌گیریم، دراین صورت $|BP|=۳x$ ، $|BC|=۵x$.

شعاع وارد به‌نقطهٔ تماس، برخط مماس عمود است، بنابراین

$$OM\perp AC\ ،\ ON\perp AB$$

چون زاویهٔ A قائمه است، بنابراین، چهارضلعی $ANOM$ مستطیل است و داریم :

$$|AM|=|ON|=r،\ \ |AN|=|OM|=r$$

اکنون، به‌دست می‌آید :

$$|AC|=r+۳x،\ \ |AC|=r+۲x$$

محیط مثلث، برابر ۳۶ سانتیمتر است، پس

$$۵x+(r+۲x)+(r+۳x)=۳۶ \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر، بنابرقضیهٔ فیثاغورث

$$(r+۲x)^۲+(r+۳x)^۲=۲۵x^۲ \qquad (۲)$$

ازمعادلهٔ (۱) به‌دست‌می‌آید $r=۱۸-۵x$ ، که‌اگربه‌جای r درمعادلهٔ (۲) قراردهیم به‌این معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$x^{2}-15x-54=0$$

که تنها یك ریشهٔ مثبت دارد: $x=3$. ازاین‌جا $r=3$ و

$$|AB|=12^{cm},\ |AC|=9^{cm},\ |BC|=15^{cm}$$

پاسخ: ۱۲ سانتیمتر، ۹ سانتیمتر و ۱۵ سانتیمتر.

۳. راه حل اول. معادلهٔ اول دستگاه را، باتفاضل دومعادلهٔ اول و دوم دستگاه عوض می‌کنیم، به دستگاه‌زیر، که هم‌ارزبا دستگاه مفروض است، می‌رسیم:

$$\begin{cases} -2x^{2}+3x+2=0 \\ 5x^{2}+2xy-12x-4y+4=0 \end{cases} \qquad (3)$$

معادلهٔ اول این دستگاه، دوریشه دارد:

$$x_{1}=2 \text{ و } \quad x_{2}=-\frac{1}{2}$$

اگر در معادلهٔ دوم دستگاه(۳) قرار دهیم $x=2$، معلوم می‌شود که به‌ازای همهٔ مقدارهای y برقرار است. بنابراین، دستگاه (۳) و ، درنتیجه، دستگاه مفروض،جواب‌هایی به‌صورت $(2,y)$ دارد، که‌در آن، y هرعدد دلخواه‌است.

اگر $\frac{1}{2}$ را به‌جای x درمعادلهٔ دوم دستگاه (۳) قرار دهیم، به‌دست‌می‌آید $y=\frac{4}{9}$؛ یعنی جواب $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ هم دردستگاه (۳) و، درنتیجه ، دستگاه اصلی، صدق می‌کند.

راه‌حل دوم. دستگاه مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} (x-2)(3x+2y-3)=0 \\ (x-2)(5x+2y-2)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

ازآن‌جا نتیجه می‌شود که هرجواب به‌صورت $(2,y)$ دردستگاه صدق‌می‌کند، که درآن، y عبارت است ازهرعدد حقیقی‌دلخواه. درحوزهٔ $x\neq 2$،دستگاه (۴) هم ارزاست با دستگاه

$$\begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 5x+2y-2=0 \end{cases}$$

که یک‌جواب دارد: $x=-\frac{۱}{۲}$ ، $y=\frac{۹}{۴}$.

پاسخ: $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۴}\right)$ ، $(۲, y)$ — y، عدد حقیقی دلخواهی است.

۴. برای پیدا کردن بیشترین مقدار تابع $y(x)$، در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right]$ ، کافی است مقدار آن‌را در دو انتهای این بازه و، همچنین در نقطه‌های بحرانی واقع در بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right)$ به‌دست آوریم و، سپس، بین مقدارهای حاصل، بزرگترین عدد را انتخاب کنیم. چون تابع $y(x)$، در همهٔ نقطه‌های محور عددی، مشتق‌پذیر است، بنابراین نقطه‌های بحرانی آن، از معادلهٔ

$$y'(x)=۰ \quad \text{یا} \quad -۵\sin x+۵\sin ۵x=۰$$

به‌دست می‌آید. معادلهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin ۵x-\sin x=۰ \Rightarrow \sin ۲x\cos ۳x=۰$$

که هم‌ارز است با مجموعهٔ دو معادلهٔ

$$\sin ۲x=۰ \ , \ \cos ۳x=۰$$

معادلهٔ اول در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right]$ تنها جواب $x=۰$ و معادله دوم جواب $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=-\frac{\pi}{۶}$ را دارد. حالا محاسبه می‌کنیم:

$$y\left(-\frac{\pi}{۴}\right)=y\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۳\sqrt{۲}, \ y\left(\frac{\pi}{۶}\right)=y\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=۳\sqrt{۳}, \ y(۰)=۴$$

و روشن است که از بین این عددها، $۳\sqrt{۳}$ از همه بزرگتر است. بنابراین، حداکثر مقدار تابع $y(x)$ در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right]$ برابر است با $۳\sqrt{۳}$.

پاسخ: $۳\sqrt{۳}$.

۵. چون اتوبوس‌ها با یک سرعت و بعد از فاصله‌های زمانی برابر حرکت می‌کنند، و پیاده‌ها هم با یک سرعت پیش می‌روند، بنابراین، از لحظهٔ برخورد هر پیاده با kامین اتوبوس، تا لحظهٔ برخورد او با $(k+۱)$امین اتوبوس، برای هر مقدار k، زمان ثابتی است. این زمان ثابت را t دقیقه می‌گیریم. فرض می‌کنیم، درمدتی

که پیادهٔ سوم، فاصله از A تا D را پیموده است، n اتوبوس از اوجلوزده باشد. دراین‌صورت، پیادهٔسوم، برای رسیدن از A به D، به‌اندازهٔ $(n+۱)t$ دقیقه وقت صرف کرده است.

سرعت پیاده‌ها یکی است، بنابراین، هرپیاده، فاصلهٔ بین A و B را در $\frac{(n+۱)t}{۴}$ دقیقه وفاصلهٔ بین مرکزهای A و C را در $\frac{(n+۱)t}{۲}$ دقیقه طی می‌کند. چون آخرین اتوبوس، ازبین سه اتوبوس، قبل‌ازمرکز B، از اولین پیاده جلوزده است، بنابراین، پیادهٔ اول، درفاصلهٔ از A تا B، بیش از $۲t$ دقیقه وقت صرف کرده است، یعنی $\frac{(n+۱)t}{۴}>۲t$ وازآن‌جا $n>۷$.

تا نخستین برخورد پیادهٔ دوم با اتوبوس، کمتراز t دقیقه گذشته‌است ودرلحظهٔ این برخورد، فاصلهٔ زمانی او تا نقطهٔ C، بیشتر از $۴t$ دقیقه نیست (درغیراین صورت، پیادهٔ دوم بازهم تا رسیدن به C با ۱۴ اتوبوس دیگر و ، بنابراین، روی‌هم با ۵ اتوبوس برخورد خواهد داشت) . بنابراین $\frac{(n+۱)t}{۴}<۵t$ وازآن‌جا $n<۹$. ازنابرابری‌های $n>۷$ و $n<۹$ نتیجه می‌شود: $n=۸$.

پاسخ: ۸ اتوبوس.

۶. داریم:

$$sin\left(\frac{\pi}{۳}-x\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}cos x-\frac{۱}{۲}sin x$$

$$cos\left(\frac{\pi}{۶}-x\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}cos x+\frac{۱}{۲}sin x$$

معادلهٔ مفروض، به‌صورت $cos x=۱$ درمی‌آید که‌جواب‌های آن و، درنتیجه، جواب‌های معادلهٔ اصلی، چنین است: $(k\in Z)x=۲k\pi$.

پاسخ: $(k\in Z)x=۲k\pi$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x<۱$؛ ۲. ۶۰؛ ۳. $(-۱،۳)$، $(x،۲)(x\in R)$؛ ۴. $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$؛ ۵. ۷؛ ۶. $(k\in Z)۲k\pi$.

گروه سوم. ۱. $x<۱$؛ ۲. ۱۲،۵، ۱۳؛ ۳. $(۲،-۱)$ ، $(-۱،y)(y\in R)$؛ ۴. $۳\sqrt{۳}$؛ ۵. ۱۰؛

۶. $(k\in Z)\,2k\pi$.

گروه چهارم. ۱. $x<0$؛ ۲. ۲۴۰؛ ۳. $(2,-3)$، $(x,1)(x\in R)$؛

۴. $\frac{3}{2}$؛ ۵. ۱۶؛ ۷. $(k\in Z)\,2k\pi$.

§ ۱۲. دانشکدهٔ روان شناسی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، عبارت است از همهٔ مقدارهای x، که باشرط $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ سازگارباشند. تابع $y(x)=cos^2x$، دراین حوزه، مخالف صفراست. دو طرف معادلهٔ مفروض را در cos^2x ضرب و از رابطهٔ $sin^2x=1-cos^2a$ استفاده می‌کنیم، معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$8cos^4x+2cos^2x-3=0 \qquad (1)$$

که با معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف آن، هم‌ارزاست. معادلهٔ دو مجذوری (۱)، نسبت به مجهول $cos\,x$، دوجواب دارد و، بنابراین، معادلهٔ (۱) هم‌ارز است با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر

$$cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

جواب‌های معادلهٔ اول این مجموعه عبارت است‌از

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in Z)$$

وجواب‌های معادله دوم

$$x=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}\ (n\in Z)$$

که همهٔ آن‌ها، درحوزهٔ تعریف معادله قرار دارند. روشن است که همهٔ این

جواب‌ها را می‌توان به‌صورت $x=\frac{۱}{۴}m\pi+\frac{\pi}{۴}$ $(m\in Z)$ نوشت.

پاسخ: $x=\frac{۱}{۲}m\pi+\frac{\pi}{۴}$ $(m\in Z)$.

۲. معادله مماس بر نمودار تابع $y(x)$، درنقطهٔ به مختصات $(x_\circ, y(x_\circ))$، به این صورت است:

$$y=y(x_\circ)+y'(x_\circ)(x-x_\circ)$$

همین معادله را می‌توان به‌صورت $y=kx+b$ نوشت، که در آن داریم: $k=y'(x_\circ)$ و $b=y'(x_\circ)-y'(x_\circ)\cdot x_\circ$. خط مماس، محور Ox را درنقطهٔ به مختصات $\left(-\frac{b}{k}, \circ\right)$ ومحور Oy رادر نقطهٔ به‌مختصات $(\circ, b)$ قطع می‌کند. بنابرفرض مساله، باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$-\frac{b}{k}>\circ,\ b<\circ,\ ۲\left(-\frac{b}{k}\right)=-b$$

با توجه به این‌که $b<\circ$، معادلهٔ اخیر، به‌صورت $k=۲$ درمی‌آیدو دستگاه شرط‌های فوق، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases}k=۲\\ b<\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'(x_\circ)=۲\\ y(x_\circ)-y'(x_\circ)\cdot x_\circ<\circ\end{cases}$$

چون داریم: $y'(x)=۳x^۲-۶x-۷$ و طول‌های نقطه‌های مجهول، از حل معادله $۳x^۲-۶x-۹=\circ$ به‌دست می‌آیند. این معادله، دو ریشه دارد: $x_۱=۳$ و $x_۲=-۱$. این جواب‌ها را، باید با شرط $b<\circ$ مورد تحقیق قراردهیم. داریم:

$$y(۳)-y'(۳)\times ۳=-۱۵-۶=-۲۱<\circ,$$
$$y(-۱)-y'(-۱)\cdot(-۱)=۹>\circ$$

بنابراین، تنها یک نقطه وجود داردکه با شرط‌های مساله سازگاراست. مختصات این نقطه، چنین است:

$$x_\circ=۳,\ y_\circ=y(۳)=-۱۵$$

طول پاره‌خط‌هایی که مماس درنقطهٔ $(۳, -۱۵)$، روی محورهای Oy و Ox جدا می‌کند، به‌ترتیب، برابرند با

$$-b=y'(x_\circ)\cdot x_\circ-y(x_\circ)=۲۱\ ,$$

$$-\frac{b}{k}=\frac{y(x_\circ)}{y'(x_\circ)}-x_\circ=\frac{۲۱}{۲}$$

پاسخ: تنها یك نقطهٔ تماس وجود دارد: (۱۵ — ،۳)،طول پاره‌خطها برابراست با $\frac{۲۱}{۲}$ و ۲۱.

۰۳ تعداد اتومبیل‌های تولیدی کارخانهٔ اول را، درهرشبانه روز، x اتومبیل می گیریم. بنابراین، کارخانهٔ دوم، قبل از به راه افتادن خط جدید، درهر شبانه‌روز $\frac{۹۵x}{۱۰۰}$ اتومبیل تولید می کرد وبعداز به راه افتادن خط جدید، تعداد اتومبیل‌های تولیدی کارخانهٔ دوم به $\frac{۹۵x}{۱۰۰}+\frac{۲۳x}{۱۰۰}$ عدددر هرشبانه‌روز رسید. باتوجه به‌فرض مساله، به دستگاه نامعادله‌های زیرمی‌رسیم:

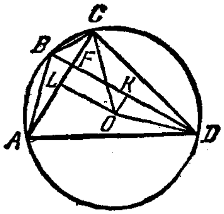
$$\begin{cases} x\leqslant ۹۵۰ \\ \frac{۹۵x}{۱۰۰}+\frac{۲۳x}{۱۰۰}<۱۰۰۰ \end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه، به‌صورت بازهٔ $۸۴۵\frac{۴۱}{۵۹}<x\leqslant ۹۵۰$ در می آید.

چون عددهای $\frac{۹۵x}{۱۰۰}$ و $\frac{۲۳x}{۱۰۰}$ باید عددهایی درست باشند، xباید بر ۱۰۰ بخش‌پذیرباشد و، بنابراین، به‌دست می آید: $x=۹۰۰$. یعنی کارخانهٔ اول، درهرشبانه‌روز۹۰۰ اتومبیل تولید می کند وکارخانهٔ دوم، قبل ازبه راه افتادن خط جدید، به‌اندازهٔ $\frac{۹۵x}{۱۰۰}$، یعنی۸۵۵ اتومبیل تولید می کرده است.

پاسخ: ۹۰۰ و ۸۵۵.

۰۴ ABCD را، چهارضلعی مفروض می‌گیریم (شکل ۱۵۰). قطرهای AC و BD ازاین چهارضلعی را رسم می‌کنیم برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم، قطرAC،به‌فاصلهٔ ۹سانتی‌متری ازنقطهٔO مرکزدایره واقع باشد. مثلث ABD، یك مثلث محاطی است‌و، بنابراین، مرکزدایره، روی عمودی



شکل ۱۵۰

که ازنقطهٔ K، وسط پاره‌خط BD، براین ضلع رسم کرده باشیم. مثلث ACD هم در دایره محاط است، بنابراین، مرکزدایره روی عمودمنصف پاره‌خط AC قراردارد (L، وسط پاره‌خط AC است). از مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OKD و OCL، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$|KD| = \frac{۱}{۲}|BD| = \sqrt{|OD|^۲ - |OK|^۲},$$

$$|LC| = \frac{۱}{۲}|AC| = \sqrt{|OC|^۲ - |OL|^۲}$$

چون $|OD| = |OC| = R = ۱۷^{cm}$ و $|OL|$ و $|OK|$ — فاصله‌های مرکزدایره تا قطرها، برابرند با ۹سانتی‌متر و ۸ سانتی‌متر، بنابراین

$$|KD| = \sqrt{۱۷^۲ - ۸^۲} = ۱۵^{cm} \text{ و } |LC| = \sqrt{۱۷^۲ - ۹^۲} = \sqrt{۲۰۸}^{cm}$$

به‌این ترتیب، طول قطرهای چهارضلعی به‌دست می‌آیند:

$$|BD| = ۳۰^{cm}, |AC| = ۸\sqrt{۱۳}^{cm}$$

نقطهٔ برخورد قطرها را F می‌گیریم. چون‌قطرها برهم عمودند، چهارضلعی OKFL، مستطیل‌می‌شود. یعنی $|LF| = |OK|$ و $|FK| = |OL|$. ولی در این‌صورت

$$|CF| = |CL| - |OK|, |AF| = |AL| + |OK|,$$
$$|DF| = |DK| + |OL|, |BF| = |BK| - |OL|$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که نقطهٔF، قطرBD را به پاره‌خط‌های به‌طول ۲۴ سانتی‌متر و۶سانتی‌متر وقطر AC را به پاره خط‌های به‌طول$(۴\sqrt{۱۳} - ۸)$ سانتی‌متر و $(۴\sqrt{۱۳} + ۷)$ سانتی‌متر، تقسیم می‌کند. چون مثلث‌هایAFB، BFC، CFD و AFD قائم‌الزاویه‌اند، می‌توان طول ضلع‌های چهارضلعی را به‌دست آورد:

$$|DC| = \sqrt{۲۴^۲ + (۴\sqrt{۱۳} - ۸)^۲} = \sqrt{۸۴۸ - ۶۴\sqrt{۱۳}},$$
$$|AD| = \sqrt{۲۴^۲ + (۴\sqrt{۱۳} + ۸)^۲} = \sqrt{۸۴۸ + ۶۴\sqrt{۱۳}},$$

$$|BC|=\sqrt{6^2+(4\sqrt{13}-8)^2}=\sqrt{308-64\sqrt{13}}$$
$$|AB|=\sqrt{6_2+(4\sqrt{13}+8)^2}=\sqrt{308+64\sqrt{13}}$$
این رادیکال‌های مرکب به رادیکال‌های ساده تبدیل می‌شوند و، سر آخر، داریم:

$$|DC|=4(2\sqrt{13}-1),\qquad |AD|=4(2\sqrt{13}+1)$$
$$|BC|=2(8-\sqrt{13}),\qquad |AB|=2(8+\sqrt{13})$$

۵. روشن است که دستگاه وقتی، و تنها وقتی، دست کم یك جواب دارد که نامعادلهٔ زیر، دست کم، یك جواب، داشته باشد:

$$x^2+(2ax^2+3)^2<4 \qquad (2)$$

تابع $t+(2at+3)^2$ را $f(t)$ می‌نامیم. نامعادلهٔ (۲)، تنها درحالتی جواب دارد که کمترین مقدار $f(t)$، دربازهٔ $t\geqslant 0$، از ۴ کوچکتر باشد. این مقدار $f(t)$ را محاسبه می‌کنیم.

به‌ازای $a=0$ داریم: $f(t)=t+9$، که حداقل آن، دربازهٔ $t\geqslant 0$، برابراست با ۹، که از ۴ بزرگتراست بنابراین، $a=0$، جواب مساله نیست.

درحالت $a\neq 0$، نمودارتابع

$$f(t)=t+(2at+3)^2=4a^2t^2+(12a+1)t+9$$

یك سهمی است که شاخه‌های آن به سمت بالا امتداد دارند وطول راس آن برابراست با $t_0=-\dfrac{12a+1}{8a^2}$. اگر $t_0<0$، یعنی اگر $12a+1\geqslant 0$، $a\neq 0$، آن‌وقت، درمجموعهٔ $t\geqslant 0$، تابع $F(t)$ به‌طوریکنواصعودی است و، بنابراین، حداقل‌مقدار آن، دراین مجموعه، برابراست با $f(0)=9>4$.

بنابراین، همهٔ‌مقدارهای‌مورد نظر a، درحوزهٔ $12a+1<0$ قراردارند. دراین حوزه، نقطهٔ t_0 درحوزهٔ $t\geqslant 0$ قرارمی گیرد وحداقل مقدار $f(t)$ برابراست با

$$F(t_0)=4a^2\left(-\frac{12a+1}{8a^2}\right)^2-\frac{(12a+1)^2}{8a^2}+9=-\frac{24a+1}{16a^2}$$

به این ترتیب، همهٔ مقدارهای مجهول a، از حل دستگاه نامعادله‌های زیر، به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} 12a+1<0 \\ -\dfrac{24a+1}{16a^2}<4 \end{cases}, \qquad (3)$$

دستگاه (۳)، هم‌ارزاست با دستگاه

$$\begin{cases} 12a+1<0 \\ 64a^2+24a+1>0 \end{cases}$$

سه جمله‌ای درجهٔ دوم $64a^2+24a+1$ دو ریشه دارد: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{16}$؛

ضمناً داریم: $-\frac{1}{12}<\frac{-3-\sqrt{5}}{16}$ و $\frac{-3+\sqrt{5}}{16}>-\frac{1}{12}$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه (۳) و ، در نتیجه، مجموعهٔ مقدارهای موردنظر پارامتر a، عبارت است از $a<\frac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

پاسخ: $a<-\frac{3+\sqrt{5}}{16}$.

۶. (x_0, y_0) را جوابی ازدستگاه مفروض می‌گیریم. دراین‌صورت داریم:

$$(1+2\log_{|x_0y_0|}2)\cdot\log_{x_0+y_0}|x_0y_0|=1,\ x_0-y_0=2\sqrt{3} \qquad (4)$$

بنابراین، x_0 و y_0 باید درشرط‌های $0<x_0+y_0\neq 1$ و $|x_0y_0|\neq 1$ صدق کنند. ولی دراین صورت

$$\log_{x_0+y_0}|x_0y_0|=\frac{1}{\log_{|x_0y_0|}(x_0+y_0)}$$

وبنابراین، برابری اول (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$1+2\log_{|x_0y_0|}2=\log_{|x_0y_0|}(x_0+y_0)$$

ازآن‌جا: $4|x_0y_0|=x_0+y_0$. یعنی، هرجوابی‌ازدستگاه مفروض معادله، جوابی ازدستگاه زیر است:

$$\begin{cases} 4|xy|=x+y \\ x-y=2\sqrt{3} \end{cases} \qquad (5)$$

اگر $x-2\sqrt{3}$ را به‌جای y در معادلهٔ اول دستگاه (۵) قراردهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$4|x(x-2\sqrt{3})|=2x-2\sqrt{3} \qquad (6)$$

چون سمت چپ معادلهٔ (۶)، به‌ازای هرمقدارx، مثبت است، باید همهٔ

جواب‌های معادلهٔ (۶)، درشرط $x \geqslant ۳$ صدق کنند. برای این که درمعادلهٔ (۶)، از علامت قدرمطلق آزاد شویم، حوزهٔ $x \geqslant \sqrt{۳}$ را به‌دوبازه تقسیم می‌کنیم: $\sqrt{۳} \leqslant x < ۲\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۳} \leqslant x < +\infty$ ومعادله را درهریك از این دوبازه، به‌طور جداگانه، حل می‌کنیم.

دربازهٔ $\sqrt{۳} \leqslant x < ۲\sqrt{۳}$، معادلهٔ (۶)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$-۲x(x-۲\sqrt{۳})=x-\sqrt{۳} \Rightarrow ۲x^۲-(۴\sqrt{۳}-۱)x-\sqrt{۳}=۰$$

که دوریشه دارد: $x_۱=\frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۲}$ و $x_۲=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$، که ازآن‌ها، تنها $x_۱$ دربازهٔ $\sqrt{۳} \leqslant x < ۲\sqrt{۳}$ قراردارد. یعنی، دراین‌بازه، معادلهٔ (۶)،دارای جواب منحصر به‌فرد $x_۱$ است.

دربازهٔ $x \geqslant ۲\sqrt{۳}$، معادلهٔ (۶) چنین می‌شود:

$$۲x(x-۲\sqrt{۳})=x-\sqrt{۳} \Rightarrow ۲x^۲-(۴\sqrt{۳}+۱)x+\sqrt{۳}=۰$$

که دوریشه دارد: $x_۳=\frac{-۳+۲\sqrt{۳}}{۲}$ و $x_۴=۲+\sqrt{۳}$. ازاین‌دوجواب، تنها $x_۴$ دربازهٔ $x \geqslant ۲\sqrt{۳}$ واقع است. به‌این ترتیب، معادلهٔ (۶) دوجواب دارد:

$$x_۱=\frac{۲\sqrt{۳}+۳}{۲}, \quad x_۴=۲+\sqrt{۳}$$

واکنون، از معادلهٔ دوم دستگاه (۵) حاصل می‌شود:

$$y_۱=\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۲} \quad \text{و} \quad y_۴=۲-\sqrt{۳}$$

یعنی دستگاه (۵)، دو جواب دارد: $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۴, y_۴)$. ولی چون $x_۴ \cdot y_۴=۱$، بنابراین، عددهای $(x_۴, y_۴)$ در معادلهٔ اول دستگاه اصلی صدق نمی‌کنند. جواب $(x_۱, y_۱)$ در هردو معادلهٔ دستگاه اصلی صدق می‌کند، وجواب آن است.

پاسخ: $\left(\frac{۳-۲\sqrt{۳}}{۲}\right), \left(\frac{۳+۲\sqrt{۳}}{۲}\right)$.

۷. به ازای $a=۰$، نامعادلهٔ مفروض به صورت $-۹^{x+۱}>۰$ در می‌آید که برای هیچ مقداری از x برقرار نیست. a را عددی مخالف صفر درنظر می‌گیریم. اگر ۳^x را با t نشان دهیم، نامعادلهٔ مفروض، به این صورت

درمی‌آید:

$$9t^2+8at-a^2<0 \qquad (7)$$

سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $9t^2+8at-a^2$ دو ریشه دارد: $t_1=-a$، $t_2=\frac{1}{9}a$. اگر a عددی مثبت باشد، داریم: $t_1<t_2$، ومجموعهٔ‌جواب‌های نامعادلهٔ (۷)، به‌صورت $-a<t<\frac{1}{9}a$ درمی‌آید. یعنی، به‌ازای هرمقدار مثبت a، نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با نامعادلهٔ دوطرفهٔ

$$-a<3^x<\frac{1}{9}a \Longrightarrow -\infty<x<\log_3\left(\frac{1}{9}a\right)$$

وقتی داشته باشیم: $a<0$، آن‌وقت $t_2<t_1$ ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۷)، به‌صورت $\frac{1}{9}a<t<-a$ درمی‌آید. یعنی، به‌ازای هرمقدر منفی a، نامعادلهٔ مفروض مسأله، هم‌ارز است با

$$\frac{1}{9}a<3^x<-a \Longrightarrow -\infty<x<\log_3(-a)$$

پاسخ: به‌ازای $a=0$، نامعادلهٔ مفروض جواب ندارد؛ به‌ازای $a>0$، نامعادلهٔ برای $x<-2+\log_3 a$ و به‌ازای $a<0$ برای $x<\log_3(-a)$ برقراراست.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $(-3 , 11)$؛

۳. درجعبهٔ اول ۶۴۴ قطعه ساخت گروه اول و ۱۲۰ قطعه ساخت گروه دوم‌وجود دارد؛ ۴. $2(2\sqrt{15}+\sqrt{5})$ سانتی‌متر، $2(2\sqrt{15}-\sqrt{5})$ سانتی‌متر، $2(2\sqrt{5}+\sqrt{15})$ سانتی‌متر، $2(2\sqrt{5}-\sqrt{15})$ سانتی‌متر؛

۵. $a>\frac{2+\sqrt{3}}{2}$؛ ۶. $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$، $y=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$؛

۷. نامعادله به‌ازای $a=0$ جواب ندارد، به‌ازای $a>0$ به جواب‌های $x<\log_2(-a)-2$ وبه‌ازای $a<0$ به‌جواب‌های $x<\log_2(-a)-2$ می‌رسد.

گروه سوم. ۱. $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $\left(-\frac{۳}{۴}, -\frac{۱}{۴}\right)$، $\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴}\right)$؛ ۳. ۹۴۰۵، ۱۱۱۱۵؛ ۴. $۱۸\sqrt{۱۶۱}$ سانتی‌متر مربع؛

۵. $\frac{-۱+\sqrt{۲}}{۲} < a < \frac{-۱-\sqrt{۲}}{۲}$؛

۶. $x_۱ = \frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۵+۴\sqrt{۲}})$، $y_۱ = \frac{۱}{۲}(-۱-\sqrt{۲}+\sqrt{۵+۴\sqrt{۲}})$

و $x_۲ = \frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵+۴\sqrt{۲}})$، $y_۲ = \frac{۱}{۲}(-۱-\sqrt{۲}-\sqrt{۵+۴\sqrt{۲}})$؛

۷. به‌ازای $a \leqslant ۰$، نامعادلهٔ مفروض به‌ازای همهٔ مقدارهای x برقراراست، به‌ازای $a > ۰$، نامعادله برای $x > \log_۴ \frac{۱}{a}$ و $x < \log_۴ \frac{۱}{۱۶a}$ برقرار است.

گروه چهارم. ۱. $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $\left(-۱، \frac{۷۶}{۱۵}\right)$، $(۳، -۸)$؛

۳. ۱۵۷۵، ۱۹۹۵؛ ۴. $۱۲\sqrt{۱۵}$؛ ۵. $a > \frac{۷}{۴}$؛

۶. $\left(\frac{۱}{۲}، ۱\right)$، $\left(۱، \frac{۱}{۲}\right)$؛ ۷. نامعادله،درحالت $a \leqslant ۰$، برای همهٔ‌مقدارهای حقیقی x برقرار است، درحالت $a > ۰$، نامعادله برای $x > ۳ - \log_۲ a$ و $x < -۲ - \log_۲ a$ برقرار است.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، برای معادلهٔ مفروض، عبارت است ازمجموعهٔ $۰ < x < +\infty$. دراین حوزه، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با معادلهٔ

$$(۱-\log_۲ x)\log_۲ x - ۳\log_۳ x + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\log_۲ x$$

واگرهمه را به‌صورت لگاریتم با مبنای ۳ بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$(۱-\log_۳ x)\frac{\log_۳ x}{\log_۳ ۲} - ۳ \times {}_۳ x = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\log_۳ x}{\log_۳ ۲}$$

که با معادلهٔ مفروض، در حوزهٔ تعریف آن، هم‌ارز است. معادلهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$\log_3 x\left(\frac{1}{2}-\log_3 x-3\log_3 2\right)=0$$

وبنابراین، درمجموعهٔ $x>0$، معادلهٔمفروض با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\log_3 x=0 \quad و \quad \log_3 x-\frac{1}{2}+3\log_3 2=0$$

معادلهٔ اول یک‌جواب دارد؛ $x_1=1$ معادلهٔ دوم هم، یک جواب‌منحصردارد: $x_2=3^{\frac{1}{2}-3\log_3 2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. هردو جواب، درحوزهٔ تعریف معادله‌واقع‌اند و، بنابراین، جواب‌های آن هستند.

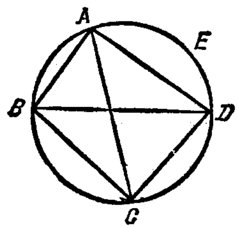
پاسخ: ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

۲. چون BD قطردایره است، بنابراین

$$\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=\frac{\pi}{2}$$

زاویه ABD را x می‌نامیم (شکل ۱۵۱). از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD به دست می‌آید: $\cos x=\frac{|AB|}{|BD|}$. بنا به فرض داریم: $|BD|=2$، $|AB|=1$، یعنی $\cos x=\frac{1}{2}$ وچون x زاویه‌ای‌است حاده، بنابراین $x=\frac{\pi}{3}$.

آن‌وقت داریم: $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{4}$، $\widehat{DBC}=\frac{3}{4}$. زاویه‌های محاطی ACD و ABD روبه‌روی‌به‌یک کمان و بنابراین با هم برابرند، یعنی:



شکل ۱۵۱

$$\widehat{ACD}=\widehat{ABD}=\frac{\pi}{3}.$$

از مثلث ADC، بنابرقضیهٔ‌سینوس‌ها، داریم:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}}=\frac{|AD|}{\sin\widehat{ACD}}$$

از آنجا: $|AC|=\frac{|AD|\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{ACD}}$. چون $|AD|=|AB|tg\,x=\sqrt{۳}$

و $\widehat{ADC}=\pi-\widehat{ABD}-\widehat{DBC}=\pi-\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}$، بنابراین

$$|AC|=\frac{\sqrt{۳}\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}\right)}{\sin\frac{\pi}{۳}}=۲\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}+\sqrt{۶})$$

پاسخ: $|AC|=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$.

۳. راه حل اول. سرعت موتورسوار را $v_۱$ کیلومتر در ساعت، سرعت دوچرخه‌سوار را $v_۲$ کیلومتردرساعت وسرعت پیاده را $v_۳$ کیلومتردرساعت می‌گیریم. فرض کنیم، ازلحظهٔ ملاقات پیادهٔ و دوچرخه‌سوار، تالحظهٔ ملاقات موتورسوار، و پیاده، $t_۱$ ساعت واز لحظهٔ ملاقات پیاده و دوچرخه‌سوار تا لحظهٔ ملاقات موتورسوار و دوچرخه‌سوار $t_۲$ ساعت گذشته باشد. در $t_۱$ ساعت، موتورسوار $v_۱t_۱$ کیلومتر وپیاده $v_۳t_۱$ کیلومترطی می‌کنند. بنابرفرض، باید داشته باشیم:

$$v_۱t_۱-v_۳t_۱=۶$$

ازلحظهٔ ملاقات موتورسوار وپیاده تا لحظهٔ ملاقات موتورسوار ودوچرخه‌سوار $(t_۲-t_۱)$ ساعت گذشته‌است. دراین‌مدت، موتورسوار $v_۱(t_۲-t_۱)$ کیلومتروپیاده $v_۳(t_۲-t_۱)$ کیلومترطی می‌کنند، وچون پیاده ۳ کیلومترعقب است، داریم :

$$v_۱(t_۲-t_۱)-v_۳(t_۲-t_۱)=۳$$

ازاین فرض که دوچرخه‌سوار ۳ کیلومتر از پیاده جلوافتاده است، به‌دست می‌آید:

$$v_۲t_۲-v_۳t_۲=۳$$

به‌این ترتیب، به‌دستگاه معادله‌های زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} v_1t_1 - v_3t_1 = 6 \\ v_1(t_2 - t_1) - v_3(t_2 - t_1) = 3 \\ v_2t_2 - v_3t_2 = 3 \end{cases}$$

باید ببینیم، درلحظه‌ای که موتورسوار به‌پیاده رسیده است، دوچرخه‌سوار چند کیلومترجلوتراست! چون این موقعیت، بعد از t_1 ساعت پیش آمده‌است، در این مدت، دوچرخه‌سوار v_2t_1 کیلومتر و پیاده v_3t_1 کیلومتر رفته‌اند. بنابراین، فاصلهٔ مجهول x برابراست با $(v_2t_1 - v_3t_1)$ کیلومتر. ازمعادلهٔ اول دستگاه

$$(v_1 - v_3)t_1 = 6$$

واز معادلهٔ دوم دستگاه

$$(v_1 - v_3)(t_2 - t_1) = 3$$

از تقسیم این دورابطه بریکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$\frac{t_1}{t_2 - t_1} = 2 \Rightarrow t_2 = \frac{3}{2}t_1$$

از معادلهٔ آخردستگاه داریم: $v_2 - v_3 = \frac{3}{t_2}$ و بنابراین

$$x = v_2t_1 - v_3t_1 = (v_2 - v_3)t_1 = \frac{3}{t_2} \cdot t_1 = 2 \text{ (کیلومتر)}$$

راه حل دوم. سرعت‌ها را با همان نشانه‌های راه‌حل اول می گیریم. زمانی که، درآن، دوچرخه‌سوار ۳ کیلومتر ازپیاده جلومی‌افتد، برابراست با $\frac{3}{v_2 - v_3}$. از فرض مساله نتیجه می‌شود که همین زمان برابراست با $\frac{9}{v_1 - v_3}$. ازاین‌جا، به‌دست می‌آید:

$$\frac{3}{v_2 - v_3} = \frac{9}{v_1 - v_2} \Rightarrow \frac{v_2 - v_3}{v_1 - v_3} = \frac{1}{3}$$

موتورسوار، بعد از $\frac{6}{v_1 - v_3}$ ساعت به‌پیاده‌می‌رسد. بنابراین، دراین‌مدت، دوچرخه‌سوار، به‌اندازهٔ

$$\frac{۶}{v_۱ - v_۳}(v_۲ - v_۳) = ۶ \times \frac{۱}{۳} = ۲(\text{کیلومتر})$$

از پیاده جلو می‌افتد.

پاسخ: ۲ کیلومتر.

۴. (a , b) را زوج عددی می‌گیریم که با شرط‌های مساله سازگار باشد. چون برابری مفروض، برای همهٔ مقدارهای x برقرار است، باید برای حالت‌های خاص $x = \pi$ و $x = ۲\pi$ هم برقرار باشد. یعنی باید a و b، در برابری‌های زیر صدق کنند:

$$-۲a + b^۲ = \cos(\pi a + b^۲) - ۱ \qquad (۱)$$

$$b^۲ = \cos(۲\pi a + b^۲) - ۱ \qquad (۲)$$

چون $\cos(۲\pi a + b^۲) \leqslant ۱$، از برابری (۲) نتیجه می‌شود $b^۲ \leqslant ۰$؛ یعنی $b = ۰$. ولی در این صورت، داریم: $\cos ۲\pi a = ۱$، یعنی a عددی درست است.

اکنون، برابری (۱) به صورت $\cos \pi a = ۲a - ۱$ درمی‌آید. چون $-۱ \leqslant \cos \pi a \leqslant ۱$، بنابراین $-۱ \leqslant ۲a - ۱ \leqslant ۱$ یا $۰ \leqslant a \leqslant ۱$؛ و چون a عددی است درست، بنابراین $a = ۰$ یا $a = ۱$.

بنابراین، شرط مساله، تنها در مورد زوج عددهای $a = ۰$، $b = ۰$ و $a = ۱$، $b = ۰$ ممکن است برقرار باشد. باآزمایش معلوم می‌شود که، به‌ازای هردو جواب، برابری فرض به‌ازای همهٔ مقدارهای x، برقرار است.

پاسخ: $(۰ , ۰)$ و $(۱ , ۰)$.

۵. چون داریم:

$$f(-۱) = a - b + c ,\ f(۱) = a + b + c ,\ f(۳) = ۹a + ۳b + c$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a - b + c < ۱ \\ a + b + c > -۱ \\ ۹a + ۳b + c < -۴ \end{cases}$$

این نابرابری‌ها را می‌توان چنین نوشت (دو طرف نابرابری دوم را در -۲ ضرب کرده‌ایم):

۲ــ ضرب کرده‌ایم):

$$\begin{cases} a-\ b+\ c<\ \ ۱ \\ -۲a-۲b-۲c<\ \ ۲ \\ ۹a+۳b+\ c<-۴ \end{cases} \qquad (۳)$$

از جمع ایــن نابرابری‌ها با یکدیگر، به‌دست می‌آید: $۸a<-۱$، یعنــی ضریب a باید عددی منفی باشد.

پاسخ: $a<۰$.

۶. تابع مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{(۲x-۳\pi)^۲}{x}+۱۲\pi+\sin x$$

روشن است که، برای هرمقدار $x>۰$، داریم.

$$f(x)\geqslant ۰+۱۲\pi-۱=۱۲\pi-۱$$

درعین‌حال داریم: $f\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)=۱۲\pi-۱$. یعنی حداقل مقدار تابع، به‌ازای $x=\frac{۳\pi}{۲}$ به‌دست می‌آید و برابراست با $۱۲\pi-۱$.

پاسخ: $۱۲\pi-۱$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=\sqrt[۳]{\frac{۵}{۹}}$؛ ۲. $\frac{۳}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$؛ ۳. ۸ کیلومتر ؛ ۴. $(۱ ,۰)$؛ ۵. $a<۰$؛ ۶. $۱+\frac{۱۰}{۴۱-۴\pi^۲}$.

گروه سوم. ۱. $x=۱$، $x=\frac{۲۷}{\sqrt{۲}}$؛ ۲. $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$، ۳. ۱۰ کیلومتر؛ ۴. $(۰ ,۰)$، $(۱ ,۰)$، $(-۱ ,۰)$، ۵. $a>۰$؛ ۶. $۱۲\pi-۱$.

گروه چهارم. ۱. $x=\frac{۹}{\sqrt{۵}}$؛ ۲. $۲(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$؛ ۳. ۶ کیلومتر؛ ۴. $(۱ ,۰)$؛ ۵. $a>۰$ ۶. $۱+\frac{۱۶}{۲۲-۹\pi^۲}$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. $\cos x$ را t می‌گیریم معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{3})t}=4t-\sqrt{3} \qquad (1)$$

روشن است که همه جواب‌های معادلهٔ (۱) باید با شرط $4t-\sqrt{3}\geqslant 0$ یعنی $t\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$ سازگار باشند.

هر ریشهٔ معادلهٔ (۱)، مسلماً ریشه‌ای از معادلهٔ زیر است:

$$3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})t=16t^2-8\sqrt{3}t+3 \qquad (2)$$

که از مجذورکردن دوطرف معادلهٔ (۱) به دست آمده است. معادلهٔ (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$4t^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})t-\sqrt{6}=0 \qquad (3)$$

معادلهٔ (۳) دوریشه‌دارد: $t_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $t_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. t_2 با شرط $t\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$ نمی‌سازد وبنابراین ریشهٔ معادلهٔ (۱) نیست.

اگر $t_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ را درمعادلهٔ (۱) قرار دهیم، سمت چپ آن چنین می‌شود:

$$\sqrt{3+4\sqrt{6}-8\sqrt{6}+8}=\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

مقدار سمت راست معادله هم برابر $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ می‌شود و، بنابراین، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تنها ریشهٔ معادلهٔ (۱) است. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، هم‌ارزمعادلهٔ $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود که جواب‌های آن چنین است: $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(n\in Z)$.

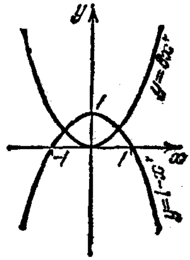
پاسخ: $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(n\in Z)$.

۲. b را عددی ثابت و مثبت می‌گیریم. برای این مقدار b، طول‌های نقطه‌های

برخوردنمودارهای دوتابع $y = bx^2$ و $y^2 = 1 - x^2$ را محاسبه می کنیم، (شکل ۱۵۲). این طول‌ها، ریشهٔ معادلهٔ $bx^2 = 1 - x^2$ وبرابرند با

$$-\frac{1}{\sqrt{b+1}}, \frac{1}{\sqrt{b+1}}.$$

بنا براین،مساحت S محدودبه نمودار- های دومنحنی، چنین است



شکل ۱۵۲

$$S = \int_{-\frac{1}{\sqrt{1+b}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+b}}} \left[(1-x^2) - bx^2\right] dx = \left(x - \frac{b+1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-\frac{1}{\sqrt{1+b}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+b}}} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+1}}$$

که از برابری $\frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt{b+1}} = c$ به دست می آید: $b = \frac{16}{9c^2} - 1$. مساله وقتی، وتنها وقتی، جواب داردکه داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{16}{9c^2} - 1 > 0 \\ c > 0 \end{cases} \qquad (4)$$

نابرابری اول به این علت باید برقرار باشدکه، بنابر فرض، داریم $b > 0$؛ ونامعادلهٔ دوم، به‌این‌علت که مساحت شکل، عددی مثبت است. دستگاه (۴)، به جواب $0 < c < \frac{4}{3}$ می رسد.

پاسخ: $0 < c < \frac{4}{3}$ ، $b = \frac{16}{9c^2} - 1$.

۰۳ برای آزاد شدن ازقید علامت‌های قدرمطلق، محور عددی را به‌سه بازه تقسیم می کنیم:

$$-\infty < x < -3, \quad -3 \leqslant x < -2, \quad -2 \leqslant x < +\infty$$

ونامعادلهٔ مفروض را، درهریك از این بازه‌ها، به‌طور جدا گانه حل می کنیم.

درحالت $a<-۳$ داریم: $x+۳<۰$ و $x+۲<۰$ و نامعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۳}{-x-۳-۱}\geqslant -x-۲ \Rightarrow \frac{(x+۵)(x+۱)}{x+۴}\geqslant ۰ \qquad (۵)$$

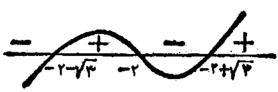
نامعادلهٔ (۵) به‌معنای آن است که باید اجتماع مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ

$$\frac{(x+۵)(x+۱)}{x+۴}=۰$$

ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ

$$\frac{(x+۵)(x+۱)}{x+۴}>۰ \qquad (۶)$$

را به‌دست‌آورد. معادله دوجواب دارد: $x=-۵$ و $x=-۱$. با استفاده از روش فاصله‌ها (شکل ۱۵۳)، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلـهٔ (۶) به‌دست می‌آید: $-۵<x<-۴$ ، $-۱\leqslant x<+\infty$. از این جواب‌ها، تنها مجموعهٔ $-۵\leqslant x<-۴$ دربازهٔ $x<-۳$ قراردارد.



شکل ۱۵۴

شکل ۱۵۳

درحالت $-۳\leqslant x<-۲$ داریم: $x+۳\geqslant ۰$ و $x+۲<۰$ و معادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید.

$$\frac{۳}{x+۳-۱}\geqslant -(x+۲) \Rightarrow \frac{۳+(x+۲)^۲}{x+۲}\geqslant ۰ \qquad (۷)$$

روشن است‌که نامعادلهٔ (۷)، دربازهٔ $-۳\leqslant x<-۲$ جوابی ندارد.

درحالت $-۲\leqslant x<+\infty$ داریم: $x+۳>۰$ و $x+۲\geqslant ۰$ و نامعادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$\frac{۳}{x+۳-۱}\geqslant x+۲ \Rightarrow \frac{x^۲+۴x+۱}{x+۲}\leqslant ۰ \qquad (۸)$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۸)، از اجتماع مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ

$$\frac{x^۲+۴x+۱}{x+۲}=۰$$

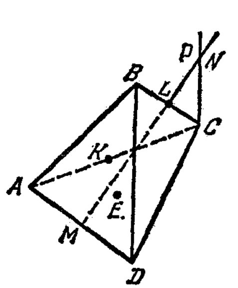
ومجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ

$$\frac{x^2+4x+1}{x+2}<0 \qquad (9)$$

به‌دست می‌آید. معادله، دوجواب دارد: $x=-2-\sqrt{3}$ و $x=-2+\sqrt{3}$
با استفاده از روش فاصله‌ها (شکل ۱۵۴)، جواب‌های نامعادلهٔ (۹) هم به دست‌می‌آید: $x<-2-\sqrt{3}$ و $-2<x<-2+\sqrt{3}$. بنابراین، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۸) چنین است: $x\leqslant -2-\sqrt{3}$ و $-2<x\leqslant -2+\sqrt{3}$.
که از آن‌ها، مجموعهٔ $-2<x\leqslant -2+\sqrt{3}$ در بازهٔ $x\geqslant -2$ قرار دارد.
اگر همهٔ جواب‌هایی را که درسه بازهٔ مختلف محورعددی پیدا کردیم، درنظر بگیریم، جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$-5\leqslant x<-4 \ , \ -2<x\leqslant -2+\sqrt{3}$$

۴. ازرأس B، ارتفاع هرم رارسم می‌کنیم وپای آن را E می‌نامیم (شکل ۱۵۵).
وسط یال‌های AC، BC و AD را، به ترتیب، K، L و M می‌نامیم. مثلث‌های BDC و ABC متساوی الاضلاع‌اند، یعنی $DL\perp BC$ و $AL\perp BC$ بنابر معیار عمود بودن خط‌راست برصفحه، نتیجه می‌گیریم که خط راست BC بر صفحهٔ ALD عمود است. بنابر فرض، نقطهٔ P، از رأس‌های B و C هرم، به یك فاصله است. یعنی نقطهٔ P روی صفحهٔ ALD قراردارد. به همین‌ترتیب، ثابت می‌شود که صفحهٔ BMC بر یـال AD عمود است و نقطهٔ P درصفحهٔ BMC قراردارد. به‌این ترتیب، نقطه P، روی فصل مشترك دوصفحهٔ ALD و BMC واقع است. نقطه‌های L و M، به دوصفحهٔ ALD ، BMC تعلق دارند. یعنی این دو صفحه، روی خط راست LM یکدیگر را قطع می‌کنند و نقطهٔ P روی این‌خط راست‌قراردارد.



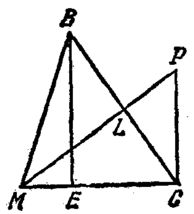
شکل ۱۵۵

پاره‌خط DK، ارتفاعی ازمثلث ACD است که از رأس D می‌گذرد. چـون مثلث ACD متساوی الاضلاع است، بنابراین مرکز آن ـ نقطهٔ E ـ برمیانهٔ CM واقـع است. عمود BE بر صفحهٔ ACD، در صفحهٔ MBC قراردارد. بنابراین، صفحهٔ MBC بـر صفحهٔ ACD عمود است. از این‌جا نتیجه می‌شود، عمودی که ازنقطهٔ C بر

صفحهٔ ACD فرودآید، برصفحهٔ MBC قرار می‌گیرد. محل برخورد این عمود را با خط راست ML، با N نشان می‌دهیم.

ثابت می‌کنیم، نقطهٔ P برنقطهٔ N منطبق است. خط راست CN، بنابر ساختمان‌خود، برصفحهٔ KDC عمود است؛ درنتیجه CN برخط راست KD عمود خواهد بود. بنابرفرض، خطهـای راست PC ، KD هم بریکدیگر عمودند. اگر نقطه‌های N و P متمایز باشند، آن وقت، باید خط راست KD برصفحهٔ CPN و، درنتیجه، برصفحهٔ CLM عمودباشد. ولی دراین‌صورت باید خط‌راست KD برخط راست CM عمود شود، که ممکن نیست (زاویهٔ بین این دو خط راست، برابر $\frac{2\pi}{3}$ است). به‌این ترتیب، نقطه‌های P و N برهم منطبق‌اند. از این به بعد، به جای N، از نشانهٔ P استفاده می‌کنیم.

طول یال هرم را a می‌گیریم. دراین صورت $|BC|=a$ و $|CM|=|BM|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. برای سهولت استدلال، مقطع هرم با صفحهٔ CMB را روی شکل جداگانه‌ای نشان می‌دهیم (شکل ۱۵۶). از مثلث قائم‌الزاویهٔ CLM ، بنابر قضیه فیثاغورث، داریم:



شکل ۱۵۶

$$|LM|=\sqrt{|CM|^2-|CL|^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

دراین صورت

$$tg\widehat{CML}=\frac{|CL|}{|LM|}=\frac{a\times 2}{2\times a\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|PC|=|CM|\cdot tg\widehat{CML}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

بنابرفرض $|PC|=\sqrt{\frac{3}{2}}$، یعنی $a=2$. وچون

$$|ME|=\frac{1}{3}|CM|=\frac{1}{3}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BME به‌دست می‌آید:

$$|BE|=\sqrt{|BM|^۲-|ME|^۲}=\sqrt{۳-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

وحجم هرم برابر است با

$$V=\frac{۱}{۳}S_{ACD}|BE|=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}\cdot\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

یادآوری می‌کنیم که این مساله را به کمک محاسبهٔ برداری هم می‌توان حل کرد.

پاسخ: $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.

۵. $(u_\circ, v_\circ, w_\circ)$ را عددهایی سازگار با شرط‌های مساله می گیریم. دراین صورت

$$۳(u_\circ-۳)^۲+۶v_\circ^۲-۲w_\circ^۲+۳v_\circ^۲w_\circ^۲=۳۳ \qquad (۱۰)$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود: $۳(u_\circ-۳)^۲\leqslant ۳۳$، یعنی $(u_\circ-۳)^۲\leqslant ۱۱$. چون $(u_\circ-۳)^۲$، مجذوریك عدددرست است، بنابراین، تنها می‌تواند برابریکی ازعددهای ۰، ۱، ۴ یا ۹ باشد. برابری (۱۰) را، این‌طور می‌نویسیم:

$$۳(u_\circ-۳)^۲+(w_\circ^۲+۲)(۳v_\circ^۲+۲)=۳۷$$

اگر داشته باشیم: $(u_\circ-۳)^۲=۰$، آن وقت $(۳v_\circ^۲+۲)\times(w_\circ^۲+۲)=۳۷$. چون $۲+w_\circ^۲$ و $۲-۳v_\circ^۲$، عددهایی‌درست وبزرگتر از واحدند، وضمناً، ۳۷ عددی است اول، برابری اخیر ممکن نیست؛ یعنی $(u_\circ-۳)^۲\neq ۰$.

درحالت $(u_\circ-۳)^۲=۱$ داریم: $(w_\circ^۲+۲)(۳v_\circ^۲+۲)=۳۴$. چون $۲\leqslant ۲+w_\circ^۲$ و $۲\leqslant ۲\times ۳v_\circ^۲$ وضمناً هردو عددهایی درست‌اند،یکی ازموارد زیرممکن‌است:

$$\begin{cases} w_\circ^۲+۲=۲ \\ ۳v_\circ^۲+۲=۱۷ \end{cases} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{cases} w_\circ^۲+۲=۱۷ \\ ۳v_\circ^۲+۲=۲ \end{cases} \qquad (۱۲)$$

ازمعادلهٔدوم(۱۱) به‌دست می‌آید: $v_\circ^۲=۵$ که ممکن نیست، زیرا از $v_\circ$عدد درستی به‌دست نمی‌آید.ازمعادلهٔ اول (۱۲) به‌دست،می‌آید: $w_\circ^۲=۱۵$ که

باز هم برای w_0 عدد درستی به دست نمی‌آید. به‌این ترتیب: $(u_0-3)^2\neq 1$.

درحالت $(u_0-3)^2=4$ داریم: $(w_0^2+2)(3^2_0+2)=25$، که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$(13)\quad \begin{cases} w_0^2+2=5 \\ 3v_0^2+2=5 \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول (۱۳) به‌دست می‌آید $w_0^2=3$ که ممکن نیست. بنا براین $(u_0-3)^2\neq 4$.

تنها حالت $(u_0-3)^2=9$ می‌ماند، یعنی $u_0=6$ یا $u_0=0$. در این‌حالت داریم: $(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=10$ وازآنجا به یکی ازدومورد زیر می‌رسیم:

$$(14)\quad \begin{cases} w_0^2+2=5 \\ 3v_0^2+2=2 \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} w_0^2+2=2 \\ 3v_0^2+2=5 \end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول (۱۴) نتیجه می‌شود $w_0^2=3$ که ممکن نیست. از برابری‌های (۱۵) به‌دست می‌آید: $w_0=0$، $v_0=1$ یا $w_0=0$، $v_0=-1$.

پاسخ: $(6,1,0)$، $(6,-1,0)$، $(0,1,0)$، $(0,-1,0)$.

۶. دستگاه را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$(16)\quad \begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)]+\log_{2+y}(x-1)^2=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$$

اگر (x_0,y_0) جوابی ازستگاه (۱۶) باشد داشته باشیم: $1-x_0>0$، $1-x_0\neq 1$، $y_0+2>0$، $y_0+2\neq 1$، $y_0+5>0$، $x_0+4>0$، یعنی، اگر (x_0,y_0) جوابی ازدستگاه (۱۶) باشد، باید y_0 با شرط‌های $y_0>-2$ و $y_0\neq -1$ وعدد x_0 باشرط‌های $-4<x_0<1$ و $x_0\neq 0$ سازگار باشند.

معادلهٔ اول‌دستگاه (۱۶)، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارز است بامعادلهٔ

$$\log_{1-x}(y+2)+\log_{2+y}(1-x)=2$$

$\log_{1-x}(y+2)$ را z می‌نامیم، آن‌وقت، معادلهٔ اخیر، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$z+\frac{۱}{z}=۲$$

این معادله، یك ریشهٔ منحصر به‌فرد دارد: $z=۱$. یعنی معادلهٔ اول دستگاه، هم‌ارزاست با معادله

$$log_{۱-x}(y+۲)=۱ \Rightarrow y=-x-۱$$

بنابراین، دستگاه (۱۶)، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارزاست با

$$\begin{cases} y=-x-۱ \\ log_{۱-x}(y+۵)-log_{۲+y}(x+۴)=۱ \end{cases} \qquad (۱۷)$$

$-x-۱$ را به‌جای y در معادلهٔ دوم دستگاه (۷) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$log_{۱-x}(۴-x)-log_{۱-x}(x+۴)=۱$$

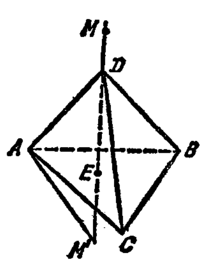
واین معادله، هم‌ارزاست با:

$$log_{۱-x}(۴-x)=X_{۱-x}[(x+۴)(۱-x)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۴-x=(x+۴)(۱-x)$$

این معادله دو ریشه دارد: $x_۱=-۲$ و $x_۲=\circ$؛ وازمعادلهٔ اول دستگاه (۱۷) به‌دست می‌آید؛ $y_۱=۱$، $y_۲=-۱$، ازایـن دوجواب، تنها جواب $x_۱=-۲$، $y_۱=۱$ درحوزهٔ تعریف دستگاه مفروض قراردارد.

پاسخ: $x=-۲$، $y=۱$.

۷. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC را E مـی گیریم (شکل ۱۵۷). چون مثلـث ABC متساوی‌الاضلاع است ، نقطـهٔ E از سه راس آن بـه یـك فاصله می‌شود. چون یال‌های AD ، BD و CD برابرند ، تصویر نقطهٔ D برصفحهٔ ABC، از راس‌های A، B و C به یك فاصله است، یعنی برنقطهٔ E منطبق است. واین، به‌معنای آن است که DE ارتفاع هرم مـی‌شود. چون، مایل‌های MA، MB وMC برابرند، تصویر نـقطهٔ M بـرصفحهٔ ABC،از راس‌های A، B و C بـه یـك فاصله است، یعنی تصویر نقطهٔ Mهم بر نقطه E منطبق است و نقطـهٔ M روی خـط راست DE قراردارد. طول‌هر یال‌هرم ABCD را a می گیریم، داریم:



شکل ۱۵۷

$$|AE|=\frac{۲}{۳}\cdot\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}=a\sqrt{\frac{۱}{۳}},$$

$$|ED|=\sqrt{|AD|^{۲}-|AE|^{۲}}=\sqrt{a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۳}}=a\sqrt{\frac{۲}{۳}}, \qquad (۱۸)$$

$$|ME|=\sqrt{|AM|^{۲}-|AE|^{۲}}=\sqrt{\frac{۹۷}{۵۷}-\frac{a^{۲}}{۳}}$$

ازاین‌جادیده می‌شود: $|AE|<|ED|$. درحالت‌کلی، دوموردپیش می‌آید: نقطه‌های M و D در دوطرف متفاوت‌ازصفحهٔ ABC قراردارند (روی‌شکل $M\equiv M'$) ویا نقطه‌های M وD دریك سمت صفحهٔ ABC واقع‌اند.

درحالت اول داریم:

$$|AM'|<|AE|+|EM'|<|ED|+|EM'|=|DM'|$$

که درست نیست، زیرا $\sqrt{\frac{۹۷}{۱۵}}>۱>\frac{۱}{۵}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$.

به حالت دوم می‌پردازیم. دراین حالت داریم:

$$|ME|=|MD|+|ED| \qquad (۱۹)$$

اگر از (۱۸)، مقدارهای $|ED|$ و $|ME|$ رادر(۱۹) قراردهیم، به‌معادله‌ای برای تعیین a می‌رسیم:

$$\sqrt{\frac{۹۷}{۷۵}-\frac{a^{۲}}{۳}}=\frac{۱}{۵}\sqrt{\frac{۲}{۳}}+a\sqrt{\frac{۲}{۳}} \qquad (۲۰)$$

بامجذور کردن دو طرف معادلهٔ (۲۰) وانجام تبدیل‌های لازم، به‌دست می آید:

$$a^{۲}+\frac{۴}{۱۵}a-\frac{۱۹}{۱۵}=۰$$

این معادله دو ریشه دارد: $a_۱=۱$، $a_۲=-\frac{۱۹}{۱۵}$؛ که‌تنها $a_۱=۱$ درمعادلهٔ (۲۰) صدق می‌کند. به‌این‌ترتیب، یال‌های هرم برابراست با ۱و، درنتیجه، حجم آن چنین می‌شود:

$$V=\frac{۱}{۳}S_{ABC}\cdot|ED|=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۴}\cdot\sqrt{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}$$

پاسخ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$

گروه‌های دوم تاچهارم

گروه دوم. ۱. $x=n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}$ $(n\in Z)$؛

۲. $b=\sqrt{\frac{8}{3c}}-1$، $0<c<\frac{8}{3}$؛ ۳. $-1-\sqrt{8}\leqslant x<-3$، $1<x\leqslant 3$؛ ۴. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$؛ ۵. $(1,5,0)$، $(1,-5,0)$، $(-1,5,0)$، $(-1,-5,0)$؛ ۶. $x=-\frac{2}{5}$، $y=\frac{2}{5}$؛

۷. $\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

گروه سوم. ۱. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $p=\frac{128}{9q^2}-1$، $0<q<\frac{8\sqrt{2}}{3}$؛ ۳. $8<x\leqslant 5+\sqrt{18}$، $-1\leqslant x\leqslant 2$؛

۴. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$؛ ۵. $(1,4,3)$، $(1,4,-3)$، $(-1,4,3)$، $(-1,4,-3)$؛

۶. $x=-\frac{5}{2}$، $y=-\frac{1}{2}$؛ ۷. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

گروه چهارم. ۱. $x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$؛

۲. $a=\frac{1}{\sqrt{3b}}-1$، $0<b<\frac{1}{3}$؛ ۳. $-2-\sqrt{7}\leqslant x<-2$، $4<x\leqslant 5$؛ ۴. $\frac{4}{3\sqrt{2}}$؛ ۵. $(1,0,1)$، $(-1,0,1)$، $(1,0,5)$، $(-1,0,5)$؛ ۶. $x=-\frac{5}{3}$، $y=\frac{8}{3}$؛ ۷. $\frac{1}{6\sqrt{2}}$.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ مفروض هم‌ارزاست بامعادلهٔ

$$3^{\frac{1}{2}tg2x}=3^{\frac{3}{2}-tg2x} \Rightarrow \frac{1}{2}tg2x=\frac{3}{2}-tg2x$$

که به‌معادلهٔ $tg2x=1$ منجر می‌شود وحل آن ساده است.

پاسخ: $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{8}$ $(k\in Z)$.

۲. درمعادلهٔ دوم دستگاه، به‌جای v، قراردهیم $7-2u$، به‌دست می‌آید:

$$|3u-7|=2 \qquad (1)$$

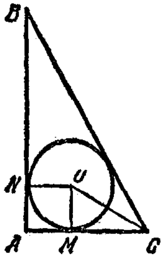
برای حل این معادله، بایدازقید علامت قدرمطلق آزاد شد. دوحالت درنظر می‌گیریم: $u\geqslant\frac{7}{3}$ و $u<\frac{7}{3}$.

در حالت $u\geqslant\frac{7}{3}$، به‌معادلهٔ $3u-7=2$ می‌رسیم که جواب $u=3$ را دارد. ازآن‌جاکه، این جواب باشرط $u\geqslant\frac{7}{3}$ سازگاراست، یکی از جواب‌های معادلهٔ اصلی خواهد بود.

در حالت $u<\frac{7}{3}$، معادلهٔ $7-3u=2$ به‌دست می‌آید، که جواب آن $u=\frac{5}{3}$ باشرط $u<\frac{7}{3}$ سازگاراست‌و، بنابراین، جواب دیگری‌ازمعادلهٔ اصلی است. به‌این‌ترتیب، معادلهٔ (۱) دارای دو ریشه است: $u_1=3$ و $u_2=\frac{5}{3}$. باقراردادن‌این‌مقدارها درمعادلهٔ $v=7-2u$، جواب‌های متناظر v به‌دست می‌آید.

پاسخ: $(3,1)$ و $\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)$.

۳. ABC را مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض می‌گیریم (شکل ۱۵۸). مرکز دایرهٔ محاطی را O ونقطه‌های تماس این دایره را با ضلع‌های مجاور به زاویهٔ



شکل ۱۵۸

قائمهٔ AC و AB، به‌ترتیب M و N فرض می‌کنیم. داریم: $OM \perp AC$ و $ON \perp AB$. چون زاویهٔ A قائمه است، چهارضلعی AMON مستطیل می‌شود و، از آن‌جا،

$$|AN|=|OM|=\sqrt{3} \text{ و } |AM|=|ON|=\sqrt{3}$$

درمثلث‌قائم‌الزاویهٔ OMC داریم: $\widehat{OCM}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}=\frac{\pi}{6}$. بنابراین

$|MC|=|OM|\cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=3$. ولی دراین صورت

$$|AC|=|AM|+|MC|=\sqrt{3}+3.$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ ANC به‌دست می‌آید:

$$|NC|=\sqrt{|AC|^2+|AN|^2}=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2+3}=\sqrt{15+6\sqrt{3}}$$

پاسخ: $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.

۴. خط راستی که با ضریب‌زاویهٔ برابر k از نقطهٔ (x_0, y_0) بگذرد، چنین‌است:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

اگر در تابع $y(x)$، به‌جای x مقدار $x_0=1$ را قرار دهیم، عرض نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید: $y_0=1$. می‌دانیم ضریب زاویهٔ خط مماس بر $y(x)$، برابر است $y'(x_0)$، که در آن x_0 طول نقطهٔ تماس است. داریم:

$$y'(x)=\frac{-1}{(2x-1)^2};\quad y'(1)=-1$$

و بنابراین، معادلهٔ خط‌مماس چنین می‌شود:

$$y-1=-(x-1) \Rightarrow x+y-2=0$$

این خط راست، روی هریك از محورها، پاره‌خطی به‌طول ۲ جدا می‌کند و، بنابراین، مساحت مثلث مطلوب، برابراست با $\frac{1}{2}\times 2\times 2$، یعنی ۲.

پاسخ: ۲.

۵. این عبارت را درنظر می‌گیریم:

$$2(2p-1)^4+1+[1-2(2p-1)^4]\cdot \sin 2t \qquad (2)$$

که آن را می‌توان به‌این‌صورت نوشت.

$$2(2p-1)^4(1-\sin 2t)+(1+\sin 2t) \qquad (3)$$

وچون، به‌ازای هرمقداردلخواه t داریم: $|\sin t|\leqslant 1$، بنابراین

$$1-\sin 2t\geqslant 0 \text{ و } 1+\sin 2t\geqslant 0$$

به‌این ترتیب، روشن است که عبارت (۳) و، درنتیجه، عبارت (۲)، به‌ازای مقدارهای دلخواه p و t غیرمنفی است.

اگر بخواهیم عبارت(۳) برابرصفرشود، باید به‌طورهم‌زمان داشته‌باشیم:

$$1+\sin 2t=0 \text{ و } (2p-1)^4(1-\sin 2t)=0 \qquad (4)$$

ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $\sin 2t=-1$ و $t=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$، که اگر درمعادلهٔ دوم (۴) قراردهیم، به‌دست می‌آید $(2p-1)^4=0$ یا $p=\frac{1}{2}$.

پاسخ: $\left(\frac{1}{2}, k\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ $(k\in Z)$.

۶. حوزهٔ تعریف نامعادله از شرط‌های $x-\frac{1}{2}>0$، $x-1>0$ به‌دست می‌آید، یعنی نامعادله، برای $x>1$، معین است. دراین‌مجموعه، نامعادلهٔ‌مفروض، به‌این صورت درمی‌آید.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-1\right)\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x\leqslant 0$$

این نامعادله به‌جواب‌های $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ می‌رسد که، باتوجه به حوزهٔ تعریف نامعادله، جواب‌های نامعادلهٔ مفروض به‌صورت $1<x\leqslant\frac{3}{2}$ درمی‌آید.

پاسخ: $1<x\leqslant\frac{3}{2}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه‌دوم. ۱. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(n\in Z)$؛ ۲. $(0, -1)$، $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$؛ ۳. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$؛ ۴. ۱؛ ۵. $(2n\pi+\pi, 3)$ $(n\in Z)$؛ ۶. $0<x\leqslant\frac{1}{2}$.

گروه سوم. ۱. $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{8}$ $(k\in Z)$؛ ۲. $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$، $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$؛ ۳. $2\sqrt{7+4\sqrt{2}}$؛ ۴. $\frac{9}{4}$؛ ۵. $\left(-\frac{2}{5}, 4k\pi-\pi\right)$ $(k\in Z)$؛

۶. $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$.

گروه چهارم ۱. $x = \frac{1}{2}n\pi + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12}$ $(n \in Z)$؛

۲. $\left(\frac{3}{7}, \frac{8}{8}\right)$ ، $\left(\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$ ؛ ۳. $\frac{2ar}{\sqrt{r^2+a^2}}$؛ ۴. $0/25$؛

۵. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{3}{4}\right)(k \in Z)$؛ ۶. $2 < x \leqslant 3$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. (x_0, y_0) را جوابی ازدستگاه می گیریم. آن وقت، باید نابرابری

$$x_0^2 - 4y_0^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

وهمچنین برابری‌های

$$x_0 - y_0 + \sqrt{x_0^2 - 4y_0^2} = 2 \quad , \quad x_0^5 \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0^2} = 0$$

برقرار باشند. ازبرابری آخر نتیجه می‌شود:

$x_0 = 0$ یا $x_0 = 2y_0 = 2y_0$ ویا $x_0 = -2y_0$

درحالت $x_0 = 0$، باتوجه به برابری(۱) به‌دست می‌آید: $y_0 = 0$.

درحالت $x_0 = 2y_0$، ازبرابری‌اول به‌دست می‌آید: $2y_0 - y_0 = 2$ یا $y_0 = 2$ و، ازآن‌جا، $x_0 = 4$.

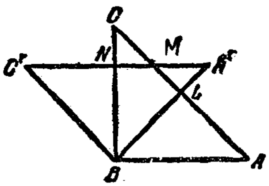
درحالت $x_0 = -2y_0$، از برابری اول بدست می‌آید:

$-2y_0 - y_0 = 2$ ویا $y_0 = -\frac{2}{3}$ که ازآن‌جا: $x_0 = \frac{4}{3}$.

بنابراین، اگر (x_0, y_0) جوابی ازدستگاه باشد، این جواب دربین یکی‌ازسه زوج‌عدد $(0, 0)$، $(4, 2)$ و $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ است. اگراین‌زوج‌عددها را درمعادله‌های دستگاه مفروض آزمایش‌کنیم، معلوم می‌شود که اولی در معادلهٔ اول دستگاه صدق نمی‌کند، ولی دوزوج عدد دیگر در هردو معادلهٔ دستگاه صدق می کنند.

پاسخ: $(۴،۲)$، $\left(\frac{۴}{۳}, -\frac{۲}{۳}\right)$.

۴۰. ABC را مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض و $A'B'C'$ را مثلث قائم‌الزاویه‌ای که از دوران ABC دور رأس زاویهٔ قائمهٔ B به‌اندازهٔ ۴۵ درجه به دست می‌آید، می‌گیریم (شکل ۱۵۹). از فرض‌های مسأله نتیجه می‌شود که زاویه‌های CBC'، ABA'، BCA و $BA'C'$، برابرند با ۴۵ درجه. خط‌های راست AB و $A'C'$ موازی‌اند، زیرا دو زاویهٔ ABA' و $BA'C'$، که نسبت به قاطع BA' متبادل داخلی‌اند، باهم برابرند؛ بنابراین خط راست $C'A'$ بر خط BC عمود است. N را نقطهٔ برخورد $C'A'$ و CB می‌گیریم. از آن‌جا که داریم:


شکل ۱۵۹

$$|BN| = |BC'|\cdot \sin ۴۵^\circ = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} < a = |BC|$$

بنابراین، نقطهٔ N روی پاره‌خط BC قرار دارد. به‌همین ترتیب، نقطهٔ L، محل برخورد خط‌های راست AC و BA' بر پاره خط AC واقع است. اگر محل برخورد خط‌های راست AC و $C'A'$ را M فرض کنیم، روشن است که روی پاره‌خط CL قرار می‌گیرد. در این صورت داریم:

$$S_{BLMN} = S_{BLC} - S_{CNM}$$

مثلث BLC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است، بنابراین

$$|CL| = |CB|\cdot \sin ۴۵^\circ = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

و، از آن‌جا

$$S_{BLC} = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a^۲}{۴}$$

مثلث CNM، هم متساوی‌الساقین و هم قائم‌الزاویه است و ضمناً داریم:

$$|CN| = |CM| = |BC| - |BN| = a - a\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $S_{CNM} = \frac{۱}{۲}\left(a - a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲$ و درنتیجه

$$S_{BLMN}=\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\left(a-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}(\sqrt{2}-1)$$

پاسخ: $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2}-1)$.

یادداشت. در این راه‌حل، دوران مثلث ABC را، درجهت مثلثاتی درنظر گرفتیم. اگر دوران درجهت حرکت عقربه‌های ساعت انجام گیرد، می‌توان از راه حل مشابهی استفاده کرد.

۴. معادله را می‌توان به‌این صورت نوشت :

$$\frac{1}{2}\cos 7x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-7x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

که به‌سادگی جواب‌ها به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{2}{7}k\pi+\frac{5\pi}{84} \quad , \quad x=\frac{2}{7}m\pi+\frac{11\pi}{84}(k,m\in Z)$$

اکنون، از بین این جواب‌ها، آن‌هایی را انتخاب می‌کنیم که با شرط

$$0/4\pi<x<\frac{6\pi}{7}$$

سازگار باشند برای رشتهٔ اول جواب‌ها داریم:

$$\frac{4}{10}\pi<\frac{2}{7}k\pi+\frac{5\pi}{84}<\frac{6\pi}{7} \Rightarrow \frac{7}{5}-\frac{5}{24}<k<3-\frac{5}{24}$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید $k=2$، یعنی جواب موردنظر چنین است:

$$x=\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}$$

وبرای رشتهٔ دوم جواب‌ها داریم :

$$\frac{4}{10}\pi<\frac{2}{7}m\pi+\frac{11\pi}{84}<\frac{6\pi}{7} \Rightarrow \frac{7}{5}-\frac{11}{24}<m<3-\frac{11}{24}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $m=1$ یا $m=2$. بنابراین، دو عدد از رشته جواب‌های دوم، درشرط مسأله صدق می‌کند:

$$x=\frac{11\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}, \quad x=\frac{11\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}$$

پاسخ : $\frac{35\pi}{84}$ ، $\frac{53\pi}{84}$ ، $\frac{59\pi}{84}$.

۴. حوزهٔ تعریف معادله، عبارت است از همهٔ مقدارهای x که در شرطهای $x>0$ و $5x-6>0$ صدق کنند؛ یعنی $\frac{6}{5}<x<+\infty$. معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، همارزاست با معادلهٔ

$$12\log_3^2(5x-6)-3\log_3(5x-6)\log 6\log_3 x+6\log_3^2 x=0$$

و یا معادلهٔ

$$2\log_3^2(5x-6)-3\log_3(5x-6).\log_3 x+\log_3^2 x=0 \qquad (2)$$

چون درحوزهٔ تعریف داریم: $\log_3 x>0$، می‌توانیم دوطرف معادلهٔ(۲)را در $\frac{1}{\log_3^2 x}$ ضرب کنیم، که به‌دست می‌آید:

$$2\log\frac{\log_3^2(5x-6)}{\log_3^2 x}-3\times\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x}+1=0$$

که با معادلهٔ مفروض هم‌ارزاست.

چون معادلهٔ درجهٔ دوم $2y^2-3y+1=0$ دارای دوجواب است: $y_1=1$، $y_2=\frac{1}{2}$، بنابراین، معادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارز است با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر:

$$\log_3(5x-6)=\log_3 x \quad و \quad \log_3(5x-6)=\frac{1}{2}\log_3 x$$

معادلهٔ اول به $5x-6=x$ منجرمی‌شود که جواب آن $x=\frac{3}{2}$ در حوزهٔ تعریف $x>\frac{6}{5}$ قرار دارد و، بنابراین، جواب آن است. معادلهٔ دوم، به $(5x-6)^2=x$ منجرمی‌شود که دوجواب دارد: $x_1=\frac{36}{25}$ و $x_2=1$؛ که تنها x_1 درحوزهٔ $x>\frac{6}{5}$ واقع است.

پاسخ: $\frac{3}{2}$ و $\frac{36}{25}$.

۵. سه‌جمله‌ای مفروض مسأله‌را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$۴\left(x-\frac{a}{۲}\right)^۲-(۲a-۲)$$

تابع $y(x)=۴\left(x-\frac{a}{۲}\right)^۲-(۲a-۲)$ درمجموعهٔ $x\leqslant\frac{a}{۲}$ نزولی ودر مجموعـهٔ $x\geqslant\frac{a}{۲}$ صعودی است. ازاین‌جا، نتیجه می‌شود :

۱) درحالت $\frac{a}{۲}\leqslant ۰$ یعنی $a\leqslant ۰$، $y(x)$ در مجمـوعـهٔ $x\geqslant ۰$، و به‌طورمسلم در بازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$، صعودی‌است وحداقل مقدارآن دراین‌بازه عبارت است از $y(۰)=a^۲-۲a+۲$.

۲) در حالت $\frac{a}{۲}\geqslant ۲$ یعنی $a\geqslant ۴$، $y(x)$ درمجموعهٔ $x\leqslant ۲$، و در نتیجه دربازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$، نزولی است وحداقل مقدار آن عبارت است‌از: $y(۲)=a^۲+۵a+۱۸$.

۳) در حالت $۰<\frac{a}{۲}<۲$ یعنی $۰<a<۴$، $y(x)$ در مجموعـهٔ $x\leqslant\frac{a}{۲}$، ودرنتیجه درمجموعهٔ $۰\leqslant x\leqslant\frac{a}{۲}$، نزولی و درمجموعهٔ $x\geqslant\frac{a}{۲}$، و درنتیجه درمجموعهٔ $\frac{a}{۲}\leqslant x\leqslant ۲$، صعودی است و ، بنابراین، حداقل مقدار آن، دربازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$، برابراست با $y\left(\frac{a}{۲}\right)=۲-۲a$.

به‌این ترتیب، $y_{min}(a)$، حداقل سه جمله‌ای درجـهٔ دوم مفروض، در بازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$، چنین است:

$$y_{min}(a)=\begin{cases} a^۲-۲a+۲ & (a\leqslant ۰)\\ ۲-۲a & (۰<a<۴)\\ a^۲-۱۰a+۱۸ & (a\geqslant ۴)\end{cases}$$

اکنون، مقدارهایی از a را پیـدا می‌کنیم که، به‌ازای آن‌ها، داشته باشیم: $y_{min}(a)=۳$.

درحوزهٔ $a\leqslant ۰$ داریم: $y_{min}(a)=a^۲-۲a+۲$. معادلهٔدرجهٔدوم $a^۲-۲a+۲=۳$، دوریشه دارد: $a_۱=۱-\sqrt{۲}$، $a_۲=۱+\sqrt{۲}$ ؛ که

ازآن‌ها تنها، $a_۱ = ۱ - \sqrt{۲}$، درحوزهٔ $a \leqslant ۰$ قراردارد.

درحوزهٔ $۰ < a < ۴$ داریم: $y_{min}(a) = a۲ - ۲a < ۲$. یعنی‌دراین حوزه، جوابی برای a پیدا نمی‌شود.

درحوزهٔ $a \geqslant ۴$ داریم: $y_{min}(a) = a^۲ - ۱۰a + ۱۸$. معادلهٔ درجهٔ دوم $a^۲ - ۱۰a + ۱۸ = ۳$،دوریشه‌دارد: $a_۳ = ۵ + \sqrt{۱۰}$، $a_۴ = ۵ - \sqrt{۱۰}$؛ که ازآن‌ها، تنها $a_۳ = ۵ + \sqrt{۱۰}$ درحوزهٔ $a \geqslant ۴$ واقع است.

پاسخ: $۱ - \sqrt{۲}$، $۵ + \sqrt{۱۰}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $\left(\frac{۴}{۳}, \frac{۸}{۳}\right)$، $(-۴, ۸)$؛ ۲. $\frac{۲(۳+\sqrt{۳})}{۳}a$؛

۳. $\frac{۴۳\pi}{۹۶}$، $\frac{۵۹\pi}{۹۶}$، $\frac{۶۷\pi}{۹۶}$؛ ۴. ۳، $\frac{۹}{۴}$؛ ۵. $\frac{۱}{۲}$، $۲ + \sqrt{۲}$.

گروه سوم. ۱. $(-۲, -۱)$، $\left(-\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)$؛ ۲. $(\sqrt{۲} - ۱)a^۲$؛

۳. $\frac{۶۵\pi}{۸۴}$، $\frac{۸۳\pi}{۸۴}$، $\frac{۸۹\pi}{۸۴}$؛ ۴. $\frac{۵}{۳}$، $\frac{۲۵}{۱۶}$؛ ۵. ۳، $-\frac{۳}{۲}$.

گروه چهارم ۱. $\left(\frac{۱۰}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$، $(۱۰, -۵)$؛ ۲. $\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}a$؛

۳. $\frac{۵۹\pi}{۹۶}$، $\frac{۷۹\pi}{۹۶}$، $\frac{۸۳\pi}{۹۶}$؛ ۴. ۱، ۲، $\frac{۱۶}{۹}$؛

۵. $-\frac{۱}{۲}$، $۱ + \sqrt{۲}$.

§۱۳. دانشکدهٔ زبان‌شناسی

۱۹۷۷

گروه اول

۱. تعداد قطعه‌های جعبهٔ اول را x و تعداد قطعه‌های جعبهٔ دوم را y می گیریم .

آن وقت، باتوجه به‌فرض‌های مسأله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x+y>29 \\ x-2>3y \\ 3x-2y<60 \end{cases}$$

دستگاه حاصل‌را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x>29-y \\ x>3y+2 \\ 20+\frac{2}{3}y>x \end{cases} \qquad (1)$$

از آن‌جا، به‌نابرابری‌های زیرمی‌رسیم:

$$20+\frac{2}{3}y>29-y \qquad (2)$$

$$20+\frac{2}{3}y>3y+2 \qquad (3)$$

نامعادلهٔ (۲) به‌صورت $y>\frac{27}{5}$ ونامعادلهٔ (۳) به‌صورت $y<\frac{54}{7}$درمی‌آیند.

چون $\frac{54}{7}=7\frac{5}{7}$ و $\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}$ ، پس

$$5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7} \Rightarrow y=6 \text{ یا } 7$$

درحالت $y=6$، دستگاه(۱)، چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x>23 \\ x>20 \\ x<24 \end{cases}$$

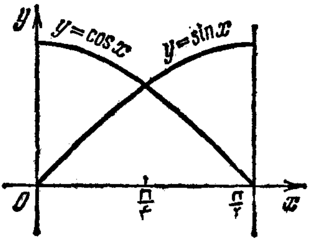
وروشن است‌که هیچ عددطبیعی درآن صدق نمی‌کند. بنابراین $y=7$، و دستگاه(۱) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} x > ۲۲ \\ x > ۲۳ \\ x < ۲۴\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

که تنها $x = ۲۴$ درآن صدق می‌کند.

پاسخ: درجعبهٔ اول ۲۴ قطعه ودرجعبهٔ دوم ۷ قطعه.

۲. طول نقطه‌های برخورد دو تابع $y(x) = \sin x$ و $y(x) = \cos x$، از حل معادلهٔ $\sin x = \cos x$ بـه دست می‌آید. این معادلـه، درفاصله از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تنها یك جواب دارد: $x = \frac{\pi}{۴}$.



شکل ۱۶۰

شکلی که مساحت آن‌را باید پیدا کنیم، از دو بخش تشکیل شده است.

الف) شکلی که‌زیر منحنی $y(x) = \cos x$ وبالای منحنی $y(x) = \sin x$، درفاصلهٔ از ۰ تا $\frac{\pi}{۴}$، قرار گرفته است؛ مساحت این شکل‌را $S_۱$ می‌نامیم.

ب) شکلی که‌زیر منحنی $y(x) = \sin x$ و بالای منحنی $y(x) = \cos x$ در فاصلهٔ از $\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۲}$، قراردارد؛ این مساحت را $S_۲$ می‌نامیم. داریم:

$$S_۱ = \int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x - \sin x)dx = (\sin n + \cos x)\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲} - ۱,$$

$$S_۲ = \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} (\sin x - \cos x)dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} = -۱ + \sqrt{۲}$$

ودرنتیجه، $S = S_۱ + S_۲ = ۲\sqrt{۲} - ۲$.

پاسخ: $۲(\sqrt{۲} - ۱)$ واحد مربع.

۳. اگرهمهٔ جمله‌ها را به‌سمت‌چپ ببریم و به‌ضرب تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲\sin\left[\frac{\pi}{۲}(۲x+۱)\right] \cdot \sin\left[\frac{\pi}{۲}(۲x^۲+۲x+۱)\right] = ۰$$

وبنابراین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$\sin\left[\frac{\pi}{۲}(۲x^۲+۲x+۱)\right]=۰ \quad \text{و} \quad \sin\left[\frac{\pi}{۲}۲x+۱)\right]=۰ \qquad (۴)$$

جواب‌های معادلهٔ اول به‌صورت $x=\frac{۲k-۱}{۲}$ $(k\in Z)$ در می‌آید که کوچکترین عدد مثبت آن، به ازای $k=۱$ به دست می‌آید: $x_۱=\frac{۱}{۲}$

جواب‌های معادلهٔ دوم، چنین است:

$$۲x^۲+۲x+۱-۲m=۰ \qquad (m\in Z) \qquad (۵)$$

یعنی جواب‌های معادلهٔ دوم (۴)، ازمجموعهٔ بی‌نهایت معادلهٔ (۵) به‌دست می‌آید. مبین این معادلهٔ درجهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم: $\Delta=۱۶m-۴$ که، به‌ازای $m\leqslant ۰$، منفی است؛ بنابراین، جواب‌های معادله‌های (۵) به‌ازای $m\geqslant ۱$ وجود دارند. برای هر $m\geqslant ۱$ داریم:

$$x'_m=\frac{-۱-\sqrt{۴m-۱}}{۲} \quad \text{و} \quad x''_m=\frac{-۱+\sqrt{۴m-۱}}{۲}$$

روشن‌است‌که $x'_m<۰$ و $x''_m>۰$. کوچکترین‌جواب x''_m به‌ازای $m=۱$ به‌دست می‌آید که برابراست با $x_۲=\frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}$. کوچکترین عدد،از بین دوعدد $x_۱$ و $x_۲$، جواب مساله است؛ معلوم است‌که $\frac{۱}{۲}<\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ و، در نتیجه،کوچکترین جواب مثبت معادله عبارت است از $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$.

پاسخ: $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$.

۴. روشن است که معادلهٔ مفروض، به‌ازای $a<۰$، جواب ندارد. a را عددی ثابت وغیرمنفی می‌گیریم. دراین صورت، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با معادلهٔ

$$۲|x|-x^۲=a^۲ \Rightarrow |x|^۲-۲|x|+a^۲=۰ \qquad (۶)$$

مبین سه‌جمله‌ای درجهٔدوم $z^۲-۲z+a^۲$ برابراست با $۴-۴a^۲$،بنابراین، معادلهٔ

$$z^{۲}-۲z+a^{۲}=۰ \qquad (۷)$$

به‌ازای $a>۱$ جواب ندارد. به‌این ترتیب، معادلهٔ (۶) هم به‌ازای $a>۱$ بدون جواب است.

به‌ازای $a=۱$، معادلهٔ (۷) یك جواب دارد: $z=۱$ و، بنابراین، معادلهٔ (۶) به‌صورت $|x|=۱$ درمی‌آیدوازآن‌جا: $x_۱=۱$ و $x_۲=-۱$.

درحالت $۰\leqslant a<۱$، معادلهٔ (۷)، به‌مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$|x|=۱+\sqrt{۱-a^{۲}} \quad و \quad |x|=۱-\sqrt{۱-a^{۲}} \qquad (۸)$$

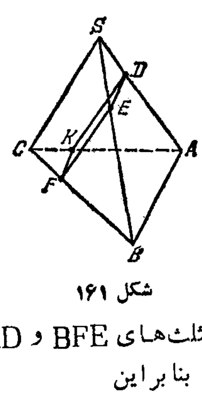
ودرنتیجه

$$x_{۱,۲}=\pm(۱+\sqrt{۱-a^{۲}}),\ x_{۳,۴}=\pm(۱-\sqrt{۱-a^{۲}})$$

یعنی، به‌ازای $۰<a<۱$، معادلهٔ مفروض ۴ جواب و، به‌ازای $a=۰$، ۳ جواب دارد. (زیرا درحالت $a=۰$ داریم: $x_۳=x_۴=۰$).

پاسخ: معادلهٔ مفروض‌به‌ازای $a<۰$ و $a>۱$ جواب ندارد؛به‌ازای $a=۰$ دارای سه‌جواب، به‌ازای $a=۱$ دارای دو جواب و به‌ازای $۰<a<۱$ دارای چهارجواب است.

۵. SABC را هرم مفروض می‌گیریم (شکل ۱۶۱). محل برخورد صفحهٔ α را با خط‌های راست CA و CB، به‌ترتیب، K و F فرض می‌کنیم.خط‌های راست DK و CS درصفحهٔ ACS قراردارند. اگراین‌دوخط راست‌متقاطع باشند، نقطهٔ برخورد آن ها باید هم به‌خط راست CS وهم به‌صفحهٔ α تعلق داشته باشد و این، بافرض مساله مغایر است: صفحهٔ α با یال SC موازی است. بنابراین $KD\|CS$ و نقطهٔ K بریال CA قراردارد. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که $FE\|CS$ و نقطهٔ F روی یال BC واقع است.



شکل ۱۶۱

ازآن‌چه ثابت‌کردیم، نتیجه می‌شودکه مثلث‌های BFE و AKD، به‌ترتیب، با مثلث‌های CBS و ACS متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{|BF|}{|BC|}=\frac{|FE|}{|CS|}=\frac{|BE|}{|BS|}=\frac{۲}{۳},\ \frac{|AK|}{|AC|}=\frac{|DK|}{|CS|}=\frac{|AD|}{|AS|}=\frac{۲}{۳} \qquad (۹)$$

چـون $FE \| CS$ و $KD \| CS$، پس $KD \| FE$. از (۹) نتیجـه مـی‌شود: $|KD| = |FE|$. یعنی چهارضلعی $EDKF$ متوازی‌الاضلاع است.

چندوجهـی $ABFKDE$ از سه‌هـرم تشکیل شـده است: $EKFB$، $EKDB$ و $AKBD$. درنتیجه، حجم آن $V_۱$، برابراست با

$$V_۱ = V_{EKFB} + V_{EKDB} = V_{AKBD}$$

هرم‌های $EKFB$ و $EKDB$، درراس B مشترک‌اند. ضمناً، مساحت‌قاعده‌های این دوهرم، یعنی مساحت مثلث‌هـای EKF و EKD برابرند (EK، قطـر متوازی‌الاضلاع $EDKF$ است). بنابراین

$$V_{EKFB} = V_{EKDB} \quad \text{و} \quad V_۱ = ۲V_{EKFB} + V_{AKBD}$$

حجم هـرم $SABC$ را V وفاصله نقطه‌هـای S و D را ازصفحـهٔ ABC، به‌ترتیب، h_S و h_D می گیریم. چون $|AD| : |AS| = \frac{۲}{۳}$، بنابراین داریم. $h_D = \frac{۲}{۳} h_S$.

$$V_{AKBD} = \frac{۱}{۲} S_{AKB} \cdot h_D = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۴} |AB| \cdot |AK| \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot h_D =$$

$$= \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۲} |AB| \cdot \frac{۲}{۳} |AC| \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot \frac{۲}{۳} h_S =$$

$$= \frac{۴}{۹} \cdot \frac{۱}{۳} S_{ABC} \cdot h_S = \frac{۴}{۹} V$$

فاصله نقطه‌هـای A و K را تا صفحـهٔ BCS، به‌ترتیب، h_A و h_K می گیریم. چـون $|CK| : |CA| = \frac{۱}{۳}$، پس $h_K = \frac{۱}{۳} h_A$. داریم:

$$V_{EKFB} = \frac{۱}{۳} S_{FBE} \cdot h_K = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۲} |BF| \cdot |BE| \cdot \sin \widehat{CBS} \cdot \frac{۱}{۳} h_A =$$

$$= \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲}{۳} |BC| \cdot \frac{۲}{۳} |BS| \cdot \sin \widehat{CBS} \cdot \frac{۱}{۳} h_A =$$

$$= \frac{۴}{۲۷} \cdot \frac{۱}{۳} S_{CBS} \cdot h_A = \frac{۴}{۲۷} V$$

بنابراین: $V_1 = 2\times\frac{4}{27}V+\frac{4}{9}V=\frac{20}{27}V$. در نتیجه:

$V_{BFKDSC}\frac{7}{27}V$؛ ونسبت مجهول برابرمی‌شود بـا $\frac{7}{20}$.

پاسخ: $\frac{7}{20}$.

۶. از معادلهٔ دوم به دست می‌آید: $y=\frac{\pi}{4}-x$، که اگـر به‌جای y در معادلهٔ اول دستگاه قراردهیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$tg\,x \cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5-2\sqrt{6} \qquad (10)$$

چون داریم:

$$tg\,x \cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}}$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۰)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}=5-2\sqrt{6} \qquad (11)$$

معادلهٔ (۱۱)، نسبت به مجهول $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$، یك جواب منحصردارد:

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

که دورشته جواب دارد:

$$x_1=n\pi+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}\,,\ x_2=m\pi+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12} \qquad (n,\ m\in Z)$$

که ازآن‌جا، جواب‌های متناظر y هم به‌دست می‌آید:

$$y_1=-n\pi+\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{12},\ \ y_2=-m\pi+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}(n,\ m\in Z)$$

پاسخ: $x_۱=n\pi+\frac{۵\pi}{۲۴}$، $y_۱=-n\pi+\frac{\pi}{۲۴}$ $(n\in Z)$ و

$x_۲=m\pi+\frac{۵\pi}{۲۴}$، $y_۲=-m\pi+\frac{۵\pi}{۲۴}$ $(m\in Z)$.

۰۷ اگر $(x_\circ ، y_\circ)$ جوابی از دستگاه مفروض باشد، باید داشته باشیم:

$$x_\circ+\log_۲ y_\circ=y_\circ\log_۲ ۳+\log_۲ x_\circ$$

$$x_\circ\log_۲ ۷۲+\log_۲ x_\circ=۲y_\circ+\log_۲ y_\circ \qquad (۱۲)$$

اگراین دوبرابری را با هم جمع کنیم، بعد از ساده کردن، خواهیم‌داشت:

$$x_\circ(۴+۲\log_۲ ۳)=y_\circ(۲+\log_۲ ۳) \Rightarrow y_\circ=۲x_\circ$$

اگر در برابری اول (۱۲)، به‌جای $y_\circ$ قراردهیم $۲x_\circ$، به‌دست می‌آید.

$$x_\circ+\log_۲(۲x_\circ)+۲x_\circ\log_۲ ۳+\log_۲ x_\circ$$

ازاین‌جا به‌دست می‌آید: $x_\circ=\frac{۱}{۲\log_۲ ۳-۱}$ اکنون، اگرعددهای

$$x_\circ=\frac{۱}{۲\log_۲ ۳-۱},\quad y_\circ=\frac{۲}{۲\log_۲ ۳-۱}$$

را درمعادله‌های دستگاه مفروض قراردهیم، روشن می‌شود که $(x_\circ ، y_\circ)$ جوابی از دستگاه است.

پاسخ: $x=\frac{۱}{۲\log_۲ ۳-۱}$، $y=\frac{۲}{۲\log_۲ ۳-۱}$.

گروه دوم

۰۱ درگروه اول ۱۱ نفر ودر گروه دوم ۱۷ نفر؛ ۰۲ $۴-\frac{۸}{۳}\sqrt{۳}$؛

۰۳ $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}-۱)$؛ ۰۴ به‌ازای $a<\circ$ جواب ندارد، به‌ازای $a=\circ$ دو جواب، به‌ازای $\circ<a<۴$ چهارجواب، به‌ازای $a=۴$ سه‌جواب‌وبه‌ازای $a>۴$ دوجواب دارد؛ ۰۵ $\frac{۱۱}{۵}$؛ ۰۶ $x_۱=n\pi+\frac{۷\pi}{۲۴}$، $y_۱=n\pi-\frac{\pi}{۲۴}$ $(n\in Z)$، $x_۲=k\pi+\frac{\pi}{۲۴}$، $y_۲=k\pi-\frac{۷\pi}{۲۴}$ $(k\in Z)$؛

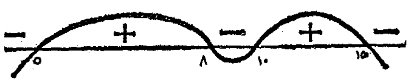
۷. $x = \frac{۱}{۲ - \log_۲ ۳}$، $y = \frac{۲}{۲ - \log_۲ ۳}$.

۱۹۷۸

گروه اول

۱. تعداد افراد گروه را x می‌گیریم، دراین صورت، در گروه دوم، $(۱۸ - x)$ نفر وجود دارند که از آن‌ها، $(۱۵ - x)$ نفر پسرند. مدت نگهبانی هر نفر از گروه اول، برابراست با $\frac{۴۸}{x}$ ساعت و مدت نگهبانـی هرپسر از گروه دوم: $\frac{۲۴ - ۳}{۱۵ - x}$ ساعت. طبق فرض، باید داشته باشیم:

$$\frac{۲۱}{۱۵ - x} + \frac{۴۸}{x} < ۹ \Rightarrow \frac{(x - ۸)(x - ۱۰)}{x(۱۵ - x)} < ۰$$



شکل ۱۶۲

که اگر آن را، با روش فاصله‌ها، حل کنیم (شکل ۱۶۲)، سه بازه به عنوان جواب برای x به دست می‌آید:

$$-\infty < x < ۰، \quad ۸ < x < ۱۰، \quad ۱۵ < x < +\infty$$

x، عددی‌است درست‌ومثبت و، ضمناً، ازشرط مساله معلوم‌است که $x < ۱۵$؛ بنابراین تنها جواب $x = ۹$ قابل قبول است.

پاسخ: گروه اول شامل ۹ نفر بوده است.

۲. قبل ازهمه یادآور می‌شویم که پنج رقم زوج (۰،۲،۴،۶،۸) وپنج رقم فـرد (۱،۳،۵،۷،۹) وجـود دارد. شمارهٔ بلیت شانس را abcdef می‌گیریم. در این‌عدد، رقم a می‌تواند یکی از ۵ رقم ۱،۳،۵،۷و۹؛ رقم b یکی از چهار رقم بقیه ورقم c، یکی‌ازسه رقم بقیه باشد. تعداد این ترکیب‌ها، برابراست با $۵ \times ۴ \times ۳$.

رقم‌هـای d،e وf می‌توانند هرکـدام از رقم‌های ۰،۲،۴،۶،۸ باشند. تعداد این ترکیب‌ها هم برابر است با $۵ \times ۵ \times ۵$.

بنابراین تعداد کل عددهای شش رقمی، که سه رقم اول آن‌ها سه رقم فرد مختلف و سه رقم آخری سه رقم زوج باشند برابر است با $۵\times۴\times۳\times۵\times۵\times۵$، یعنی ۷۵۰۰.

ولی در بین این‌ها، عددهایی وجود دارند که رقم سوم آن‌ها (از سمت چپ) برابر ۷ و رقم چهارم آن‌ها برابر ۸ است. شبیه قبل، می‌توان محاسبه کرد که تعداد این‌گونه عددها، برابر است با $۴\times۳\times۵\times۵$، یعنی ۳۰۰. بنابراین، تعداد بلیت‌های شانس برابر است با ۳۰۰ − ۷۵۰۰، یعنی ۷۲۰۰.

پاسخ: ۷۲۰۰.

۳. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$۵(\sin x+\sin ۳x)+۶\sin ۲x+\sin ۴x=۰$$

که به سادگی به این‌صورت درمی‌آید

$$۱۰\sin ۲x\cos x+۶\sin ۲x+۲\sin ۲x\cos ۲x=۰$$

که هم‌ارز است با مجموعهٔ دومعادلهٔ

$$\sin ۲x=۰،\quad ۵\cos x+۳+۲\cos^{۲}x-۱=۰$$

معادلهٔ اول بـه جواب‌های $(k\in Z)\,x=\frac{۱}{۲}k\pi$ منجرمی‌شود ومعادلهٔ دوم به این صورت درمی‌آید:

$$۲\cos^{۲}x+۵\cos x+۲=۰$$

که با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیرهم‌ارز است.

$$\cos x=-\frac{۱}{۲}،\quad \cos x=-۲$$

معادلهٔ دوم این مجموعه جواب‌ندارد وجواب‌های معادلهٔ اول‌آن چنین است:

$x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$.

پاسخ: $x=\frac{۱}{۲}n\pi$، $x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ $(n،k\in Z)$.

۴. راه حل اول. این تابـع، دارای دورهٔ تناوبی برابر ۲π است و، بنابرایـن، حداکثر و حداقل مقدار آن برابر است با حداکثر وحداقل ایـن تابع در بازهٔ $[-\pi،\pi]$.

نقطه‌های بحرانی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم. چون تابع $f(x)$، درهر نقطهٔ

محور عددی، مشتق پذیراست، بنابراین، نقطه‌های بحرانی آن، از حل معادلهٔ $f'(x)=0$ به‌دست‌می‌آید. مشتق $f'(x)$ را محاسبه می کنیم و برابرصفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=0$$

که با مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\sin x=0 \ , \ \cos x=\frac{1}{2}$$

معادلهٔ اول دربازهٔ $(-\pi,\pi)$ یك جواب دارد: $x_1=0$. معادلهٔ دوم، دراین بازهٔ، دارای دوجـواب است: $x_2=-\frac{\pi}{3}$ ، $x_3=\frac{\pi}{3}$. مقدار $f(x)$ را در نقطه‌های بحرانی و، همچنین، در دوانتهای بازهٔ $[-\pi,\pi]$ محاسبه‌می‌کنیم:

$$f(x_1)=\frac{1}{2} \ , \ f(x_2)=\frac{3}{4} \ , \ f(x_3)=\frac{3}{4} \ ;$$

$$f(-\pi)=f(\pi)=-\frac{3}{2}$$

بنابراین، حداکثر مقدار $f(x)$ برابر $\frac{3}{4}$ و حداقل آن برابر $-\frac{3}{2}$ است.

راه حل دوم. تابع مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x)=\sin^2 x+\cos x-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$$

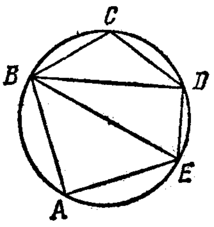
اکنون روشن است که $f(x)\leqslant\frac{3}{4}$، یعنی حداکثر مقدار $f(x)$ برابر است با $\frac{3}{4}$. حداکثرمقدار $\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$ به ازای $\cos x=-1$ به‌دست‌می‌آید، یعنی وقتی که برابر $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ شود. در نتیجه حداقل $f(x)$ برابر است با $\frac{3}{4}-\frac{9}{4}$، یعنی $-\frac{3}{2}$.

پاسخ: $\max f(x)=\frac{3}{4}$ ، $\min f(x)=-\frac{3}{2}$.

۵. چون $|AB|=2R\sin\widehat{AEB}$ (R، شعاع دایـرهٔ محیطی پنج ضلعی است)

پس (شکل ۱۶۳):

$$\sin \widehat{AEB} = \frac{|AB|}{۲R} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \widehat{AEB} = \frac{\pi}{۴} \text{ یا } \widehat{AEB} = \frac{۳\pi}{۴}$$



شکل ۱۶۳

حالت $\widehat{AEB} = \frac{۳\pi}{۴}$ ممکـن نیست، زیرا درآن صورت داریم:

$$\widehat{AEB} + \widehat{ABE} = \pi،$$

که‌باقضیهٔ مربوط به‌مجموع زاویه‌های مثلث مغایر است.

بنابراین $\frac{\pi}{۴}=\widehat{AEB}$، ولی دراین‌صورت

$$\widehat{BAE} = \pi - (\widehat{ABE} + \widehat{AEB}) = \frac{\pi}{۲}$$

یعنی BE قطر دایـره است و داریم: $|BE| = ۲$. به جز این مثلث ABE متساوی‌الساقین است وداریم: $|AE| = |AB| = \sqrt{۲}$.

چون مثلث BDE دردایره محاط ویکی ازضلع‌های‌آن قطری ازدایره است، مثلثی قائم‌الزاویه است. بنا براین $\widehat{BED} = \frac{\pi}{۲} - \widehat{ABD} = \frac{\pi}{۳}$. ولی در این صورت،

$$|ED| = |BE| \cdot \sin ۳۰^\circ = ۱ \text{ ،} \quad |BD| = \sqrt{|BE|^۲ - |ED|^۲} = \sqrt{۳}$$

بنابرفرض داریم: $|BC| = |CD|$؛ بنابراین کمان‌هـای $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ هم برابر می‌شونـد. زاویهٔ BED محاطی و روبه رو به کمان BCD است، بنابراین: $\widehat{BDC} = \frac{۱}{۲}\widehat{BED} = \frac{\pi}{۶}$ وایـن، به معنای آن است کـه کمان‌های $\widehat{CD}$ ، $\widehat{BC}$ ، $\widehat{ED}$ برابرنـد و، در نتیجه: $|CD| = |BC| = |ED| = ۱$.

مساحت مجهول پنج‌ضلعی ABCDE برابر است با

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EBD} + S_{DBC} =$$

$$= \frac{۱}{۲}|AB| \cdot |AE| + \frac{۱}{۲}|BD| \cdot |ED| + \frac{۱}{۲}|BD| \cdot |CD| \cdot \sin \widehat{BDC} =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

پاسخ: $1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

۶. x_0 را عددی حقیقی وجواب معادلهٔ مفروض می گیریم. در این صورت باید داشته باشیم:

$$\sqrt{x_0-\sqrt{3}}+\alpha^2x_0^2+2\alpha x_0(\sqrt{6}-\sqrt{3})-6\sqrt{2}+9=0 \quad (1)$$

روشن است که $x_0\neq 0$، زیرا حوزهٔ تعریف معادله عبارت است از $x_0\geqslant\sqrt{3}$. برابری (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$\alpha^2+2\alpha\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_0}\right)+\frac{\sqrt{x_0-\sqrt{3}}+9-6\sqrt{2}}{x_0^2}=0$$

ویا به صورت

$$\left(\alpha+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_0}\right)^2+\frac{\sqrt{x_0-\sqrt{3}}}{x_0^2}=0$$

از این‌جا، روشن می‌شود که، این برابری وقتی برقرار است که، به‌طور هم‌زمان، داشته باشیم:

$$\alpha=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_0} \quad \text{و} \quad \sqrt{x_0-\sqrt{3}}=0$$

ازبرابری دوم به‌دست می‌آید $x_0=\sqrt{3}$، ولی دراین صورت، ازمعادلهٔاول خواهیم داشت: $\alpha=1-\sqrt{2}$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، درواقع‌هم، به ازای $\alpha=1-\sqrt{2}$، معادلهٔ مفروض به جواب $x=\sqrt{3}$ می‌رسد.

پاسخ: $x=\sqrt{3}$.

۷. برای پیدا کردن حوزهٔ تعریف معادله، باید شرطهای $x^2-5x+6\neq 0$، $x-3\neq 0$ و $x-1>0$ را رعایت کرد، یعنی این حوزهٔ تعریف عبارت است از سه‌بازهٔ $1<x<2$ ، $2<x<3$ و $x>3$. معادلـهٔ مفروض را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\log_3|x-2|+\log_3|x-3|=\log_3\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$$

که بعداز ساده کردن، چنین می‌شود:

$$\log_{۳}|x-۲| = \log_{۳}\frac{x-۱}{۲} \Rightarrow |x-۲| = \frac{x-۱}{۲} \qquad (۲)$$

جواب‌های معادلهٔ (۲) را، به‌طور جداگانه، برای $a \leqslant ۲$ و $a > ۲$ به دست می‌آوریم.

درحالت $x \leqslant ۲$، معادلهٔ (۲) به صورت $-x+۲ = \frac{x-۱}{۲}$ در می‌آید که ریشه‌ای برابر $x_۱ = \frac{۵}{۳}$ دارد. چون $\frac{۵}{۳}$ در بازهٔ $x \leqslant ۲$ و، همچنین، درحوزهٔتعریف معادله قراردارد، بنابراین جوابی از معادلهٔ مفروض است.

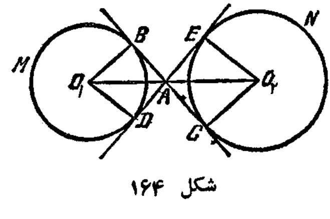
درحالت $x > ۲$، معادلهٔ (۲) به صورت $x-۲ = \frac{x-۱}{۲}$ درمی‌آید که ریشه‌ای برابر $x_۲ = ۳$ دارد. این ریشه در حوزهٔ تعریف معادلهٔ مفروض قرار ندارد و، بنابراین، جوابی از آن نیست.

پاسخ: $x = \frac{۵}{۳}$.

۱۹۷۹

گروه اول

۱. $O_۱$ را مرکز دایرهٔکوچکتر و $O_۲$ را مرکز دایرهٔ بزرگتر می‌گیریم (شکل ۱۶۴). نقطه‌های تماس خط‌های راست مفروض را با دایره با B، D، E و C نشان می‌دهیم. روشن است که $O_۱B \perp BC$ و $O_۲C \perp BC$، بنابراین، مثلث‌های $O_۱BA$ و $O_۲CA$ قائم‌الزاویه‌اند. این دو مثلث متشابه‌اند و، ضمناً،از فرض معلوم می‌شود که‌ضریب تشابه، برابر است با $\frac{۱}{۳}$. در نتیجه: $|O_۲C| = ۳R$. ولی در این صورت



شکل ۱۶۴

$$\sin O_2\widehat{A}C=\frac{|O_2C|}{|O_2A|}=\frac{1}{2} \Rightarrow O_2\widehat{A}C=\frac{\pi}{6}$$

به جز این

$$|AC|=|AO_2|\cdot\cos\frac{\pi}{6}, \ |AB|=|O_1A|\cdot\cos\frac{\pi}{6}, \ |O_1A|=\frac{R}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$S_{O_2AC}=\frac{1}{2}|O_2A|\cdot|AC|\cdot\sin O_2\widehat{A}C=\frac{1}{2}\cdot 6R\cdot 6R\cdot\cos\frac{\pi}{6}\times$$

$$\times\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{9}{2}\sqrt{3}R^2,$$

$$S_{O_1BA}=\frac{1}{2}|O_1A|\cdot|AB|\cdot\sin O_1\widehat{A}B=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\sin\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

به همین ترتیب به دست می‌آید:

$$S_{O_2AE}=S_{O_2AC}=\frac{9}{2}\sqrt{3}R^2, \ S_{O_1AD}=S_{O_1BA}=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

مساحت مجهول برابراست با مجموع مساحت‌های چهارمثلث O_1BA، O_1DA، O_2CA، O_2EA و دوقطاع باکمان‌های ENC و BMD. چون

$$E\widehat{O_2}C=E\widehat{O_2}A+C\widehat{O_2}A=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$B\widehat{O_1}D=B\widehat{O_1}A+D\widehat{O_1}A=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

بنا براین،زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمان‌های ENC و BMD، برابرند با $\frac{4\pi}{3}$، یعنی مساحت قطاع‌های بزرگ و کوچك، به ترتیب، برابرند با

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot R^2$ و $\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}(3R)^2$. بنابراین، مساحت مطلوب، چنین می‌شود:

$$S=2\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}R^2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R^2+\frac{2\pi}{3}\cdot 9R^2+\frac{2\pi}{3}\cdot R^2=$$

$$=10R^2\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)$$

پاسخ: $10R^2\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)$.

۲. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\cos 2x+3\sin x=1+2\sin x$$

که با استفاده از رابطهٔ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ ، به این صورت درمی‌آید:

$$2\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$$

بنابراین معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است بامجموعهٔ دومعادلهٔ

$$\sin x=0 \text{ و } \sin x=\frac{1}{2}$$

که جواب‌های آن‌ها به‌سادگی به دست می‌آید:

پاسخ: $k\pi$، $n\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}$ $(k, n\in Z)$.

۳. حوزهٔ تعریف نامعادله از شرط‌های $4-x>0$ و $x-1>0$ به دست می‌آید و، بنابراین، عبارت است از $1<x<4$. نامعادلهٔ مفروض، درحوزهٔ تعریف خود، هم‌ارزاست با نامعادلهٔ

$$(4-x)(x-1)\leqslant 2 \Rightarrow x\leqslant 2 \text{ و } x\geqslant 3$$

که با توجه به حوزهٔ تعریف نامعادله، جواب‌ها چنین می‌شود:

$$1<x\leqslant 2 \text{ و } 3\leqslant x<4$$

۴. فرض می‌کنیم، این مقدار محصول را، هر کدام ازخط‌های اول، دوم وسوم، به‌ترتیب، در x، y و z ساعت تولید کنند. دراین‌صورت، درهرساعت‌به‌ترتیب، $\frac{1}{x}$، $\frac{1}{y}$، $\frac{1}{z}$ محصول را تهیه خواهند کرد. می‌دانیم، مقدارمحصول هرسه خط

روی هم، ۱/۵ برابرمحصولی است کــه خطهای اول ودوم درهمان‌زمــان تولید می کنند، یعنی

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1/5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \qquad (1)$$

خطهای دوم‌وسوم درهرساعت، روی هم، $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ محصول راتولید می کنند، بنابراین، برای تولید تمامی محصول، به $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ ساعــت نیاز دارنــد؛ در نتیجه، طبق‌فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=x-\frac{24}{5} \qquad (2)$$

ازفرض، همچنین، نتیجه می‌شود:

$$y=x-2 \qquad (3)$$

ازمعادلهٔ (۲) به‌دست می‌آید: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x-\frac{24}{5}}$، که اگر آن را بــه‌جای $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ درسمت چپ معادلهٔ (۱) قرار دهیم، باتوجه به معادلهٔ (۳)، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{x}+\frac{5}{5x-24}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right) \qquad (4)$$

که بعدازتبدیل‌های لازم، چنین می‌شود:

$$\frac{5x^2-43x+24}{x(x-2)(5x-24)}=0$$

ازاین‌جا، برای معادلهٔ (۴)، دو ریشه پیدا می‌شود: $x_1=8$ و $x_2=\frac{3}{5}$. از فرض‌مساله معلوم‌است که $x>2$. بنابراین، تنها $x_1=8$ با شرط‌های مساله سازگار است.

پاسخ: ۸ ساعت.

۵. چون کسر $\frac{m}{n}$ کوچکتر از واحد است، بنا بر این $m<n$ و در نتیجه $(۳n-m)$ عددی طبیعی است. فرض کنیم، بتوان صورت و مخرج کسر $\frac{۳n-m}{۵n+۲m}$ را به عدد طبیعی $p>۱$ ساده کرد. در این صورت، دو عدد طبیعی N و M پیدا می‌شود، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$۳n-m=pN \text{ و } ۵n+۲m=pM$$

و از آن‌جا

$$۱۱n=p(۲N+M) \text{ و } ۱۱m=p(۳M-۵N)$$

یعنی $۱۱n$ و $۱۱m$ بر p بخش‌پذیرند و چون کسر $\frac{m}{n}$ ساده نشدنی است، بنا بر این باید ۱۱ بر p بخش‌پذیر باشد و چون $p>۱$، پس $p=۱۱$. به‌این‌ترتیب، اگر کسر $\frac{۳n-m}{۵n+۲m}$ ساده شدنی باشد، تنها می‌تواند به‌عدد ۱۱ ساده شود.

پاسخ: ۱۱

گروه دوم

۱. $\frac{۵}{۶}R^۲(۲\sqrt{۳}-۵\pi)$؛ ۲. $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$، $x=n\pi-\frac{\pi}{۴}$ $(k،n\in Z)$؛

۳. $-۳\leqslant x\leqslant -۴$ ، $۱\geqslant x>۰$؛ ۴. ۲ساعت؛ ۵. ۷.

۱۹۸۰

گروه اول

۱. معادلهٔ مفروض، به‌سادگی، به‌مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$cos\,x=۰ \text{ و } \sqrt{۳}\,sin\,x=cos\,x$$

جواب‌های معادلهٔ اول عبارت است از $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in Z)$. و چون جواب‌های معادلهٔ $cos\,x=۰$ در معادلهٔ دوم این مجموعه صدق نمی‌کند،

بنابراین با تقسیم دو طرف آن بر $\cos x$ ، به‌معادلهٔ $tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و، در نتیجه،

به جواب $x=m\pi+\frac{\pi}{6}$ $(k\in Z)$. می‌رسیم.

پاسخ : $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $x=m\pi+\frac{\pi}{6}$ $(k،m\in Z)$.

۲. حوزهٔ تعریف نامعادله، باشرط $x^2-1>0$ به‌دست‌می‌آید، یعنی $x<-1$ و $x>1$. در این حوزه ، نامعادلهٔ مفروض ، به صورت $x^2-1\leqslant 3$ درمی‌آید. جواب‌های نامعادلهٔ اخیر، عبارت‌است از $-2\leqslant x\leqslant 2$ ، که با توجه به حوزهٔ تعریف نامعادله ، به جواب‌های $-2\leqslant x<-1$ و $1<x\leqslant 2$ برای نامعادلهٔ مفروض می‌رسیم.

پاسخ : $-2\leqslant x<-1$ و $1<x\leqslant 2$.

۳. اگر عدد $x_0=1$ را به‌جای x درمعادلهٔ $y=4-x^2$ قراردهیم، $y_0=3$ یعنی عرض نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید. ضریب زاویهٔ مماس، برابر است با مقدار مشتق تابع $y=4-x^2$ به‌ازای طول نقطهٔ تماس:

$$y'(x)=-2x \,،\, y'(1)=-2$$

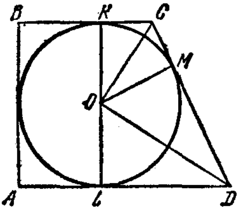
و در نتیجه ، معادلهٔ خط مماس، چنین می‌شود:

$$y-3=-2(x-1)\Longrightarrow y+2x-5=0$$

نقطهٔ برخورد مماس با محور Oy ، طولی برابر صفر دارد؛ اگر در معادلهٔ مماس $x=0$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $y=5$، که همان عرض نقطه برخورد خط مماس با محور Oy است.

پاسخ : $(0 \,،\, 5)$.

۴. $ABCD$ را ذوزنقهٔ مفروض می گیریم (شکل ۱۶۵). نقطهٔ تماس ضلع CD از ذوزنقهٔ $ABCD$ را با دایرهٔ محیطی آن، M می گیریم. اگر نقطه‌های C و D را به مرکز دایره وصل کنیم، مثلث COD به دست می‌آید. چون نقطهٔ O از دوضلع BC و CD به یك فاصله است ، بنابراین CO نیمساز زاویهٔ BCD است وداریم:



شکل ۱۶۵

$$\widehat{OCD}=\frac{۱}{۲}\widehat{BCD}$$

به همین ترتیب $\widehat{ODC}=\frac{۱}{۲}\widehat{ADC}$. چون $BC\|AD$ ، پس

$$\widehat{BCD}+\widehat{ADC}=\pi \Longrightarrow \widehat{OCD}+\widehat{ODC}=\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \widehat{COD}=\frac{\pi}{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ COD ، بنابر قضیه فیثاغورث، داریم:

$$|CD|=\sqrt{|OC|^۲+|OD|^۲}\ ۲=\sqrt{۵}$$

چون M ، نقطهٔ تماس دایره با ضلع CD است، بنابراین $OM \perp CD$. از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OCD و OMD ، به‌دست می‌آید:

$$\frac{|CD|}{|OD|}=\frac{|OC|}{|OM|} \Rightarrow |OM|=\frac{|OD|\cdot|OC|}{|CD|}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

از نقطهٔ O ، خط راستی عمود بر BC رسم می‌کنیم. این خط راست، بر AD هم عمود خواهد بود. نقطه‌های برخورد این‌خط راست، باخطهای راست AD و BC (نقطه‌های L و K) ، همان نقطه‌های تماس ضلع‌های ذوزنقه با دایرهٔ محیطی آن خواهند بود. یعنی طول ارتفاع ذوزنقه $|KL|=۲|OM|=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$ و $|AB|=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$. چون‌ذوزنقه، بردایره‌ای‌محیط است، بنابراین

$$|BC|+|AD|=|AB|+|CD|=\frac{۸}{\sqrt{۵}}+۲\sqrt{۵}=\frac{۱۸}{\sqrt{۵}}$$

و از آن‌جا

$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(|BC|+|AD|)\cdot|AB|=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱۸}{\sqrt{۵}}\cdot\frac{۸}{\sqrt{۵}}=\frac{۷۲}{۵}$$

پاسخ : $\frac{۷۲}{۵}$ واحد مربع .

۵. راه حل اول. Δ ، مبیّن معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=(۲a-۶)^۲-۴(a-۱۳)=۴a^۲-۲۸a+۸۸=(۲a-۷)^۲+۳۹$$

چون‌مبین معادله، مقداری مثبت‌است، بنابراین،معادلهٔ‌درجهٔ دوم مفروض، برای

هرمقدار دلخواه a ، دو ریشهٔ حقیقی دارد:

$$x_1=(3-a)-\sqrt{a^2-7a+22} \text{ و } x_2=(3-a)+\sqrt{a^2-7a+22}$$

اکنون، می‌توان مسأله را به‌این صورت تنظیم کرد: همهٔ مقدارهای پارامتر a را، از بازهٔ $[1,+\infty)$، طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، عبارت

$$f(a)=(3-a)+\sqrt{a^2-7a+22}$$

حداکثر مقدار ممکن باشد. تابع $f(a)$ ، در هر نقطه از بازهٔ $[1,+\infty)$، دارای مشتق است:

$$f'(a)=-1+\frac{2a-7}{2\sqrt{a^2-7a+22}}=\frac{2a-7-2\sqrt{a^2-7a+22}}{2\sqrt{a^2-7a+22}}$$

چون داریم:

$$2\sqrt{a^2-7a+22}=\sqrt{(2a-7)^2+39}>|2a-7|\geqslant 2a-7$$

بنابراین، به‌ازای هر a از بازهٔ $1<x<+\infty$ داریم، $f'(a)<0$، یعنی تابع $f(a)$ ، دراین بازه، نزولی است. وچون $f(a)$ در نقطه $a=1$ پیوسته است ، بنابراین $f(a)$ ، در بازهٔ $1\leqslant x<+\infty$ نزولی است و در نقطهٔ $a=1$ به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد.

راه حل دوم. در معادلهٔ مفروض $a=1$ می گیریم؛ در این صورت، به معادلهٔ درجهٔ‌دوم $x^2-4x-12=0$ می‌رسیم که ریشهٔ بزرگتر آن عبارت است از $x=6$. ثابت می کنیم که ، برای هرمقدار a از بازهٔ $(1,+\infty)$ معادلهٔ مفروض نمی‌تواند ریشه‌ای در حوزهٔ $x\geqslant 6$ داشته باشد. چون

$$x^2-6x+2ax+a-13=(a-1)(2x+1)+(x-6)(x+2)$$

بنابراین روشن است که برای هر $a>1$ و $x\geqslant 6$ ، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم

$$x^2-6x+2ax+a-13$$

تنها می‌تواند مقدارهای مثبت را اختیار کند. یعنی؛ معادلهٔ مفروض ، به ازای $a>1$، در حوزهٔ $x\geqslant 6$ جوابی ندارد. به‌این ترتیب $a=1$ ، تنها جواب مسأله است.

پاسخ : $a=1$.

۶. دستگاه مفروض را، می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} y-x=۵ \\ z(y-x)-۴y+۳۰=۰ \\ ۲z(y-x)-۴y=۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر عدد ۵ را به‌جای $y-x$ در معادله‌های دوم وسوم دستگاه (۱) قرار دهیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} y-x=۵ \\ ۵z-۴y+۳۰=۰ \\ ۱۰z-۴y=۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

که با دستگاه مفروض‌مسأله، هم‌ارز است. ازمعادلهٔ سوم دستگاه (۲)، نتیجه می‌شود:

$$z=\frac{۲y}{۵} \qquad (۳)$$

اگر $\frac{۲y}{۵}$ رابه‌جای z درمعادلهٔ دوم‌دستگاه(۳) بگذاریم، به‌معادلهٔ یك‌مجهولی $۲y-۴y+۳۰=۰$ می‌رسیم که یك جواب منحصر دارد: $y=۱۵$، با قراردادن این مقدار y در معادلهٔ (۳) ومعادلهٔ اول دستگاه (۲)، z و x هم به دست می آید.

پاسخ: $x=۱۰$ ، $y=۱۵$ ، $z=۵$.

گروه دوم

۱. $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ ، $x=m\pi+(-۱)^m\cdot\frac{\pi}{۶}$ $\quad (k,m\in Z)$

۲. $-\infty<x\leqslant-۲$ ، $۲\leqslant x<+\infty$. ۳. $-\frac{۹}{۵}$ ؛ ۴. $\cos KBM=\frac{۴}{۵}$ ؛

۵. -۴ ؛ ۶. $x=۱۰$ ، $y=۱۵$ ، $z=۶$.

۱۹۸۱

گروه اول

۱. معادلهٔ مفروض، بعد از تبدیل‌های لازم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\cos ۲x - \cos ۸x + \cos ۶x = ۱$$

اگر مجموع دوجملهٔ اول و سوم سمت چپ معادله را به‌ضرب تبدیل کنیم و جمله دوم را برحسب $\cos ۴x$ بنویسیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$۲\cos ۴x \cos ۲x - ۲\cos^۲ ۴x = ۰ \Rightarrow ۲\cos ۴x(\cos ۲x - \cos ۴x) = ۰$$

که با تبدیل تفاضل داخل پرانتز، به‌صورت ضرب، سرانجام چنین می‌شود:

$$\cos ۴x \sin ۳x \sin x = ۰$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، هم ارز است با مجموعهٔ سه معادلهٔ

$$\cos ۴x = ۰ \text{ ، } \sin ۳x = ۰ \text{ ، } \sin x = ۰$$

جواب‌های معادلهٔ اول $(n \in Z)x = \frac{۱}{۴}n\pi + \frac{\pi}{۸}$ ، جواب‌های معادلـهٔ دوم $(m \in Z)\ x = \frac{۱}{۳}m\pi$ و جواب‌های معادلهٔ سوم $(l \in Z)x = l\pi$ می‌شود.

جواب‌های معادلهٔ سوم، ضمن جواب‌های معادلهٔ دوم وجود دارد (وقتی ، در جواب‌های معادلـهٔ دوم، m مضربی از معادلـهٔ سوم است).

$$\text{پاسخ: } x = \frac{۱}{۴}n\pi + \frac{\pi}{۸} \text{ ، } (n, m \in Z)x = \frac{۱}{۳}m\pi$$

۲. حوزهٔ تعریف نامعادله، با شرط $۲ - x > ۰$ به‌دست می‌آید ، یعنی $x < ۲$.

دراین حوزه داریم:

$$\log_{\frac{۱}{۴}}(۲ - x) = \frac{\log_۲(۲ - x)}{\log_۲\frac{۱}{۴}} = -\frac{۱}{۲}\log_۲(۲ - x)$$

بنابراین ، نامعادلـهٔ مفروض ، در بـازهٔ $-\infty < x < ۲$ ، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$\log_۲(۲ - x) + ۴\log_۲(۲ - x) - ۵ \geqslant ۰$$

جواب‌هـای نـامعادلـهٔ درجهٔ دوم $t^۲ + ۴t - ۵ \geqslant ۰$ ، عبارت است از $t \leqslant -۵$ و $t \geqslant ۱$. بنابراین نامعادلهٔ مفروض، در حوزهٔ $-\infty < x < ۲$

با مجموعهٔ نامعادله‌های زیر هم‌ارز است:

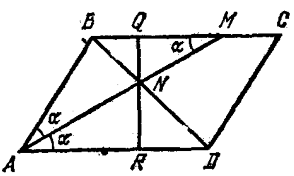
$$\log_{2}(2-x) \leqslant -5 \text{ ، } \log_{2}(2-x) \geqslant 1 \qquad (1)$$

نامعادلهٔ اول، در بازهٔ $x<2$ ؛ هم‌ارز است با نامعادلهٔ $2-x \leqslant 2^{-5}$، که جواب‌هـای آن عبارت است از: $x \geqslant 1\frac{31}{32}$. این جواب‌ها، با توجه به حوزهٔ تعریف نامعادله، به‌صورت $1\frac{31}{32} \leqslant x < 2$ درمی‌آیند.

نامعادلهٔ دوم مجموعهٔ (۱)، در بازهٔ $x<2$، به‌صورت $2-x \geqslant 2$ درمی‌آید که جواب‌های آن $x \leqslant 0$ است، که همهٔ آن‌ها در بازهٔ $x<2$ قرار دارند.

پاسخ: $-\infty < x \leqslant 0$ ، $1\frac{31}{32} \leqslant x < 2$.

۳. ABCD را متوازی‌الاضلاع مفروض می‌گیریم (شکل ۱۶۶). از نقطهٔ N، ارتفاع QR متوازی‌الاضلاع را می‌گذرانیم. زاویهٔ BAM را α می‌گیریم؛ در این صورت مقدار زاویهٔ AMB هم برابر α می‌شود ($BC \| AD$ و AM قاطع). بنابراین، مثلث ABM متساوی‌الساقین است و داریم: $|MB|=|AB|=6$ و از آن‌جا $|BC|=|AD|=10$ چون $\widehat{BMA}=\widehat{MAD}$ و $\widehat{MBN}=\widehat{BDA}$، مثلث‌های BMN و AND متشابه‌اند. چون، در دو مثلث متشابه، نسبت دو ضلع متناظر، با نسبت دو ارتفاع متناظر برابر است، بنابراین داریم:



شکل ۱۶۶.

$$\frac{|QN|}{|NR|}=\frac{|BM|}{|AD|} \Longrightarrow \frac{|QN|}{3-|QN|}=\frac{6}{10}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $|QN|=\frac{9}{8}$. اکنون می‌تـوان مساحت مثلث BNM را محاسبه کرد:

$$S=\frac{1}{2}|QN|\cdot|BM|=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot 6=\frac{27}{8}$$

پاسخ: $\frac{27}{8}$ سانتی‌متر مربع.

۴. فرض می‌کنیم، کارگر اول ساعتی x قطعه و کارگـر دوم ساعتی y قطعه تهیه

کنند. چون $\frac{۱}{۳}$ کار برابر با ۱۲ قطعه می‌شود، پس کارگر اول آن‌ها را $\frac{۱۲}{x}$ ساعت و کارگر دوم در $\frac{۱۲}{y}$ ساعت تهیه می‌کنند. کارگر اول ۴ دقیقه دیرتر آغاز به‌کار کرد، ولی $\frac{۱}{۳}$ کار را، دریك لحظه تمام‌کردند، بنابراین

$$\frac{۱۲}{x}+\frac{۴}{۶۰}=\frac{۱۲}{y}$$

در مرحلهٔ دوم کار، برای هرکارگر ۲۴ قطعه باقی می‌ماند. کارگر دوم، این قطعه‌ها را در $\frac{۲۴}{y}$ ساعت تمام‌می‌کند، وکارگر اول، بعد از ۲ دقیقه‌استراحت، ۲۶ قطعه را تا لحظهٔ پایان کار کارگر دوم، می‌سازد. بنابراین، به‌معادلهٔ دوم می‌رسیم:

$$\frac{۲۶}{x}+\frac{۲}{۶۰}=\frac{۲۴}{y}$$

به‌این ترتیب، برای محاسبهٔ x و y ، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}\frac{۱۲}{x}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱۲}{y}\\ \frac{۲۶}{x}+\frac{۱}{۳۰}=\frac{۲۴}{y}\end{cases}\qquad(۲)$$

اگر دو طرف معادلهٔ اول را در ۲ و دوطرف معادلهٔ دوم را در ۱ — ضرب و، سپس، با هم جمع‌کنیم، به‌دستگاه زیر، هم‌ارز دستگاه (۲) می‌رسیم:

$$\begin{cases}\frac{۲}{x}=\frac{۱}{۱۰}\\ \frac{۱۲}{x}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱۲}{y}\end{cases}\qquad(۳)$$

ازمعادلهٔ اول‌دستگاه (۳) به‌دست می‌آید: $x=۲۰$ و، سپس، از معادلهٔ‌دوم: $y=۱۸$.

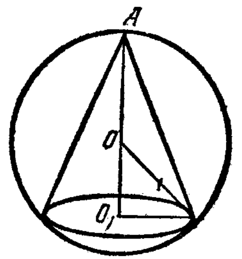
پاسخ: کارگراول، ساعتی ۲۰ قطعه وکارگردوم ساعتی ۱۸ قطعه تهیه می‌کنند.

۵. کره‌ای به شعاع R و مرکز O و مخروطی محاط در آن با ارتفاع به طول

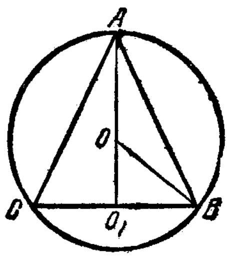
x و شعاع قاعدهٔ y در نظر می گیریم (شکل ۱۶۷). حجم V این مخروط عبارت است از

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 x$$

مرکز قاعدهٔ مخروط را O_1 و رأس آن را A می‌نامیم . خط راست O_1A برصفحهٔ قاعدهٔ مخروط عمود است واز مرکز دایرهٔ فصل مشترك صفحهٔ قاعدهٔ مخروط و کره می گذرد و ، بنابراین ، مرکز کره، روی این خط راست قرار دارد. صفحه‌ای از خط راست O_1A عبور می‌دهیم. این صفحه باکره، در دایره‌ای به‌شعاع R و به‌مرکز O و با مخروط در مثلث ABC یکدیگر را قطع می کنند؛ AC و AB ، مولدهای مخروط و BC قطر قاعدهٔ مخروط است (شکل ۱۶۸).



شکل ۱۶۷



شکل ۱۶۸

ارتفاع O_1A مثلث ABC برابر است با x ، بنابراین طول پاره‌خط O_1O برابر است با $|x-R|$. چون شعاع قاعده برابر است با y، پس $|O_1B|=y$. وهمچنین $|OB|=R$. بنابراین داریم:

$$|OB|^2=|O_1O|^2+|O_1B|^2$$

(یادآوری‌می کنیم که اگر $x=R$، یعنی $|O_1O|=0$ ، این برابری به‌یك اتحاد تبدیل می‌شود). یعنی

$$R^2=|x-R|^2+y^2$$

ازآن‌جا $y^2=2Rx-x^2$. بنابراین

$$V=\frac{1}{3}\pi(2Rx-x^2)x=\frac{\pi}{3}(2Rx^2-x^3)$$

مسأله به‌این‌جا منجر می‌شود که، باید x را طوری پیدا کنیم که، به‌ازای آن،

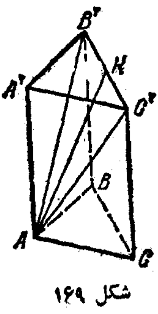
تابع $V(x)=\frac{\pi}{3}(2Rx^2-x^3)$، در بازهٔ $0<x<2R$، به‌حداکثر مقدار خود برسد. مشتق $V(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}(4Rx-3x^2)=\frac{\pi}{3}x(4R-3x)$$

روشن است که $V'(x)$ در بازهٔ $0<x<\frac{4R}{3}$ مثبت و، بنابراین، $V(x)$ صعودی و در بازهٔ $\frac{R4}{3}<x<2R$ منفی و، بنابراین، $V(x)$ نزولی است. چون تابع $V(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{4R}{3}$ پیوسته است، بنابراین، از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که $V(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{4}{3}R$ به حداکثر مقدار خود در بازهٔ $0<x<2R$ می‌رسد. بنابراین، حداکثر حجم متعلق به‌مخروطی است که ارتفاع آن برابر $\frac{4}{3}R$ باشد، شعاع قاعدهٔ این مخروط برابر است با

$$y=\sqrt{2R\cdot\frac{4}{3}R-\frac{16}{9}R^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

پاسخ: ارتفاع برابر $\frac{4}{3}R$ و شعاع قاعده برابر $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.



شکل ۱۶۹

۶. $A'B'C'$ و ABC را منشور منتظم مفروض می‌گیریم (شکل ۱۶۹) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و $A'B'C'$، قاعده‌های این منشور و مستطیل‌های $AA'B'B$، $AA'C'C$، $BB'C'C$، وجه‌های جانبی آن هستند طول ضلع قاعدهٔ این منشور را a می‌نامیم. دراین صورت داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a^2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3}{4}}a^2$$

و چون، حجم منشور $V=S_{ABC}\cdot H$، بنابراین

$$H=\frac{V}{S_{ABC}}=\frac{V}{\sqrt{\frac{3}{4}}a^2}=\frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$$

مثلث $AB'C'$ را در نظر می‌گیریم. چون مستطیل‌هـای $AA'B'B$ و $AA'C'C$ برابرند، قطرهای AB' و AC' آن‌ها هم، برابرمی‌شود:

$$|AB'|=|AC'|=\sqrt{H^2+a^2}$$

بنابراین مثلث $AB'C'$ متساوی‌الساقین است. ارتفاع AK از این مثلث را رسم می‌کنیم. چون مثلث AKC' قائم‌الزاویه وطول KC' برابر $\frac{a}{2}$، طول AC' برابر $\sqrt{H^2+a^2}$ و زاویهٔ KAC' برابر $\frac{\alpha}{2}$ است، پس

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|KC|}{|AC'|}=\frac{a}{2\sqrt{H^2+a^2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{a^2}{4(H^2+a^2)}=\frac{a^2}{4\left(\frac{16V^2}{3a^4}+a^2\right)}$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$a^6=\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 16V^2}{3\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} \Longrightarrow \alpha=\sqrt[3]{\frac{8V\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3(2\cos\alpha-1)}}}$$

پاسخ : $\sqrt[3]{\dfrac{8V\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3(2\cos\alpha-1)}}}$.

گروه‌های دوم تا چهارم

گروه دوم. ۱. $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$ ، $x=2n\pi+\pi$ $(k,n\in Z)$؛

۲. $x\leqslant -119$ ، $1\leqslant x<6$ ، ۳. $\frac{1}{24}$؛ ۴. سرعت کشتی ۲۰ کیلـومتر در

ساعت و سرعت قایق‌موتوری ۶۰ کیلومتر در ساعت؛ ۵. ارتفاع $\frac{۲}{\sqrt{۳}}R$، شعاع قاعده $R\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ؛ ۶. $\frac{۱}{۲}b^۲\cos\alpha$.

گروه سوم. ۱. $x=k\pi$ ، $(k,n\in Z)\ x=\frac{۱}{۲}n\pi+(-۱)^{n+۱}.\frac{\pi}{۶}$ ؛ ۲. $x\leqslant -۲۲$ ، $-۴\leqslant x<۵$. ۳. $\frac{۱}{۳۳}$ ؛ ۴. ۴۰ متر ؛ ۵. ارتفاع $\frac{۲}{۳}R$ ، شعاع قاعده $\frac{۲}{۳}R$ ؛ ۶. $\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}a^۳$.

گروه چهارم. ۱. $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، $(k,n\in Z)x=۲n\pi$ ؛ ۲. $x\leqslant ۱$ ، $۲\frac{۱۵}{۱۶}\leqslant x<۳$ ؛ ۳. $۸\sqrt{۳}$ ؛ ۴. ۵۰ کیلومتر ؛ ۵. ارتفاع $\frac{R}{\sqrt{۳}}$ ، شعاع قاعده $R\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ؛ ۶. $\frac{S\sqrt{S}}{۳}\sqrt{tg\frac{\alpha}{۲}\left(۳-tg^۲\frac{\alpha}{۲}\right)}$.

ضمیمه

در این‌جا، متن و جواب مسأله‌های بعضی از گروه‌ها را، در امتحان ورودی سال ۱۹۸۲، می‌آوریم.

دانشکدهٔ مکانیک ـ فیزیک

گروه اول

۱. معادلهٔ $log_{۳}(x^{۲}-۶)=log_{۳}(x-۲)+۱$ را حل کنید.

۲. در چهار ضلعی محدب ABCD، دایره‌ای به‌مرکز O محاط کرده‌ایم؛ ضمناً داریم: $|AO|=|OC|$، $|BC|=۵$، $|CD|=۱۲$ و $\widehat{DAB}=\frac{\pi}{۲}$. مساحت چهارضلعی ABCD را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $\sqrt{۵\cos x-\cos ۲x}+۲\sin x=۰$ را حل کنید.

۴. مطلوب است همهٔ مقدارهای x، که، به ازای هر کدام از آن‌ها، عبارت

$$\sqrt{۳x^{۴}-۲-x^{۸}}\cdot \sin[\pi(۲x-۱۳x^{۲})]$$

دارای معنا باشد و برابر صفر نشود.

۵. هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD به رأس D مفروض است؛ که در آن، وجه‌های ABD و ACD مثلث‌هائی قائم‌الزاویه هستند، یال AD برمیانهٔ AK از قاعده عمود است و $|AD|=|AK|$. مقطع هرم با صفحه‌ای که از وسط یال AD و BC نمی‌گذرد، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین EFGH است باقاعده‌های EF و GH. ضمناً، نقطهٔ E یال BD را نصف می‌کند و نقطهٔ G بریال AC

واقع است وداریم: $|AG|=۳|GC|$. مطلوب است محاسبهٔ نسبت‌مساحت ذوزنقهٔ EFGH برمساحت مثلث قاعده ABC.

پاسخ‌ها: ۱. $x=۳$؛ ۲. ۶۰؛ ۳. $۲n\pi-\frac{\pi}{۳}$ $(n\in Z)$؛

۴. $۱<x<\sqrt[۴]{۲}$، $x\neq\frac{۱+\sqrt{۱+۱۳k}}{۲}$ $(۱۲\leqslant k\leqslant ۱۶)$،

$-۱<x<-\sqrt[۴]{۲}$، $x\neq\frac{-۱-\sqrt{۱+۱۳k}}{۲}$ $(۱۶\leqslant k\leqslant ۲۰)$؛

۵. $\frac{۵\sqrt{۵}}{۱۶}$.

گروه دوم.

۱. معادلهٔ $\log_{x+۱}(x^۲-۳x+۱)=۱$ را حل کنید.

۲. در ذوزنقه‌ای که دریك دایره محاط است، قطرها برهم عمود وطول یکی از قاعده‌ها، ۷ برابر قاعدهٔ دیگرآن است. مطلوب است مساحت ایــن ذوزنقه، به‌شرطی‌که محیط آن برابر۱۸ باشد.

۳. معادلهٔ $\sqrt{۲\cos x\cdot\sin ۲x}=\sqrt{۵\sin+۴\sin ۲x}$ را حل کنید.

۴. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که، به‌ازی هر کدام ازآن‌ها، عبارت

$$\sqrt{۴x^۴-۳-x^۸}\cdot[۱-\cos\pi(۲\pi(۵x-۹x^۲))]$$

معنا داشته باشد وبرابرصفرشود.

۵. درهرم ABCDE، قاعـدهٔ ABCD متوازی‌الاضلاع ووجه‌هــای ADE و BCE مثلث‌هایی قائم‌الزاویه‌اند. یال BC برمیانهٔ EP ازوجه CDE عمود است و $|BC|=|EP|$. مقطع هرم با یــك صفحه، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین GKHL است که راس‌های G، K، H و L آن، به‌ترتیب، بر یال‌های AE، BE، CE و DE قراردارند، ضمناً $|GE|=۳|GA|$ و $|EH|=|CH|$. نسبت مساحت ذوزنقهٔ GKHL برمساحت وجه CDE را پیدا کنید.

پاسخ‌ها: ۱. $x=۴$؛ ۲. ۱۶؛

۳. $n\pi$، $۲m\pi+\frac{۲}{۳}\pi$ $(n ، m\in Z)$؛ ۴. $۱<x<\sqrt[۴]{۳}$،

$x\neq\frac{۵+\sqrt{۲۵+۳۶k}}{۱۸}$ $(۵\leqslant k\leqslant ۹)$، $-\sqrt[۴]{۳}<x<-۱$،

$\frac{5\sqrt{10}}{16}$.۵ $\quad$ $(15\leqslant k\leqslant 22)x\neq\frac{5-\sqrt{25+36k}}{18}$؛

دانشکدهٔ ریاضیات محاسبه‌ای وسیبر نتیك

گروه اول

۱. کدام عدد بزرگتر است: $\sqrt{5}$ یا $9^{\left(\log_2\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\frac{8}{9}\right)}$؟

۲. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، تابع

$$y(x)=3\sin^2 x-2\cos x+\cos^2 x-4$$

به‌حداکثرمقدار خود برسد.

۳. نامعادلهٔ $\frac{\sqrt{5-4x}+7x-6}{x}\geqslant 2$ راحل کنید.

۴. در دانشگاهی چند کتاب‌خانه، با تعداد مساوی کتاب در هریك، وجود دارد؛ ضمناً همهٔ کتاب‌ها روی هم ۴۴۵۶۰ عدد است. بعد از مدتی، ۴ کتاب‌خانه به‌دانشگاه اضافه شد؛ بازهم در کتاب‌خانه‌ها، به‌تعداد مساوی، ولی این‌بار بیشتر، کتاب وجود داشت. همهٔ کتاب‌ها روی هم ۷۰۸۸۵ عدد شد. درابتدا، چند کتاب‌خانه در دانشگاه بوده است؟

۵. برای هرمقدار پارامتر a، همهٔ xها را پیدا کنید کهِ در معادلهٔ زیرصدق کنند:

$$a|x+3|+2|x+4|=2$$

وهمهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که برای هر کدام از آن‌ها، این‌معادله دوجواب داشته باشد.

۶. دایرهٔ به‌مرکز O برمثلث ABC محیط شده است. مماس بردایره در نقطهٔ B، خط راست AC را در نقطهٔ K قطع کرده است و، ضمناً داریم: $\widehat{AKB}=4\widehat{BAC}-\widehat{ABC}$. طول ضلع AB، ۲واحد از طول ضلع AC بیشتر، وفاصلهٔ O ازضلع AC، یك واحدبیشتر ازفاصلهٔ نقطهٔ O تاضلع AB است. شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ‌ها: ۱. $9^{\left(\log_3\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{8}{9}\right)\right)}<\sqrt{5}$؛

۲. $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ $(k\in Z)$؛ ۳. $1\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}$ و $x<0$؛ ۴. ۵؛

۵. $a=2$ و $-4\leqslant x\leqslant -3$، $a=-2$ و، $x\geqslant -3$، $|a|>2$ و $x=-3$، $|a|<2$ و $x=-3$ و $x=-\frac{3a+10}{2+a}$، به‌ازای $|a|<2$

معادله دارای دوریشه است؛ ۶. $\sqrt{3}+1$.

گروه دوم

۱. کدام عدد بزرگتر است: $\sqrt[3]{18}$ یا $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{3}\log_{\sqrt{6}}5}$؟

۲. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که به‌ازای هر کدام از آن‌ها، تابع

$$y(x)=3-2\sin^2 2x-2\cos 2x$$

به‌حداقل مقدار خود برسد.

۳. نامعادلهٔ $\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\leqslant 3x+2$ راحل کنید.

۴. دوطرح ساختمانی داریم. درطرح اول، قراراست چند بلوك ساختمانی مسکونی وجودداشته باشد که‌کاملاً شبیه هم‌باشند وروی هم، شامل ۱۲۰۹۶ آپارتمان. درطرح دوم ۸ بلوك ساختمانی بیشتر ازطرح اول درنظر گرفته شده است که بازهم شبیه یکدیگرند، ولی درهر بلوك، بیشترازهر بلوك طرح اول، آپارتمان وجود دارد. تعداد کل آپارتمان‌های طرح دوم، ۲۳۶۲۵ عدد است. درطرح اول، چند بلوك ساختمانی وجود دارد؟

۵. برای هریك ازمقدارهای پارامتر a، همهٔ xهایی را پیدا کنید که درمعادلهٔ زیر صدق کنند:

$$3|x-2|-a|2x+3|=\frac{21}{2}$$

وهمهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام ازآن‌ها، معادله دارای دوجواب باشد.

۶. دایرهٔ به‌مرکز O برمثلث ABC محیط شده است. مماس بردایره درنقطهٔ C،

خط راست AB را در نقطهٔ K قطـع می‌کند و، ضمناً، زاویهٔ AKC برابر است با تفاضل دوزاویهٔ BAC و ACB تفاضل طول ضلع‌های AC وAB برابراست با $\frac{8}{\sqrt{3}}$ وفاصلهٔ نقطهٔ O ازضلع AB، ۲واحد بیشتراست ازفاصلهٔ نقطهٔ O تاضلع AC. شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ‌ها: ۱. $\sqrt[3]{18}>\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{3}\log_{\sqrt{6}}5}$؛

۲. $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ $(k\in Z)$؛ ۳. $\frac{5}{2}\geqslant x\geqslant-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $-\frac{2}{3}\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{5}}$؛

۴. ۲۷؛ ۵. $a=-\frac{3}{2}$ و $x\leqslant-\frac{3}{2}$، $a=-\frac{3}{2}$ و $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$،

$|a|>\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{3}{2}$، $|a|<\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{3}{2}$ و $x=\frac{6a+32}{6-4a}$، به‌ازای $|a|<\frac{3}{2}$ دو جواب داریم؛ ۶. $2\sqrt{\frac{7}{3}}$.

دانشکدهٔ فیزیک

گروه اول

۱. معادلهٔ $\cos x+\sqrt{17}\cos\frac{x}{2}=0$ را حل کنید.

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر m را پیدا کنید که، به‌ازای هرکدام ازآن‌ها، جواب معادلهٔ زیرازه بزرگتر باشد.

$$5x-18m=21-5mx-m$$

۳. می‌دانیم: $\log_n m=\sqrt{13}$، مطلوب‌است محاسبهٔ $\log_{\frac{m}{n}}\sqrt[3]{m^2n}$.

۴. نامعادلهٔ $2^{x+3}-5^x<7\times 2^{x-2}-3\times 5^{x-1}$ را حل کنید.

۵. درهرم منتظم ومثلث‌القاعدهٔ SPQR به راس S، ازنقطهٔ A واقع بریالSP صفحه‌ای گذرانده‌ایم که سهم‌های دووجه SPR و SPQ را در نقطه‌های B وCقطع کرده‌است. می‌دانیم که خطهای‌راست AB وAC،زاویه‌ای‌به‌اندازهٔ

γ باصفحهٔ قاعدهٔ هرم ساخته‌اند، و اندازهٔ زاویه‌های ABS و ACS برابر است با β $\left(\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ دووجهی بین صفحهٔ مقطع و صفحهٔ قاعدهٔ هرم.

۶. خط راستی که از مرکزهای دو دایرهٔ محاطی و محیطی مثلث گذشته است، بر یکی از نیمسازهای مثلث عمود است. می‌دانیم که، نسبت فاصله بین دو مرکز دایره‌های محاطی و محیطی برشعاع دایرهٔ محاطی، برابراست با k. زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

پاسخ‌ها: ۱. $x=۴k\pi\pm ۲\arccos\frac{-\sqrt{۱۷}+۵}{۴}$ $(k\in Z)$؛

۲. $m>-۱$، $m<-۳$؛ ۳. $\frac{۲\sqrt{۱۳}+۱}{۳\sqrt{۱۳}-۱}$؛

۴. $x>۳$؛ ۵. $\arcsin\frac{\cos\gamma}{۱-\left[\frac{۱}{۲}(\sin\beta+\sqrt{۳}\cdot\sqrt{\cos^۲\beta-\sin^۲\gamma})\right]^۲}$.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $۸\sin ۴x-\sqrt{۸}\cos ۸x=۰$ را حل کنید.

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هریک ازآن‌ها، جواب معادلهٔ زیر از ۲ کمتر باشد:

$$۱۵x-۷a=۲+۶a-۳ax$$

۳. می‌دانیم $\log_a b=\sqrt{۷}$، مطلوب است محاسبهٔ $\log_{a\sqrt{b}}\left(\frac{a}{\sqrt{b^۳}}\right)$:

۴. نامعادلهٔ $۳^{x+۲}+۷^x<۴\times ۷^{x-۱}+۳۴\times ۳^{x-۱}$ را حل کنید.

۵. درهرم منتظم PQRST به راس P، از نقطه K واقع بریال PQ خط‌های راستی گذرانده‌ایم که سهم‌های زوجه PQT و PQR را در نقطه‌های L و M قطع کرده‌اند و با صفحهٔ قاعدهٔ هرم، زاویه‌ای برابر γ ساخته‌اند. می‌دانیم، اندازهٔ زاویه‌های KLP و KMP برابراست با β $\left(\beta<\frac{\pi}{2}\right)$، مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ LKM.

۶. در مثلث PQR، نقطهٔ A مرکز دایرهٔ محاطی و نقطهٔ B مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. خط راست AB، بر نیمساز QA از مثلث PQR عمود است. می‌دانیم که اندازهٔ زاویهٔ ABQ برابر است با β. اندازه زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

پاسخ‌ها: ۱. $\frac{1}{4}n\pi + (-1)^n \frac{\arcsin(2-\sqrt{2})}{4}$ $(n\in Z)$؛

۲. $-5<a<4$ ۳. $\frac{2-3\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}$؛ ۴. $x<2$؛

۵. $\left[(\sin\beta-\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\gamma})\right]2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$؛

۶. $\hat{Q}=2\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)$ ، $\hat{R}=\arcsin\left[\frac{\sin\alpha}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3+\cos^2\alpha})\right]$،

$\hat{P}=\pi-\hat{Q}-\hat{R}$.

دانشکدهٔ شیمی

گروه اول

۱. معادلهٔ $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{2}$ را حل کنید.

۲. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x-3}{x+3}\geqslant-\frac{1}{2}$ را حل کنید

۳. نامعادلهٔ $f(g(x))<g(f(x))$ را حل کنید، به‌شرطی که

$$f(x)=2x+2 \text{ ، } g(x)=2^x+10$$

۴. وجه جانبی یك هرم منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی روی صفحهٔ افقی π قراردارد. مساحت قاعدهٔ هرم برابر S_1 و مساحت سطح جانبی آن برابر S_2 است. بالاترین نقطهٔ هرم، به‌چه فاصله‌ای از صفحهٔ π قراردارد؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر c را پیدا کنید که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ

$$[(x-c-1)^2-2](x-c-1)^2=c^2-1$$

دارای ریشه‌های مثبتی بیش از ریشه‌های منفی آن باشد.

۶. نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}}<(\sqrt{2}-1)^{-x}$$

پاسخ‌ها: ۱. $(n\in Z)\; n\pi+\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{8}$؛ ۲. $x\leqslant -9،\; x>3$؛ ۳. $x<1$؛ ۴. $\sqrt{\frac{2S_1}{3}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$؛ ۵. $C\geqslant 0$؛ ۶. $-1<x\leqslant 2،\; x\geqslant 3$.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x=1$ را حل کنید.

۲. نامعادلهٔ $\log_2\frac{7x+1}{x+2}\leqslant 3$ را حل کنید.

۳. مطلوب است حل نامعادله $f(f(x))<g(g(x))$، به شرطی که

$$f(x)=2^x,\; g(x)=4^x$$

۴. قاعده یك هرم را، یك لوزی به مساحت S_1 تشکیل می‌دهد. زاویهٔ حادهٔ لوزی برابراست با $\frac{\pi}{3}$. تصویر راس هرم، برمرکزلوزی منطبق می‌شود. هرم را روی وجه‌جانبی آن، روی صفحهٔ افقی π خوابانده‌ایم. بالاترین نقطهٔ هرم نسبت به صفحهٔ π، به‌چه فاصله‌ای از آن قراردارد، به‌شرطی که مساحت سطح جانبی هرم برابر S_2 باشد؟

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر c را پیدا کنید که، به ازای هرکدام از آن‌ها، تعداد ریشه‌های منفی معادلهٔ

$$(x+2c)^2[(x+2c)^2-c-c^4]=-c^5$$

بیش‌ازتعداد ریشه‌های مثبت آن باشد.

۶. این نامعادله را حل کنید.

$$(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geqslant(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

پاسخ‌ها: ۱. $(n\in Z)\, n\pi-\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}$؛ ۲. $x\leqslant -15،\; x>-\frac{1}{7}$؛ ۳. $x<-1$؛ ۴. $\sqrt{\frac{S_1\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$؛ ۵. $c>0$؛

۶. $x \geqslant 1$ ، $-2 \leqslant x < -1$.

دانشکدهٔ زیست‌شناسی

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2-2}-x+1) \leqslant 0$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $1+2|\cos x|.\sin x = 0$ را حل کنید.

۳. درهرم منتظم مربع‌القاعده SABCD، هرم منتظم مربع‌القاعده OLMNP را محاط کرده‌ایم. چهاررأس‌قاعدهٔ هرم‌محاطی روی سهم‌های وجه‌های جانبی هرم SABCD واقع‌اند. نقطهٔO، رأس هرم‌محاطی، درمرکز قاعدهٔABCD ازهرمSABCD قراردارد. می‌دانیم $|OL|=|LM|$، یعنی طول‌یال‌جانبی هرم‌محاطی، برابراست با طول‌ضلع‌قاعدهٔ‌آن. به‌جزاین، $|SA|=|AB|=a$، یعنی هریال هرم SABCD، طولی برابر a دارد. حجم هرم محاطی‌را پیدا کنید.

۴. معادلهٔ همهٔ‌مماس‌های برنمودارتابع $y(x)=\sqrt{1-2x^2}$ را پیدا کنید، به‌نحوی‌که، هرکدام ازآن‌ها، همراه بامحورهای مختصات، مثلثی به‌مساحت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را محصور کنند.

۵. حداکثروحداقل مقدارتابع زیررا، دربازهٔ $\left[-4 \ , \ -\frac{5}{4}\right]$، پیدا کنید:

$$y(x)=x+\sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$$

۶. نقطه‌های P، Q را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|BP|:|PQ|:|QC|=\frac{2}{3}:1:1$$

آن‌وقت، نقطهٔ R را روی امتدادضلع AB ازاین‌مثلث‌طوری اختیارکرده‌ایم که داشته باشیم:

$$B\in[AR] \ , \ |AB|:|BR|=1:2$$

مطلوب است نسبت مساحت چهـار ضلعی PQST برمساحت مثلث ABC، به شرطی که S و T، نقطه‌های برخورد خط‌های راست AQ و AP با خط راست CR باشند.

پاسخ‌ها: ۱. $x \leqslant -\sqrt{۲}$؛

۲. $۲\pi n-\frac{\pi}{۴}$ $(n\in Z)$، $۲m\pi+\frac{۵\pi}{۴}$ $(m\in Z)$؛

۳. $V=\frac{a^{۳}}{۳\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)^{۳}}$؛ ۴. $y=-\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}$ ، $y=-\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}$؛

۵. $y_{max}=-\frac{۳}{۴}$ ، $y_{min}=-۳$؛ ۶. $\frac{۵}{۸}$.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $log_{۲}(۲-x-\sqrt{x^{۲}-۱})\geqslant ۱$ را حل کنید.

۲. معادلهٔ $sin^{۲}۲x+cos^{۲}x=۱$ را حل کنید.

۳. درهرم منتظم ومربع‌القاعدهٔ SABCD، مکعبی‌را محاط کرده‌ایم. چهاررأس یکی از وجه‌های مکعب برقاعدهٔ ABCD ازهرم وچهاررأس وجه مقابل آن، برسهم‌های جانبی هرم قراردارند. می‌دانیم $|SA|=|AB|=a$ یعنی طول یال‌های جانبی هرم بایکدیگر وبا طول‌ضلع قاعدهٔ هرم برابرند. حجم‌مکعب را پیدا کنید.

۴. معادلهٔ همهٔ مماس‌های برنمودارتابع $y(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x}$ را پیدا کنید که، هر کدام ازآن‌ها، بامحورهای مختصات، مثلثی به‌مساحت ۲ را محصور کنند.

۵. حداکثر وحداقل مقدارتابع

$$y(x)=-۲x+\sqrt{(x^{۲}-۱۰x+۲۵)(x^{۲}-۴x+۴)}$$

را در بازهٔ $\left[\frac{۹}{۴}, ۶\right]$ پیدا کنید.

۶. نقطه‌های PوQ را روی ضلع BC ازمثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که‌داشته باشیم:

$$|BP|:|PC|=۱:۲ \quad و \quad |BQ|:|QC|=۴:۱$$

نقطهٔ R روی امتداد ضلع AC ونقطهٔ L دروسط همین ضلع است. ضمناً

$$C\in[AR] \ ، \ |AC|:|CR|=۲:۱$$

نسبت مساحت چهارضلعی PQST به‌مساحت مثلث ABC را پیدا کنید، به شرطی‌که S و T نقطه‌های برخورد خط راست BR با خطهای راست LQ و AP باشند.

پاسخ‌ها: ۱. $x \leqslant -1$؛ ۲. $n\pi$، $m\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $(n، m \in Z)$؛

۳. $V = \frac{a^3}{16\sqrt{2}}$؛ ۴. $y = \frac{x}{2} + \sqrt{2}$، $y = \frac{x}{2} - \sqrt{2}$؛

۵. $y_{max} = -\frac{15}{4}$، $y_{min} = -10$؛ ۶. $\frac{9}{40}$.

دانشکدهٔ ارتباطها

گروه اول

۱. اتومبیل سواری و اتومبیل باری، در جادهٔ شوسه، با سرعت‌هایی ثابت، به طرف‌هم حرکت می‌کنند. $\frac{1}{2}$ ساعت قبل‌از آن‌که به‌هم برسند، روی جاده شوسه، به‌فاصلهٔ ۷۵ کیلومتر ازیکدیگر قرار داشتند. سرعت اتومبیل سواری‌را پیدا کنید، به‌شرطی‌که بدانیم، اتومبیل سواری برای پیمودن ۹۰ کیلومتر به ۲۰ دقیقه بیشتر از اتومبیل‌باری برای پیمودن ۴۰ کیلومتر احتیاج دارد.

۲. معادلهٔ $\sqrt{1 - 4\sin x} = \sqrt{1 - 4\cos 2x}$ را حل کنید.

۳. حداقل تابع زیررا دربازهٔ $[-3، 2]$ پیدا کنید:

$$y(x) = -|2x^3 + 15x^2 + 36x - 30|$$

۴. دایرهٔ به‌شعاع ۴ درذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی‌که طول قاعدهٔ کوچکترآن برابر ۴ است، محاط شده است. مطلوب است فاصلهٔ بین دونقطهٔ تماس دایره با ساق‌های ذوزنقه.

۵. طول ارتفاع SO ازهرم منتظم SABCD برابراست با ۴ وطول‌ضلع‌قاعدهٔ آن، ABCD، برابر است با ۶، M و N را وسط پاره‌خطهای BC و CD می‌گیریم. مطلوب است محاسبهٔ شعاع کره‌ای‌که درهرم SMNC محاط شده است (یعنی، برهمهٔ وجه‌های جانبی وقاعدهٔ آن مماس است).

۶. نامعادلهٔ $x^4 - 5x^2 + 6 \geqslant 0$ را حل کنید.

پاسخ‌ها: ۱. ۹۰ کیلومتردرساعت؛ ۲. $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$؛

۳. -118؛ ۴. $6\frac{2}{5}$؛ ۵. $\frac{12}{13+\sqrt{41}}$؛

۶. $x \leqslant -\sqrt{3}$، $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$، $x \geqslant \sqrt{3}$.

گروه دوم

۱. دوحشره، که در دوانتهای تخته‌ای به‌طول ۱۳متر واقع‌اند، در یک لحظه، به‌طرف هم حرکت می‌کنند. آن‌ها با سرعت ثابت حرکت می‌کردند و یک ساعت بعد از آغاز حرکت به‌هم رسیدند. سرعت حشرهٔ اول را پیدا کنید، به‌شرطی‌که بدانیم، حشرهٔ اول، برای پیمودن یک فاصلهٔ ۱۰متری به‌یک‌ساعت بیشتر از زمانی احتیاج دارد که حشرهٔ دوم بخواهد فاصله‌ای برابر ۸متر را طی کند.

۲. معادلهٔ $\sqrt{1+4\cos 2x}=\sqrt{1-4\cos x}$ را حل کنید.

۳. حداکثرمقدارتابع

$$y(x)=|2x^3-3x^2-12x+1|$$

را دربازهٔ $[-3, 3]$ پیدا کنید.

۴. طول ضلع لوزی ABCD برابراست با ۵. در این لوزی دایره‌ای به‌شعاع $2\frac{2}{5}$ محاط کرده‌ایم. مطلوب است. فاصلهٔ نقطه‌های تماس دایره با ضلع‌های AB و BC، به‌شرطی‌که طول قطرAC کوچکترازطول قطرBD باشد.

۵. یال SA ازهرم SABC، برصفحهٔ قاعدهٔ ABC عمود است. طول یال SA برابراست با ۱. زاویهٔ راس A ازمثلث ABC قائمه وطول هریک از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه AB و AC برابراست با ۲. وسط پاره‌خط‌های AC و BC را، به‌ترتیب، M و N می‌گیریم. مطلوب است‌محاسبهٔ شعاع کرهٔ محاط درهرم SMNC (یعنی کره‌ای که برهمهٔ وجه‌های جانبی و قاعدهٔ آن مماس باشد).

۶. نامعادلهٔ $x^4-10x^2+16 \geqslant 0$ را حل کنید.

پاسخ‌ها: ۱. ۵متر؛ ۲. $2k\pi+\pi$ $(k\in Z)$؛ ۳. ۴۴؛

۴. $3\frac{21}{25}$؛ ۵. $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$؛

۶. $x \leqslant -2\sqrt{2}$، $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$، $x \geqslant \sqrt{2}$.

دانشکدهٔ جغرافیا

گروه اول

۱. معادلهٔ $x+\sqrt{۲x^۲-۱۴x+۱۳}=۵$ راحل کنید.

۲. مطلوب است همهٔ مقدارهای x که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، مشتق تابع‌زیر برابر ۱۲ باشد:

$$y(x)=۵-۸\cos\left(۳x+\frac{\pi}{۱۱}\right)$$

۳. مساحت مثلث ABC برابراست با $۲\sqrt{۳}$ سانتی‌مترمربع؛ طول ضلع BC برابر ۱ سانتی‌متر واندازهٔ زاویهٔ BCA برابر $\frac{\pi}{۶}$ است. نقطهٔ D ازضلع AB به‌فاصلهٔ ۳سانتی‌متراز B قراردارد ونقطهٔ M محل برخورد CD با میانهٔ BE است. نسبت طول پاره‌خط BM برطول پاره‌خط ME را پیدا کنید.

۴. همهٔ زوج عددهای حقیقی (x ، y) را پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، با شرط‌های زیرسازگار باشند:

$$\begin{cases}\log_{۷-x}(۴-y)<۰\\ \log_{y-۱}(۳-x)<۰\end{cases}$$

۵. یال مکعب $ABCDA'B'C'D'$ به‌طول ۵ سانتی‌متراست. نقطهٔ M رادروی یال AD به‌فاصله ۲ سانتی‌متر از راس A انتخاب کرده‌ایم. نقطهٔ L رادروی یال BC طوری اختیار کرده‌ایم که تانژانت زاویهٔ BLM برابر ۴ باشد. نقطهٔ N، پاره‌خط $B'D'$ را، با محاسبهٔ ازنقطهٔ B'، به‌نسبت ۹ به ۱۶ تقسیم کرده است. مطلوب است مساحت مقطع مکعب با صفحه‌ای که از نقطه‌های M، L و N گذشته است.

۶. معادله $\sin x\sin ۳x+\cos ۴x=۰$ را حل کنید.

پاسخ‌ها: ۱. ۲ — ؛ ۲. $(-۱)^k\cdot\frac{\pi}{۱۸}+\frac{\pi}{۳۳}-\frac{۱}{۳}k\pi$ $(k\in Z)$؛

۳. $\frac{۳}{۵}$؛ ۴. $۳<x<۲$ ، $۴<y<۳$؛ ۵. $\frac{۱۰۵}{۴}$سانتی متر مربع؛

۶. $\frac{\pi}{۶}+\frac{۱}{۳}k\pi$ $(k\in Z)$.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $\sqrt{2x^2+8x+1}-x=3$ را حل کنید.

۲. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها، مشتق تابع

$$y(x)=1+4\sin(5x+\frac{\pi}{5})$$

برابر $10\sqrt{3}$ شود.

۳. در مثلث ABC، پای ارتفاع CD، برضلع AB قراردارد، طول میانهٔ AE برابر ۵ سانتی‌متروطول ارتفاع CD برابر ۶ سانتی‌متر است. مطلوب است مساحت مثلث ABC، به‌شرطی که بدانیم، مساحت مثلث ADC سه‌برابر مساحت مثلث BCD است.

۴. همهٔ زوج عددهای حقیقی (x ، y) را طوری پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، درشرط‌های زیر صدق کنند.

$$\begin{cases}\log_{x-2}(2y-4)>0\\ \log_{3-y}(x-4)>0\end{cases}$$

۵. درمکعب مستطیل $ABCDA'B'C'D'$، طول یال AA' برابر ۸ سانتی‌متر، طول یال AB برابر ۱۰ سانتی‌متر و طول یال AD برابر۱۲سانتی‌متراست. نقطهٔ K مرکز وجه $AA'B'B$ است، نقطهٔ L روی یال BB' و به‌فاصلهٔ ۳ سانتی‌متری راس B قرار دارد، نقطهٔ M پاره‌خط DC' را به‌نسبت ۷ بر۳، با محاسبهٔ از نقطهٔ D ، تقسیم کرده است. مطلوب است مساحت مقطع مکعب مستطیل باصفحه‌ای که از نقطه‌های L،K و M می گذرد.

۶. معادلهٔ $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ را حل کنید.

پاسخ‌ها: ۱. ۲؛ ۲. $\frac{2}{5}k\pi-\frac{\pi}{25}\pm\frac{\pi}{30}$ $(k\in Z)$؛

۳. $\frac{56}{7}$ سانتی‌مترمربع؛ ۴. $4<x<5$ ، $\frac{5}{2}<y<3$؛

۵. ۱۲۴ سانتی‌متر مربع؛ ۶. $\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$ ، $2m\pi+\frac{2\pi}{3}$ $(k ، m\in Z)$.

دانشکدهٔ زمین‌شناسی

(بخش ژئوفیزیک)

گروه اول

۱. کدام بزرگترند: $\sqrt[7]{2+3tg\frac{\pi}{4}}$ یا $\sqrt[5]{-2\cos\pi}$؟

۲. نامعادله $\frac{2x-5}{|x-1|}\leqslant 1$ را حل کنید.

۳. معادلهٔ $2\times 4^{\frac{1}{x}}=3\times 10^{\frac{1}{x}}+5\times 25^{\frac{1}{x}}$ را حل کنید.

۴. معادلهٔ $\frac{\sin 4x}{\sin 6x}=1$ را حل کنید.

۵. درصفحهٔ محورهای مختصات، همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که مختصات آن‌ها با شرط

$$2y+\left|y-\frac{3}{x}\right|=4-\left|\frac{3}{x}-1\right|$$

سازگار باشند؛ ودربین آن‌ها، همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که، درهر کدام از آن‌ها، مختص y، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۶. طول قاعدهٔ کوچکتر یك ذوزنقه متساوی‌الساقین، دوبرابر مجموع طول‌های ساق‌های آن است. حداکثرمقدارممکن عدد درست m را پیدا کنید، به‌نحوی که مساحت کل شکلی که از دوران ذوزنقه دور قاعدهٔ کوچکتر آن به‌دست می‌آید، m برابرمساحت ذوزنقه باشد.

پاسخ‌ها: ۱. $\sqrt[7]{2+3tg\frac{\pi}{4}}>\sqrt[5]{-2\cos\pi}$؛ ۲. $x\leqslant 4$ و $x\neq 1$؛

۳. -1؛ ۴. $\frac{\pi}{10}+\frac{1}{5}k\pi$، $k\neq 5m+2$ $(k ، m\in Z)$؛

۵. $\frac{9}{5}\leqslant x\leqslant 3$، $y_{max}\frac{5}{3}$؛ ۶. $m=8$.

دانشکدهٔ زمین‌شناسی
(بخش زمین‌شناسی عمومی)

گروه اول

۱. معادلهٔ $sin\left(\frac{۴}{۳}\pi sin x\right)=\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

۲. کدام بزرگترند: $\sqrt{cotg\frac{\pi}{۴}-۲\,sin\frac{۳\pi}{۲}}$ یا $\sqrt[۳]{۵}$؟

۳. معادلهٔ $\sqrt{x+۳}-\sqrt{۲x-۱}=\sqrt{۳x-۲}$ را حل کنید.

۴. این نامعادله را حل کنید:

$$log_{۳}\left[(x+۲)(x+۴)\right]+log_{\frac{۱}{۳}}(x+۲)<\frac{۱}{۲}log_{\sqrt{۳}}۷$$

۵. دایره محاطی مثلث ABC، برضلع‌های AB، BC و AC، به ترتیب، در نقطه‌های M، D، N مماس است. مطلوب است طول پاره‌خط MD، به‌شرطی که طول پاره‌خط NA برابر ۲، طول پاره‌خط NC برابر ۳ واندازهٔ زاویهٔ BCA برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases}۸cos x\cdot cos y\cdot cos(x-y)+۱=۰\\ x+y=z\end{cases}$$

پاسخ‌ها: ۱. $n\pi+(-۱)^{n}\cdot arcsin\frac{۱}{۸}$، $l\pi+(-۱)^{l}\cdot arcsin\frac{۵}{۸}$؛ $m\pi+(-۱)^{m}\cdot arcsin\frac{۷}{۸}$ $(n, l, m\in Z)$؛

۲. $\sqrt{cotg\frac{\pi}{۴}-۲\,sin\frac{۳\pi}{۲}}>\sqrt[۳]{۵}$؛ ۳. ۱؛ ۴. $-۲<x<۳$؛ ۵. $\sqrt{\frac{۳}{۷}}$؛

۶. $x_{۱}=(k+n)\pi+\frac{\pi}{۳}$، $y_{۱}=(k-n)\pi-\frac{\pi}{۳}$؛ $z_{۱}=۲k\pi\ (k,n\in Z)$

و $x_{۲}=(k+n)\pi-\frac{\pi}{۳}$، $y_{۲}=(k-n)\pi+\frac{\pi}{۳}$، $z_{۲}=۲k\pi\ (k,n\in Z)$

و $x_3=(k+n)\pi+\frac{2\pi}{3}$، $y_3=(k-n)\pi+\frac{\pi}{3}$ ، $z_3=2k\pi+\pi$

$(k, n\in Z)$ و $x_4=(k+n)\pi+\frac{\pi}{3}$، $y_4=(k-n)\pi+\frac{2\pi}{3}$ ،

$z_4=2k\pi+\pi$ $(k, n\in Z)$.

گروه دوم

۱. معادلهٔ $sin\left(\frac{11}{8}\pi cos x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ را حل کنید.

۲. کدام بزرگترند: $\sqrt{2 sin\frac{\pi}{2}-3tg\frac{3\pi}{4}}$ یا $\sqrt[3]{11}$.

۳. معادلهٔ $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$ را حل کنید.

۴. این نامعادله را حل کنید:

$$log_{\frac{1}{2}}[(x+1)(x+3)]+log_2(x+3)>-2log_4 11$$

۵. دایره‌ای در مثلث KLM محاط کرده‌ایم که برضلع KM در نقطهٔ A مماس است. طول پاره‌خط AL را پیدا کنید، به‌شرطی که طول پاره‌خط AK برابر ۱۰، طول پاره‌خط AM برابر ۴ و اندازهٔ زاویهٔ KLM برابر ۶۰ درجه باشد.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases}[2sin x cos y+(\sqrt{3}-1)cos z] \;,\; sin(x+y)+\frac{3}{4}=0 \\ z=x-y\end{cases}$$

پاسخ‌ها: ۱. $2n\pi\pm arccos\frac{2}{11}$ ، $2l\pi\pm arccos\frac{6}{11}$ ، $2m\pi\pm arccos\left(-\frac{10}{11}\right)$ $(n, l, m\in Z)$؛

۲. $\sqrt{2 sin\frac{\pi}{2}-3tg\frac{3\pi}{4}}>\sqrt[3]{11}$؛ ۳. ۳؛ ۴. $-1<x<10$؛

۵. $2\sqrt{\frac{183}{7}}$ ؛ ۶. $x_1=(k+n)\pi+\frac{\pi}{12}$، $y_1=(n-k)\pi-\frac{5\pi}{12}$،

$z_1=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k, n\in Z)$ و $x_2=(k+n)\pi-\frac{\pi}{12}$ ،

$y_2=(n-k)\pi-\frac{7\pi}{12}$، $z_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n, k\in Z)$ و

$x_3=(k+n)\pi-\frac{\pi}{12}$ ، $y_3=(n-k)\pi+\frac{5\pi}{12}$ ، $z_3=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$(k, n\in Z)$ و $x_4=(k+n)\pi+\frac{\pi}{12}$ ، $y_4=(n-k)\pi+\frac{7\pi}{12}$ ،

$(k,n\in Z)$.

دانشکدهٔ اقتصاد

(بخش اقتصاد سیاسی)

گروه اول

۱. کدام بزرگترند : $\sqrt{2\,tg\frac{\pi}{4}-3\cos\pi}$ یا $\sqrt[3]{7}$

۲. معادلهٔ $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$ را حل کنید.

۳. این نامعادله را حل کنید:

$$2\log_{25}[(1+x)(3-x)]-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x)>\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}$$

۴. معادلهٔ $\sin\left(\frac{13}{9}\pi\sin x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید

۵. دایره‌ای درمثلث ABC محاط شده است که برضلع AB درنقطهٔ D و بر ضلع AC در نقطهٔ E مماس است. مطلوب است مساحت مثلث ADE، به شرطی که طول پاره‌خط AD برابر ۶، طول پاره خط EC برابر ۲ واندازهٔ

زاویهٔ BCA برابر ۶۰ درجه باشد.

۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y\cdot\sin(x+y)+\frac{۱}{۸}=۰ \\ x=y+z \end{cases}$$

پاسخ‌ها: ۱. $\sqrt[۳]{۲}<\sqrt[۷]{۲\,tg\frac{\pi}{۴}-۳\cos\pi}$؛ ۲. ۲؛

۳. $-۱<x<۱$؛

۴. $n\pi+(-۱)^n\cdot\arcsin\frac{۱۲}{۱۳}$، $l\pi+(-۱)^l\cdot\arcsin\frac{۳}{۱۳}$،

$m\pi=(-۱)^{m+۱}\cdot\arcsin\frac{۶}{۱۳}$ $(n،l،m\in Z)$؛

۵. $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۷}$؛ ۶. $x_۱=(n+k)\pi+\frac{\pi}{۶}$، $y_۱=(n-k)\pi-\frac{\pi}{۳}$،

$z_۱=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(n،k\in Z)$، $x_۲=(n+k)\pi-\frac{\pi}{۶}$،

$y_۲=(n-k)\pi-\frac{۲\pi}{۳}$، $z_۲=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

$(n،k\in Z)$، $x_۳=(n+k)\pi-\frac{\pi}{۶}$، $y_۳=(n-k)\pi+\frac{\pi}{۳}$،

$z_۳=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ $(n،k\in Z)$، $x_۴=(n+k)\pi+\frac{\pi}{۶}$،

$y_۴=(n-k)\pi+\frac{۲\pi}{۳}$، $z_۴=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ $(n،k\in Z)$.

دانشکدهٔ اقتصاد

(بخش برنامه‌ریزی و سیبرنتیك اقتصادی)

گروه اول

۱. کدام بزرگترند: $\sqrt{۳-۲\,tg\frac{۳\pi}{۴}}$ یا $\sqrt[۳]{۸+۳\sin\frac{\pi}{۲}}$؟

۲. نامعادلهٔ $\frac{3x-4}{|x-3|} \geqslant 2$ راحل کنید.

۳. معادلهٔ $4^{x+4}-3^{x+\frac{9}{2}}=3^{x+\frac{7}{2}}-2^{2x+5}$ را حل کنید.

۴. معادلهٔ $\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=-1$ را حل کنید.

۵. روی‌صفحهٔ محورهای مختصات، مجموعهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنیدکه مختصات آن‌ها، با شرط

$$y=2\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{2}{x}-|y+4|$$

سازگار باشند. دراین مجموعه، همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنیدکه، در هرکدام از آن‌ها، مقدار y حداقل مقدارممکن باشد.

۶. درمثلث ABC، طول‌ضلع BC دوبرابرطول‌ضلع AB است. حداکثرمقدار عدد درست l را پیداکنید، به نحوی‌که مساحت شکل حاصل از دوران‌مثلث ABC دورضلع AC، l برابرمساحت ABC باشد، زاویه‌های مثلث ABC را حاده بگیرید.

پاسخ‌ها: ۱. $\sqrt{3-2\,tg\frac{3\pi}{4}}>\sqrt[3]{8+3\sin\frac{\pi}{2}}$

۲. $x \geqslant 2$، $x\neq 3$؛ ۳. $-1/5$؛

۴. $x=\frac{2}{5}n\pi+\frac{3\pi}{10}$، $n\neq 5l+3$ $(l،n\in Z)$؛

۵. $-1<x<0$، $y_{min}=-3$؛ ۶. $l=10$.

دانشکدهٔ روان شناسی

گروه اول

۱. نامعادلهٔ $\frac{x+4}{x-1}>\frac{12}{x}$ را حل کنید.

۲. دومماس یکـی درنقطهٔ به‌طول $x=\frac{\pi}{18}$ و دیگری درنقطهٔ به‌طول $x=\frac{5\pi}{18}$ برنمودار تابع $y(x)=\sin 3x$ رسم کرده‌ایم. مختصات نقطهٔ برخورد این دو مماس را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $\sqrt[4]{8\cos x}-1=(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\sqrt{\cos x}$ را حل کنید.

۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD، که در آن، $\widehat{BAD}=60^\circ$، $|AB|=2^{cm}$ و $|AD|=5^{cm}$ است، نیمساز زاویهٔ BAD، نیمساز زاویـهٔ ABC را در نقطهٔ K و نیمساز زاویـهٔ CDA را در نقطـهٔ L قطع مـی کند. همچنین، نیمساز زاویهٔ BCD نیمساز زاویهٔ CDA را در نقطهٔ M و نیمساز زاویهٔ ABC را در نقطهٔ N قطع‌می‌کند. مطلوب است نسبت مساحت چهار ضلعی KLMN برمساحت متوازی‌الاضلاع ABCD.

۵. پیاده‌ای از A به طرف B حرکت‌کرد، درهمان زمان، موتورسواری از B به‌طرف A حرکت کرد. وقتی که‌موتورسوار به پیاده رسید، بلافاصله بر گشت وپیاده را به B رسانید و، سپس، بدون توقف دوباره به‌طرف A حرکت‌کرد و بدون مانع به‌آن جا رسید. موتورسوار، که مقداری از وقت خود را برای رساندن پیاده به B صرف‌کرده است، چند برابر زمانی که مستقیماً از B به A برود، در راه بـوده است؛ بـه‌شرطی که بدانیم، پیاده ، در یك چهارم زمانی‌کـه می‌بایست با پای پیاده فـاصله A تا B را بپیماید، بـه B رسیده است.

۶. این معادله را حل‌کنید :

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2+2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2+2x-3)$$

۷. این دستگاه معادله‌ها را کنید :

$$\begin{cases} x+2y=y^2-x^2+3 \\ 2^{3x+y}=512 \end{cases}$$

پاسخ‌ها: ۱. $0<x<1$، $2<x<6$؛

۲. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\right)$؛ ۳. $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$؛ ۴. $\frac{9}{20}$؛ ۵. $2\frac{3}{2}$؛

۶. $-1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$، $-1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}$؛ ۷. $(2,3)$، $\left(\frac{33}{8}, -\frac{27}{8}\right)$.

گروه دوم

۱. نامعادلهٔ $-\frac{3}{x(x-4)} < 1$ را حل کنید.

۲. مختصات نقطهٔ برخورد دو مماس بر نمودار تابع $y(x)=\frac{x^2+1}{x-3}$ را در نقطه‌های به‌طول‌های $x=4$ و $x=-2$ پیدا کنید.

۳. معادلهٔ $\sqrt[4]{3}\,tg\,x-1=(\sqrt[4]{3}-1)\sqrt{tg\,x}$ را حل کنید.

۴. در ذوزنقهٔ ABCD: $\widehat{BAD}=45^\circ$، $\widehat{CDA}=60^\circ$، قاعدهٔ $|AD|=15^{cm}$ وقاعدهٔ $|BC|=13^{cm}$. ازنقطه M، وسط ضلع AB، عمودی برAB و از نقطهٔ N، وسط ضلع CD، عمودی بر CD اخراج کرده‌ایم، ایـن دوعمود یکدیگر را درنقطه L قطع کرده‌اند. نسبت مساحت مثلث MNL برمساحت ذوزنقهٔ ABCD را پیدا کنید.

۵. شاگردی به استاد خود درساختن قسمتی ازیك قطعه کمك کرد. بقیهٔ کار را استاد به‌تنهایی تمام‌کرد. اگراستاد می‌خواست تمام قطعه را به تنهایی آماده کند، چند برابر وقتی که برای‌کارمشترك با شاگردش صرف‌کرده است، نیاز داشت. درصورتی‌که بدانیم، اگرشاگرد می‌خواست به‌تنهایی کار را انجام دهد، به‌سه برابر زمانی که به‌استادش کمك‌کرد، احتیاج داشت.

۶. این معادله را حل کنید :

$$\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2+4x-2)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2+4x-3)$$

۷. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید :

$$\begin{cases} 3x+y=y^2-x^2+26 \\ 2^{x-2y}=64 \end{cases}$$

پاسخ‌ها: ۱. $0<x<1$، $3<x<4$؛ ۲. $(3/5, 5/5)$؛ ۳. $k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$؛ ۴. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$؛ ۵. $\frac{3}{2}$؛

۶. $-۲+\sqrt{۱۴+۴\sqrt{۳}}$، $-۲-\sqrt{۱۴+\sqrt{۳}}$، ۷. $\left(-\frac{۳۸}{۳},-\frac{۲۸}{۳}\right)$

دانشکدهٔ زبان‌شناسی

گروه اول

۱. معادلهٔ $۲+\cos ۲x=-۵\sin x$ را حل کنید.

۲. مطلوب است محاسبهٔ همهٔ مقدارهای x، به‌نحوی که هر کدام ازآن در هر دوشرط زیرصدق کنند:

$$\log_{\frac{۱}{۳}}\sqrt{x+۶}\leqslant\log_{\frac{۱}{۳}}(x+۴)$$ و $x+\frac{۱}{۲}=$ عددی درست

۳. دومماس برنمودارتابع $y(x)=۶x+x^۲$ رسم کرده‌ایم. اولی درنقطهٔ به طول $x_۰=-۲$ و دومی درنقطهٔ می‌نیمم‌منحنی. مطلوب است مساحت‌مثلثی که محورعرض با این دومماس می‌سازد.

۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD، طول ضلع AB برابرقطرBD است. طول قطرها، به نسبت $\sqrt{۳}:۱$ می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ مساحت قسمتی از دایرهٔ محیطی مثلث BDC که متعلق به دایرهٔ محیطی مثلث ADC نیست.

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر γ راپیداکنید که، به‌ازای هر کدام ازآن‌ها، زوج‌عدد درست $(z،x)$ که‌درشرط $\gamma^۳|x|\leqslant\sqrt{۲}(\gamma^۲-z^۲)$ صدق‌می‌کند،حداقل باشد.

۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید :

$$\begin{cases}x^۲-۴xy+y^۲=۳\\ y^۲-۳xy=۲\end{cases}$$

پاسخ‌ها: ۱. $\frac{\pi}{۶}.(-۱)^{n+۱}+n\pi(n\in Z)$؛ ۲. $-۲/۵$، $-۳/۵$؛

۳. $\frac{۲۵}{۴}$؛ ۴. $\frac{\pi}{۱۸}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$؛ ۵. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\gamma<۱$، $\sqrt{۲}<\gamma<۲$؛

۶. $\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$، $\left(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$.

پایان